Géométrie analytique 1

Alexey Muranov

7 avril 2024

Table des matières

Introduction

On admet la connaissance par le lecteur des éléments de la *géométrie euclidienne classique* (aussi dite la *géométrie synthétique*).

En géométrie euclidienne classique, les objets géométriques de base sont les *points* et les *droites*, qui se trouvent dans un *plan euclidien* ou dans un *espace euclidien 3-dimensionnel*. On peut étudier les positions relatives des points et des droites, évaluer les *distances* entre des points et les *angles* entre des droites ou *demi-droites* (*rayons*). En utilisant les points, les droites, et les notions de distance et d'angle, on peut définir des *figures géométriques*, telles que *triangles* et *cercles*.

En géométrie classique, les calculs au sens algébrique sont d'habitude limités aux calculs des longueurs et des angles, et on raisonne avec des relations entre des objets plutôt qu'avec des opérations sur des objets.

En revanche, en *géométrie analytique*, on utilise plutôt des opérations que des relations, et on calcule avec des *coordonnées* ainsi qu'avec des *vecteurs*.

Les droites, les plans, et les figures géométriques en géométrie analytique son souvent confondus avec les ensembles de leurs points. Des ensembles de vecteurs jouent également un rôle important en géométrie analytique.

Dans la suite, on va parler des points, des droites, et des autres objets géométrique situés sur/dans une même droite, un même plan ou un même espace tridimensionnel.

I. Espaces affines et espaces vectoriels

Commençons par étudier de manière analytique la partie de la géométrie classique qui ne tient pas compte des longueurs ni des angles. Les objets élémentaires de l'étude seront les points et les *vecteurs géométriques libres*.

I.1. Qu'est-ce que c'est, un vecteur géométrique libre ?

Notation. Si A et B sont deux points distincts, on va noter « (AB) » la droite qui passe par A et B, et on va noter « $[AB]$ » le segment de la droite (AB) entre A et B. On peut aussi considérer le segment « dégénéré » réduit au point A tout seul et noté « $[AA]$ ».

Définition. On définit les *vecteurs géométriques liés* ainsi :

(1) à tout couple de points (A, B), on associe un *vecteur géométrique lié*, noté « $\overrightarrow{[AB]}$ » ;

(2) si A, B, C, D sont quatre points, on admet que le *vecteur géométrique lié* $\overrightarrow{[CD]}$ est le même que $\overrightarrow{[AB]}$ si et seulement si $C = A$ et $D = B$:

$$\overrightarrow{[CD]} = \overrightarrow{[AB]} \quad \Leftrightarrow \quad (C, D) = (A, B) \ ;$$

(3) tout *vecteur géométrique lié* est de la forme $\overrightarrow{[AB]}$, où A et B sont deux points.

Les vecteurs géométriques liés sont faciles à définir, mais on ne va pas s'en servir car ils sont moins pratiques à travailler avec que les *vecteurs géométriques libres* qu'on va définir et étudier dans la suite. Afin de pouvoir définir les vecteurs géométriques libres, on introduit la relation d'*équipollence* entre des couples de points.

Définition. La relation d'*équipollence* ($\doteqdot$) entre deux couples de points (A, B) et (C, D) est définie par l'équivalence suivante :

$$(A, B) \doteqdot (C, D) \quad \Leftrightarrow \quad \text{le milieu de } [BC] \text{ coïncide avec le milieu de } [DA].$$

Notons que, d'après cette définition,

$$\begin{aligned} (A, B) \doteqdot (C, D) \quad &\Leftrightarrow \quad (B, A) \doteqdot (D, C) \\ &\Leftrightarrow \quad (A, C) \doteqdot (B, D) \quad \Leftrightarrow \quad (C, A) \doteqdot (D, B). \end{aligned}$$

Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points tels que $(A, B) \doteqdot (C, D)$.*

(1) *Si $A \neq B$, alors $C \neq D$ et les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.*

(2) *Si $A \neq C$, alors $B \neq D$ et les droites (AC) et (BD) sont parallèles ou confondues.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Les trois propriétés suivantes de la relation $(\doteq)$ sont d'une importance particulière pour la définition des vecteurs géométriques libres :

(1) si $(A, B) \doteq (C, D)$ et $(C, D) \doteq (E, F)$, alors $(A, B) \doteq (E, F)$,

(2) $(A, B) \doteq (A, B)$,

(3) si $(A, B) \doteq (C, D)$, alors $(C, D) \doteq (A, B)$.

La propriété (1) est dite la *transitivité* de $(\doteq)$, la propriété (2) est dite la *réflexivité* de $(\doteq)$, et la propriété (3) est dite la *symétrie* de $(\doteq)$.

La réflexivité et la symétrie de $(\doteq)$ sont presque évidentes, mais pas la transitivité. Pour démontrer que $(\doteq)$ est transitive (la propriété (1)), on peut utiliser le lemme suivant.

Lemme. *Soient A, B, C, D quatre points quelconques, et soient M_{AB} le milieu de $[AB]$, M_{BC} le milieu de $[BC]$, M_{CD} le milieu de $[CD]$, et M_{DA} le milieu de $[DA]$. Alors le milieu de $[M_{AB}M_{CD}]$ coïncide avec le milieu de $[M_{BC}M_{DA}]$.*

Admettons ce lemme sans démonstration et utilisons le pour en déduire la transitivité de $(\doteq)$.

