2025-01-23T14:27

Introduction à l'analyse

Série pour L1 / bac + 1

Notes rédigées par Alexey Muranov

23 janvier 2025

Table des matières

2025-01-23T14:27

I. Nombres réels

I.1. Qu'est-ce que c'est, un nombre réel ?

Exercice. Déterminer s'il existe un nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$.

Question. Quelle est la distance entre deux sommets opposés d'un carré de côté 1 mètre ?

Définition. Définissons les nombres *réels* ainsi :

(1) Tout nombre rationnel est *réel*.

(2) Si l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ est partagé en deux parties non vides A et B de manière que[1] pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p < q$, alors il existe un unique nombre *réel* x tel que pour tout $p \in A$ et pour tout $q \in B$, on a $p \leqslant x \leqslant q$.

(3) Pour tout nombre *réel* x, il existe deux nombres entiers a et b tels que $a < x < b$.

Il est sous-entendu dans cette définition que les relations d'ordre ($<$) et ($\leqslant$) pour les nombres réels satisfont quelques propriétés « usuelles » :

(1) si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$,

(2) si $x < y$, alors $x \neq y$,

(3) si $x \neq y$, alors $x < y$ ou $y < x$,

(4) $x \leqslant y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$.

Notation. L'ensemble des nombres réels sera noté « $\mathbf{R}$ ».

Exercice. Prouver qu'il existe un unique nombre réel $x > 0$ tel que pour tous nombres rationnels p et q tels que $0 < p < x < q$, on a que $p^2 < 2 < q^2$.

Rappelons nous que les nombres naturels sont entiers, que les entiers sont rationnels, et que les rationnels sont réels. Ainsi, lorsqu'on parle des nombres réels, cela inclue les naturels, les entiers, et les rationnels.

Certaines notions introduites pour la première fois dans le cadre de l'étude des nombres réels pourraient être introduites déjà pour les nombres naturels, ou pour les entiers, ou pour les rationnels.

[1] Une telle partition de $\mathbf{Q}$ s'appelle une *coupure de Dedekind*.

I.2. Relations d'ordre usuelles

D'après la définition des nombres réels, les relations $(\leqslant)$, $(\geqslant)$, $(<)$, $(>)$ sont définies sur l'ensemble des nombres réels et satisfont quelques propriétés « usuelles », dont les suivantes pour $(\leqslant)$:

(1) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$,

(2) $x \leqslant x$,

(3) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$,

(4) $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Exercice. Soient X et Y deux ensembles non vides de nombres réels tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in Y$, on a que $x \leqslant y$. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que pour tout $y \in Y$, on a $r \leqslant y$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels qui ne sont pas dans A.

(1) Montrer que A n'est pas vide. Montrer que B n'est pas vide.

(2) Soit z le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant z \leqslant q$. Montrer que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, on a que $x \leqslant z \leqslant y$.

Définition. Soient x, y, z trois nombre réels.

(1) On va dire que y est *entre* x et z (au sens large) si et seulement si $x \leqslant y \leqslant z$ ou $x \geqslant y \geqslant z$.

(2) On va dire que y est *strictement entre* x et z si et seulement si $x < y < z