Proposition. *Soient A, B, C, D, E, F six points tels que $(A, B) \doteq (C, D)$ et $(C, D) \doteq (E, F)$. Alors $(A, B) \doteq (E, F)$.*

Démonstration. Posons G le milieu de $[BC]$, lequel coïncide avec le milieu de $[DA]$, et H le milieu de $[DE]$, lequel coïncide avec le milieu de $[FC]$. Posons K le milieu de $[GH]$.

Posons M_{DC} le milieu de $[DC]$, M_{BE} le milieu de $[BE]$, et M_{FA} le milieu de $[FA]$. Le but est de prouver que $M_{BE} = M_{FA}$.

En appliquant le lemme précédent aux quatre points B, E, D, C, on trouve que le milieu de $[M_{BE}M_{DC}]$ coïncide avec le milieu de $[HG]$, c'est-à-dire, avec K.

En appliquant le lemme précédent aux quatre points F, A, D, C, on trouve que le milieu de $[M_{FA}M_{DC}]$ coïncide avec le milieu de $[GH]$, c'est-à-dire, avec K.

Ainsi, les milieux de $[M_{BE}M_{DC}]$ et de $[M_{FA}M_{DC}]$ coïncident. D'où, $M_{BE} = M_{FA}$. ☐

Le lemme suivant est à la fois utile et facile à démontrer.

Lemme. (1) *Si A, B, C sont trois points tels que $(A, B) \doteq (A, C)$, alors $B = C$.*

(2) *Si A, B, C sont trois points tels que $(A, C) \doteq (B, C)$, alors $A = B$.*

Ayant étudié la relation d'équipollence $(\doteq)$, on s'en sert maintenant pour définir les vecteurs géométriques libres.

Définition. On définit les *vecteurs géométriques libres* ainsi :

(1) à tout couple de points (A, B), on associe un *vecteur géométrique libre*, noté « $\overrightarrow{AB}$ » ;

(2) si A, B, C, D sont quatre points, on admet que le *vecteur géométrique libre* $\overrightarrow{CD}$ est le même que $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $(C, D) \doteqdot (A, B)$:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad (C, D) \doteqdot (A, B) \;;$$

(3) tout *vecteur géométrique libre* est de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points.

Exercice. Soient A, B, O trois points. Montrer que O est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$.

Définition. Pour deux points A et B, le vecteur géométrique libre $\overrightarrow{AB}$ peut être noté « $B - A$ » et peut être dit la *différence* de B et A :

$$B - A \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AB}.$$

Notation. Si E est une droite, un plan ou un espace, alors l'ensemble des vecteurs géométriques libres de E est parfois noté « $\vec{\mathsf{E}}$ ».

Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, on va appeler les vecteurs géométriques libres les *vecteurs* tout court.

I.2. Vecteur nul, vecteur opposé

Exercice. Soient A et B deux points d'une même droite, d'un même plan ou d'un même espace. Montrer que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Définition. Si E est une droite, un plan ou un espace, le *vecteur nul* de E est le vecteur $\overrightarrow{AA}$, où A est un point arbitraire de E.

Notation. Le vecteur nul d'une droite, d'un plan ou d'un espace E peut être noté « $\vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{E}}$ », ou tout simplement « $\vec{\mathbf{0}}$ », ou « $\mathbf{0}$ ».

Exercice. Soient A, B, C, D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Montrer que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

Définition. Le vecteur *opposé* d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Ainsi, en particulier, l'opposé de $\vec{\mathbf{0}}$ est $\vec{\mathbf{0}}$.

Exercice. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur qui est son propre opposé. Montrer que $\boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}}$.

I.3. Translation d'un point par un vecteur

Définition. Si A et B sont deux points et que $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$, alors le *translaté* de A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, noté « $A + \boldsymbol{x}$ », est B :

$$A + \overrightarrow{AB} \overset{\text{déf}}{=} B.$$

Le translaté d'un point A par un vecteur $\boldsymbol{x}$ peut aussi être appelé la *somme* de A et $\boldsymbol{x}$.

Ainsi, si A et B sont deux points, alors

$$A + (B - A) = A + \overrightarrow{AB} = B.$$

Si A est un point et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors on peut montrer que

$$(A + \boldsymbol{x}) - A = \overrightarrow{A(A + \boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x}.$$

Exercice. Montrer le.

Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, l'opération qui à tout point associe son translaté par $\boldsymbol{x}$ est dite la *translation par* le vecteur $\boldsymbol{x}$, ou *translation de* vecteur $\boldsymbol{x}$.

Définition. Si A et B sont deux points et que $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{BA}$, alors le *translaté inverse* de A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, noté « $A - \boldsymbol{x}$ », est B :

$$A - \overrightarrow{BA} \overset{\text{déf}}{=} B.$$

Le translaté inverse d'un point A par un vecteur $\boldsymbol{x}$ peut aussi être appelé la *différence* de A et $\boldsymbol{x}$.

Ainsi, si A et B sont deux points, alors

$$A - (A - B) = A - \overrightarrow{BA} = B.$$

Si A est un point et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors on peut montrer que

$$A - (A - \boldsymbol{x}) = \overrightarrow{(A - \boldsymbol{x})A} = \boldsymbol{x}.$$

Exercice. Montrer le.

Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, l'opération qui à tout point associe son translaté inverse par $\boldsymbol{x}$ est dite la *translation inverse par* le vecteur $\boldsymbol{x}$, ou *translation inverse de* vecteur $\boldsymbol{x}$.

Les deux identités suivantes sont satisfaites pour tout point A et pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$:

(1) $(A + \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = A$, (2) $(A - \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = A$.

I.4. Addition et soustraction de vecteurs

D'après la définition des translatés, quels que soient trois points A, B, C, on a :

$$A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C = A + \overrightarrow{AC}.$$

Cette observation suggère qu'il est naturel de définir l'opération d'*addition* (+) des vecteurs de telle manière que pour tous points A, B, C, on ait l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Pour voir si on peut imposer cette identité comme la définition de l'addition de vecteurs, il suffit de vérifier si pour tous points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 tels que $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ et $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_2C_2}$, on a $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_2C_2}$. D'après le lemme suivant, c'est le cas.

Lemme. *Soient six points* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *tels que* $(A_1, B_1) \doteqdot (A_2, B_2)$ *et* $(B_1, C_1) \doteqdot (B_2, C_2)$. *Alors* $(A_1, C_1) \doteqdot (A_2, C_2)$.

Démonstration. Comme $(A_1, B_1) \doteqdot (A_2, B_2)$, on en déduit que $(A_1, A_2) \doteqdot (B_1, B_2)$. Comme $(B_1, C_1) \doteqdot (B_2, C_2)$, on en déduit que $(B_1, B_2) \doteqdot (C_1, C_2)$. Ainsi, $(A_1, A_2) \doteqdot (C_1, C_2)$. D'où, $(A_1, C_1) \doteqdot (A_2, C_2)$. □

Définition. Si A, B, C sont trois points, $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{BC}$, alors la *somme* des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, notée « $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ », est $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \overset{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AC}.$$

Exercice. Montrer, en utilisant le dernier lemme, que cette définition est correcte. Vérifier en plus qu'elle est complète, c'est-à-dire, qu'elle définit la somme de deux n'importe quels vecteurs.

Voici les trois identités les plus importantes satisfaites par l'opération d'addition des vecteurs :

(1) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$,

(2) $\boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x}$,

(3) $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Exercice. Vérifier ou observer ces identités sur un dessin.

Proposition. *Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *deux vecteurs d'une même droite, d'un même plan ou d'un même espace* E. *Alors* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *sont opposés l'un de l'autre si et seulement si* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{E}}$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. L'opération de *soustraction* des vecteurs est définie par l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}.$$

Une autre façon de définir la soustraction des vecteurs est par les deux identités suivantes :

(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, (2) $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

En fait, on peut montrer que n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule.

Notation. L'expression « $+\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. L'expression « $-\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}} - \boldsymbol{x}$.

Ainsi, $-\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $\boldsymbol{x}$ (et $\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $-\boldsymbol{x}$).

I.5. Multiplication et division de vecteurs par des scalaires

Dans le contexte du calcul vectoriel, on appelle *scalaires* les nombres par lesquels les vecteurs peuvent être *multipliés*.

Définition. (1) Si n est un nombre naturel et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *produit* $n\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$n\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} \vec{\mathbf{0}} \underbrace{+ \boldsymbol{x} + \cdots + \boldsymbol{x}}_{n \text{ fois}}.$$

(2) Si m et n sont naturels, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, et $a = n - m$, alors le *produit* $a\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$(n-m)\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} n\boldsymbol{x} - m\boldsymbol{x}.$$

(3) Si a est un nombre entier non nul et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *quotient* $\boldsymbol{x}/a$ est défini par l'équation :

$$a\frac{\boldsymbol{x}}{a} = \boldsymbol{x}.$$

(4) Si a est un entier non nul, b est un entier, $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, et $q = b/a$, alors le *produit* $q\boldsymbol{x}$ est défini par la règle :

$$\frac{b}{a}\boldsymbol{x} \overset{\text{déf}}{=} \frac{b\boldsymbol{x}}{a} = b\frac{\boldsymbol{x}}{a}.$$

(5) Si α est un nombre réel et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *produit* $\alpha\boldsymbol{x}$ est défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que $p \leqslant \alpha \leqslant q$, si O, A, P, Q sont quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \alpha\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{OP} = p\boldsymbol{x}$, $\overrightarrow{OQ} = q\boldsymbol{x}$, alors le point A se trouve sur le segment $[PQ]$.

(6) Si α est un nombre réel non nul et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors le *quotient* $\boldsymbol{x}/\alpha$ est défini par l'équation :

$$\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{\alpha} = \boldsymbol{x}.$$

On va admettre sans démonstration que les définitions données ci-dessus de la multiplication d'un vecteur par un réel et de la division d'un vecteur par un réel non nul sont correctes et complètes. Cela implique en particulière qu'on admet que le produit d'un vecteur non nul avec un réel non nul est un vecteur non nul : pour tout vecteur $\boldsymbol{x} \neq \vec{\mathbf{0}}$ et pour tout réel $\alpha \neq 0$, on a que $\alpha\boldsymbol{x} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Les identités suivantes sont satisfaites :

(1) $(\beta\alpha)\boldsymbol{x} = \beta(\alpha\boldsymbol{x})$,

(2) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

(3) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$,

(4) $(\alpha - \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{x}$,

(5) $0\boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}}$,

(6) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$,

(7) $\alpha(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}$,

(8) $\alpha\vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Définition. Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur non nul, α est un nombre réel, et $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, alors définissons le *quotient* $\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$ comme α :

$$\frac{\alpha\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}} \overset{\text{déf}}{=} \alpha \qquad (\text{si } \boldsymbol{x} \neq \vec{\mathbf{0}}).$$

Remarque. L'opération de division d'un vecteur par un autre est peu courante et rarement utilisée en pratique.

I.6. Axiomes et propriétés d'un espace vectoriel abstrait

Les vecteurs géométriques libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment ce qui s'appelle un *espace vectoriel* (réel).

Définition. Un *espace vectoriel réel*[1] est un ensemble V muni :

(1) d'une opération d'*addition*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur somme $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathsf{V}$,

(2) d'une opération de *soustraction*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur différence $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathsf{V}$,

(3) d'un élément *nul* $\vec{\mathbf{0}} \in \mathsf{V}$,

(4) d'une operation de *multiplication* par des nombres réel, qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un nombre réel α associe un élément $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathsf{V}$,

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathsf{V}$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$:

(1) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$,

(2) $\boldsymbol{x} + \vec{\mathbf{0}} = \boldsymbol{x} = \vec{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x}$,

(3) $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$,

(4) $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$,

(5) $(\beta\alpha)\boldsymbol{x} = \beta(\alpha\boldsymbol{x})$,

(6) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$,

(7) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$,

(8) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont dits *vecteurs*.

[1] De la même manière on peut définir les espaces vectoriels *rationnels* ou les espaces vectoriels *complexes*. En fait, pour le faire, il suffit de remplacer dans cette définition toute mention des nombres réels par une mention appropriée des rationnels ou des complexes (remplacer « $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ » par « $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ » ou « $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ »).

Les 8 propriétés qui font partie de la définition d'un espace vectoriel réel (abstrait) sont dites *axiomes*.[2] Lorsque on considère un espace vectoriel réel abstrait, on *admet* que les axiomes sont satisfaits, car ils font partie de la définition.

Les vecteurs géométriques libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment un exemple « concret » d'un espace vectoriel réel abstrait. (Pour le montrer, on doit vérifier que les 8 axiomes sont satisfaits.)

Un autre exemple « concrete » d'un espace vectoriel réel est l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$. Il est en effet facile de vérifier que l'ensemble $\mathbf{R}$ muni de ses opération d'addition et de soustraction, de son élément 0, et de l'opération de multiplication des réels par des réels, satisfait les 8 axiomes.

Parmi d'autres exemples courants des espaces vectoriels réels il y a :

(1) l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de réels, l'ensemble $\mathbf{R}^3$ des triples de réels, ainsi que les ensembles $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^5$, $\mathbf{R}^6$, et ainsi de suite.

(2) l'ensemble $\mathbf{C}$ des *nombres complexes*,

(3) l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des *polynômes* à coefficients réels en une *indéterminée* X.

Plus précisément, pour chacun de ces ensembles, si on le munira des opérations d'addition et de soustraction, de l'élément nul, et de l'opération de multiplication par des réels d'une manière « naturelle », on pourra montrer que les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel seront satisfaits.

À partir des 8 axiomes d'un espace vectoriel, on peut déduire d'autres propriétés, dont les suivantes :

(1) si $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$, alors $\boldsymbol{y}=\vec{\mathbf{0}}$,

(2) si $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\vec{\mathbf{0}}$, alors $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}$,

(3) $\alpha\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$,

(4) $\alpha(-\boldsymbol{x})=-\alpha\boldsymbol{x}$,

(5) $0\boldsymbol{x}=\vec{\mathbf{0}}$,

(6) $(-\alpha)\boldsymbol{x}=-\alpha\boldsymbol{x}$.

Exercice. Essayer de les déduire.

I.7. Espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$

Rappelons nous qu'on note « $\mathbf{R}$ » l'ensemble des nombres réels.

Notation. Si n est un nombre naturel et X est un ensemble (de nombre, ou de points, ou d'autres objets mathématiques), alors on note « X^n » l'ensemble des n*-uples* d'éléments de X.

En particulier, $\mathbf{N}^n$ est l'ensemble des n-uples de nombres naturels, $\mathbf{Z}^n$ est l'ensemble des n-uples d'entiers, $\mathbf{Q}^n$ est l'ensemble des n-uples de rationnels, et $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des n-uples de réels.

[2] En général, lorsque on définit une *structure algébrique* abstraite, les propriétés qui font partie de sa définition sont dites *axiomes*.

Ainsi, $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, $\mathbf{R}^3$ est l'ensemble des triples de réels, $\mathbf{R}^4$ est l'ensemble des quadruples de réels, et ainsi de suite. L'ensemble $\mathbf{R}^0$ ne contient qu'un seul élément – le 0-uple (). On va éviter de parler de $\mathbf{R}^0$ pour des raisons pédagogiques, car à première vue ce cas peut paraître peu intuitif et différent des autres.

Pour tout nombre naturel non nul n, on va doter $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'un espace vectoriel réel. Pour cela il suffit de définir les opérations d'addition et de soustraction, l'élément nul, et l'opération de multiplication par de réels de manière qu'ils satisfont les 8 axiomes. On les définit ainsi :

$$\begin{aligned}
(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\alpha_1 + \beta_1,\ \dots,\ \alpha_n + \beta_n),\\
(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - (\beta_1, \dots, \beta_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\alpha_1 - \beta_1,\ \dots,\ \alpha_n - \beta_n),\\
\vec{\mathbf{0}} &\overset{\text{déf}}{=} (0,\ \dots,\ 0),\\
\beta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\overset{\text{déf}}{=} (\beta\alpha_1,\ \dots,\ \beta\alpha_n).
\end{aligned}$$

(Ici α_i, β_i, β sont des réels.)

Exemples.

$$\begin{aligned}
&(1,\ 2) + (3,\ 4) = (4,\ 6) = 2(2,\ 3),\\
&(1,\ 2) - (3,\ 4) = (-2,\ -2) = 2(-1,\ -1) = (-2)(1,\ 1).
\end{aligned}$$

Exercice. Vérifier que les opérations définies ci-dessus satisfont les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel.

Parfois les n-uples de réels sont écrits en colonne,[3] par exemple :

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}, \qquad \beta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\alpha_1\\ \vdots\\ \beta\alpha_n\end{pmatrix}.$$

I.8. Axiomes et propriétés d'un espace affine abstrait

Les points d'une droite, d'un plan ou d'un espace forment ce qui s'appelle un *espace affine* réel, lorsque on prend en compte les opérations de translation par tous les vecteurs libres.

Définition. Soit V un espace vectoriel. Un *espace affine* de *direction* V est un ensemble E muni :

(1) d'une opération qui à deux éléments A et B de E associe un élément $\overrightarrow{AB}$ de V,

(2) d'une opération qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un élément A de E associe un élément $A + \boldsymbol{x}$ de E,

[3] En fait, en *calcul matriciel*, suivant les conventions établies, il est souvent pratique d'identifier les éléments de $\mathbf{R}^n$ avec des *matrices-colonnes*.

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $A, B \in \mathsf{E}$ et $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{V}$:

(1) $A + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (A + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}$,

(2) $A + \overrightarrow{AB} = B$,

(3) $\overrightarrow{A(A + \boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x}$.

Les éléments d'un espace affine sont dits *points*. La direction d'un espace affine est aussi dite l'espace vectoriel *associé* à cet espace affine.

On peut interpréter le point écrit « $A + \boldsymbol{x}$ » comme le résultat de la *translation* du point A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, et on peut interpréter le vecteur écrit « $\overrightarrow{AB}$ » comme le vecteur par lequel il faut *translater* le point A pour obtenir le point B.

Définition. Pour deux points A et B d'un espace affine, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être noté « $B - A$ » et peut être dit la *différence* de B et A :

$$B - A \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{AB}.$$

Notation. Lorsque un ensemble E est traité comme un espace affine, son espace vectoriel associé (sa direction) est parfois noté $\vec{\mathsf{E}}$.

L'ensemble des poins d'une droite, d'un plan ou d'un espace est un exemple d'un espace affine, si comme son espace vectoriel associé on prend l'ensemble des vecteurs géométriques libres de cette droite, ce plan, ou cet espace.

À partir des 3 axiomes d'un espace affine réel et des 8 axiomes d'un espace vectoriel réel, on peut déduire d'autres propriétés, en particulier les suivantes :

(1) $A + \vec{\mathbf{0}} = A$,

(2) $\overrightarrow{AA} = \vec{\mathbf{0}}$,

(3) $\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x} = \overrightarrow{A(B + \boldsymbol{x})}$,

(4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

En effet :

$$A + \vec{\mathbf{0}} \stackrel{(2)}{=} (A + \overrightarrow{AA}) + \vec{\mathbf{0}} \stackrel{(1)}{=} A + (\overrightarrow{AA} + \vec{\mathbf{0}}) = A + \overrightarrow{AA} \stackrel{(2)}{=} A.$$

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A(A + \vec{\mathbf{0}})} \stackrel{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}}.$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}} \stackrel{(3)}{=} \overrightarrow{A(A + (\underbrace{\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}}))} \stackrel{(1)}{=} \overrightarrow{A((A + \overrightarrow{AB}) + \boldsymbol{x})} \stackrel{(2)}{=} \overrightarrow{A(B + \boldsymbol{x})}.$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}} \stackrel{(3)}{=} \overrightarrow{A(A + (\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}}))} \stackrel{(1)}{=} \overrightarrow{A((A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC})} \stackrel{(2)}{=} \overrightarrow{A(B + \overrightarrow{BC})} \stackrel{(2)}{=} \overrightarrow{AC}.$$

I.9. Espaces vectoriels vus comme affines

Tout espace vectoriel E peut être vu comme un espace affine. Pour cela on utilise E comme son propre espace vectoriel associé (donc, $\overrightarrow{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$), et on définit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \quad \text{pour tous} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{E}.$$

Ainsi, les éléments d'un espace vectoriel E peuvent être traités comme vecteurs ou comme points, mais l'addition de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme l'addition de deux vecteurs ou comme l'addition d'un point et d'un vecteur. Pareil, la soustraction de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme la soustraction entre deux vecteurs ou entre deux points.

Ainsi on munit chaque ensemble $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'un espace affine, en utilisant son structure d'espace vectoriel.

Exemple. Si $A = (1,\ 2)$ et $B = (3,\ 4)$ sont deux point de l'espace affine $\mathbf{R}^2$, alors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 2)$, et c'est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.

I.10. Droites dans un plan ou dans un espace affine

Jusqu'ici dans ce chapitre, on parlait de points et de vecteurs d'une droite, d'un plan, ou d'un espace D sans tenir compte qu'une droite D puisse faire partie d'un plan ou d'un espace E, et qu'un plan D puisse faire partie d'un espace E. Dans cette section on va parler de droites dans un plan ou dans un espace.

Définition. Soit D une droite dans une plan ou dans un espace E. Un vecteur $\boldsymbol{u}$ de E est dit un *vecteur de* D si et seulement si il existe deux points[4] A et B de D tels que $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$.

Un lecteur attentif peut remarquer que la notion d'un vecteur d'une droite est devenue légèrement ambiguë : est-ce que les vecteurs d'une droite sont propres à cette droite, ou est-ce qu'ils font partie des vecteurs d'un plan ou d'un espace ambiant ? En plus, il peut y avoir plusieurs plans qui contiennent une même droite. La même ambiguïté concerne la notion d'un vecteur d'un plan ou d'un espace. Cependant, en pratique cette ambiguïté ne doit pas causer de la confusion.

Exercice. Essayer de comprendre l'ambiguïté de la notion d'un vecteur d'une droite ou d'un plan, et pourquoi cette ambiguïté peut être tolérée.

Considérons un plan ou un espace arbitraire E. On va identifier E avec l'ensemble de ses points, et on va noter « $\overrightarrow{\mathsf{E}}$ » l'ensemble des vecteurs de E (donc, $\overrightarrow{\mathsf{E}}$ est l'espace vectoriel associé à l'espace affine E). On va utiliser les mêmes conventions pour les droites dans E : si D est une droite dans E, on va identifier D avec l'ensemble des ses points, et

[4] Les points A et B ici ne sont pas supposés être distincts, donc le vecteur nul de E est un vecteur de D.

on va noter « $\vec{\mathsf{D}}$ » l'ensemble des vecteurs de D (donc, $\vec{\mathsf{D}}$ est l'espace vectoriel associé à l'espace affine D). Ainsi, si D est une droite dans E, alors D fait partie de E et $\vec{\mathsf{D}}$ fait partie de $\vec{\mathsf{E}}$, ce qui peut être écrit ainsi : $\mathsf{D} \subset \mathsf{E}$ et $\vec{\mathsf{D}} \subset \vec{\mathsf{E}}$. (La formule « $X \subset Y$ » veut dire que l'ensemble X est inclus dans l'ensemble Y.)

Certains auteurs appellent l'ensemble $\vec{\mathsf{E}}$ des vecteurs d'une droite, d'un plan ou d'un espace E la *direction* de E.

Proposition. *Soient* E *un plan ou un espace et* D *une droite dans* E. *Comme d'habitude, notons* « $\vec{\mathsf{E}}$ » *l'ensemble des vecteurs de* E *et* « $\vec{\mathsf{D}}$ » *l'ensemble des vecteurs de* D. *Alors :*

(1) *si* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(2) *si* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(3) $\vec{\mathbf{0}}_{\vec{\mathsf{E}}} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(4) *si* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, *alors* $\alpha\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(5) *si* $A, B \in \mathsf{D}$, *alors* $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathsf{D}}$,

(6) *si* $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$ *et* $A \in \mathsf{D}$, *alors* $A + \boldsymbol{u} \in \mathsf{D}$.

Proposition. *Soient* D *une droite et* $\boldsymbol{u}$ *un vecteur non nul de* D : $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}}$, $\boldsymbol{u} \neq \vec{\mathbf{0}}$. *Alors pour tout* $\boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}}$, *il existe un unique* $\alpha \in \mathbf{R}$ *tel que* $\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

Définition. Tout vecteur non nul d'une droite est dit *vecteur directeur* de cette droite.

Proposition. *Soient* A *et* B *deux points distincts et* C *un point arbitraire. Alors* C *appartient à la droite* (AB) *si et seulement si il existe un réel* α *tel que* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$. *En plus,* C *appartient au segment* $[AB]$ *si et seulement si il existe un réel* α *tel que* $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$ *et* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Proposition. *Soient* A *et* B *deux points distincts et* O *et* C *deux points arbitraires. Alors* C *appartient à la droite* (AB) *si et seulement si il existe deux nombres réels* α *et* β *tels que :*

(1) $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, (2) $\alpha + \beta = 1$.

En plus, C *appartient au segment* $[AB]$ *si et seulement si il existe deux nombres réels* α *et* β *tels que :*

(1) $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, (2) $\alpha + \beta = 1$, (3) $\alpha \geqslant 0$ *et* $\beta \geqslant 0$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Proposition. *Soient* E *un plan ou un espace et* A *et* B *deux droites dans* E. *Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) A *et* B *sont parallèles ou confondus,* (2) $\vec{\mathsf{A}} = \vec{\mathsf{B}}$.

I.11. Points alignés, vecteurs colinéaires

Définition. Des points sont dits *alignés* si et seulement si ils se trouvent sur une même droite.

Proposition. *Si $A_1, \dots, A_n$ sont des points alignés et $\boldsymbol{x}$ est un vecteur, alors les points $A_1 + \boldsymbol{x}, \dots, A_n + \boldsymbol{x}$ sont alignés aussi.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Soient A et B deux points et $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ des vecteurs. Supposons que les points $A + \boldsymbol{x}_1, \dots, A + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés. Alors les points $B + \boldsymbol{x}_1, \dots, B + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés aussi.*

Définition. Des vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ sont dits *colinéaires* si et seulement si pour tout point A, les $n + 1$ points $A, A + \boldsymbol{x}_1, \dots, A + \boldsymbol{x}_n$ sont alignés.

Exercice. Soient A et B deux points différents.

(1) Montrer qu'un point C appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

(2) Montrer qu'un point C appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires.

Lemme. *Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ des vecteurs avec $\boldsymbol{x}$ non nul. Alors ces $n + 1$ vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\boldsymbol{y}_i = \alpha_i \boldsymbol{x}$ pour $i = 1, \dots, n$.*

On va admettre ce lemme sans démonstration.

Exercice. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs.

(1) Montrer que si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont colinéaires, alors $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ le sont aussi.

(2) Montrer que si $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ sont colinéaires, alors $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ le sont aussi.

I.12. Bases, repères, coordonnées cartésiennes dans un plan

Théorème. *Soient P un plan et $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de P $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \vec{\mathsf{P}})$. Alors pour tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de P $(\boldsymbol{x} \in \vec{\mathsf{P}})$, il existe un unique couple de nombres réels (α, β) tel que $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$. En particulier, si α et β sont deux réels tels que $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \vec{\boldsymbol{0}}$, alors $\alpha = \beta = 0$.*

On va admettre ce théorème sans démonstration formelle.

Définition. Soient P un plan et $\vec{\mathsf{P}}$ l'ensemble des vecteur de P. Une *base* de $\vec{\mathsf{P}}$ est un couple de vecteurs non colinéaire de $\vec{\mathsf{P}}$. Si $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$ et que $\boldsymbol{x} \in \vec{\mathsf{P}}$, alors les *coordonnées cartésiennes* du vecteur $\boldsymbol{x}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ sont l'unique couple de réels (α, β) tel que $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$.

Exercice. Soient P un plan et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base de $\vec{\mathsf{P}}$. Soient $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ deux vecteurs.

(1) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

(2) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ dans la base $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

(3) Montrer que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$.

(4) Trouver les coordonnées de $\boldsymbol{a}$ et de $\boldsymbol{b}$ dans la base $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Notation. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de $\vec{\mathsf{P}}$ et $\boldsymbol{x}$ est un élément de $\vec{\mathsf{P}}$, le couple des coordonnées de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{B}$ peut être noté « $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ » ou « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]$ » ou « $[\boldsymbol{x}]^{\mathcal{B}}$ » ; ici on va adopter la deuxième notation. Ainsi :

$${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = (\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Exemple. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base et $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, alors ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{w}] = (-1, 2)$.

Les coordonnées des vecteurs peuvent être écrites en colonne, par exemple :

$$\text{« } {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ »}$$

(au lieu de « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = (\alpha, \beta)$ »).

Les coordonnées des vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ *respectent* les opérations vectorielles :

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] + {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}], \\ {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] - {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}], \\ {}_{\mathcal{B}}[\vec{\mathbf{0}}] &= (0,\ 0), \\ {}_{\mathcal{B}}[\alpha\boldsymbol{x}] &= \alpha\, {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}]. \end{aligned}$$

Définition. Soient P un plan et $\vec{\mathsf{P}}$ l'ensemble des vecteur de P. Un *repère* de P est composé d'un point de P, qui est appelé son *origine*, et d'une base de $\vec{\mathsf{P}}$.

On va identifier le repère composé d'une origine A et d'une base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ au triple $(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Notation. Un repère $(A, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ peut être noté « $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ ».

Un plan P muni d'un repère est dit un *plan cartésien*. On dit aussi qu'un repère donné définit dans P un *système de coordonnés cartésiennes*. En effet, un repère $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ dans P permet d'associer à tout point B de P un unique couple de ses *coordonnées cartésiennes* (α, β) par l'équation

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}.$$

Définition. Soient P un plan, $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ un repère de P, et B un point de P. Alors les *coordonnées cartésiennes* du point B dans le repère $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ sont l'unique couple de réels (α, β) tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$.

Ainsi, si P est un plan muni d'un repère $A\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$, et α et β sont réels, alors le point de P de coordonnées (α, β) est le point

$$B = A + \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}.$$

I.13. Représentation paramétrique des droites dans un plan

SECTION-BROUILLON

Soient P un plan et $A\boldsymbol{uv}$ un repère dans P (le plan P muni du repère $A\boldsymbol{uv}$ est donc un plan cartésien).

[…]

I.14. Équations cartésiennes des droites dans un plan

SECTION-BROUILLON

Soient P un plan et $A\boldsymbol{uv}$ un repère dans P (le plan P muni du repère $A\boldsymbol{uv}$ est donc un plan cartésien).

[…]

I.15. Déterminant par rapport à une base d'un couple de vecteurs dans un plan

Soit P un plan vectoriel.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base du plan vectoriel P. À tout couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de P on associe leur *déterminant* par rapport à $\mathcal{B}$, qui est un nombre réel noté « $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ ». L'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est complètement déterminée par les identités suivantes, où $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs arbitraires de P, et α est un nombre réel arbitraire :

(1) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\alpha\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en premier argument*),

(2) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \alpha\boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en deuxième argument*),

(3) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *alternée*, en tant qu'une opération *bilinéaire*),

(4) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

Proposition. *Cette définition est correcte : pour toute base $\mathcal{B}$ de P, il existe une unique opération $\det_{\mathcal{B}}$ qui à chaque couple de vecteurs de P associe un réel et qui satisfait les quatre propriétés données. En plus, si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base de P, et que*

$$\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}$$

sont deux vecteurs de P avec ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{u}] = (x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ et ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}] = (x_{\boldsymbol{v}}, y_{\boldsymbol{v}})$, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}.$$

Esquisse d'une démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base de P.

Montrons d'abord l'unicité : admettons qu'une opération $\det_{\mathcal{B}}$ satisfait les propriétés données dans la définition, et montrons qu'il n'y en a pas d'autres qui satisferaient ces propriétés.

Notons d'abord que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1.$$

Puis,

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}),$$

et donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -1.$$

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs arbitraires de P. Soient $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ et $(x_{\boldsymbol{v}}, y_{\boldsymbol{v}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}.$$

Alors on peut calculer que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b},\ x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}) = x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}.$$

Par le même calcul, toute opération qui satisfait les propriétés données dans la définition de « $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ » doit avoir $x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}$ pour le résultat si elle est appliquée à $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, et donc elle ne peut pas être différente de $\det_{\mathcal{B}}$.

On a montré l'unicité, il ne reste qu'à montrer qu'une opération avec les propriétés données existe. Pour cela il suffit de définir

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}, \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b},$$

et de vérifier que les propriétés désirées sont satisfaites. □

L'identité suivante découle des identités données dans la définition de $\det_{\mathcal{B}}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *antisymétrique*, en tant qu'une opération bilinéaire).

Exercice. Démontrer cette identité. Indication : il suffit de vérifier que

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

Théorème. *Quel que soit une base $\mathcal{B}$ d'un plan vectoriel P, deux vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de P sont colinéaires si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$. En effet, si $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \alpha\boldsymbol{u}) = \alpha\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$.

Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors le couple $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ est une base. Soient $(s_{\boldsymbol{a}}, t_{\boldsymbol{a}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{a}$ et $(s_{\boldsymbol{b}}, t_{\boldsymbol{b}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{b}$ dans la base $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$:

$$\boldsymbol{a} = s_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + t_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{b} = s_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + t_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}.$$

Alors on peut calculer :

$$\begin{aligned}1 = \det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \det_{\mathcal{B}}(s_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} + t_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{v},\ s_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{u} + t_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{v}) = (s_{\boldsymbol{a}}t_{\boldsymbol{b}} - t_{\boldsymbol{a}}s_{\boldsymbol{b}})\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\ = \Big(\det_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}\mathcal{B}\Big)\Big(\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\Big).\end{aligned}$$

D'où, $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \neq 0$. □

Voici quelques identités remarquables satisfaites pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et pour tout couple de vecteurs $\mathcal{F}$ dans P :

(1) $(\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}}\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}}\mathcal{F}$,

(2) $(\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}}\mathcal{B}) = 1$,

(3) $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 1$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Application des déterminants à la recherche des équations cartésiennes des droites dans un plan

Soient P un plan affine et D une droite affine dans P passant par un point A avec un vecteur directeur $\boldsymbol{u} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Alors, quels que soient un point M de P et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \boldsymbol{u} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\ \boldsymbol{u}) = 0.$$

Si O est un point quelconque, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\ \boldsymbol{u}) - \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}).$$

Si $\mathcal{R} = O\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ est un repère de P, soient (x_M, y_M) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{OM} = x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}.$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u}) = x_M\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}) + y_M\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{u}).$$

Ainsi on obtient une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})x + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})y = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}).$$

Jusqu'à ici on n'a supposé aucun rapport entre la base $\mathcal{B}$ le repère $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$. Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ est la base de $\mathcal{R}$: $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$ et $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}.$$

Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = y_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) = -x_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}) = x_A y_{\boldsymbol{u}} - y_A x_{\boldsymbol{u}}.$$

D'où une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$y_{\boldsymbol{u}}x - x_{\boldsymbol{u}}y = y_{\boldsymbol{u}}x_A - x_{\boldsymbol{u}}y_A.$$

Considérons maintenant la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathsf{D}}$ associée à D. Alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\overrightarrow{\mathsf{P}}$ de $\overrightarrow{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{v} \in \overrightarrow{\mathsf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} \text{ et } \boldsymbol{u} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\overrightarrow{\mathsf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$y_{\boldsymbol{u}}x - x_{\boldsymbol{u}}y = 0.$$

I.16. Orientations d'un plan

SECTION-BROUILLON
[…]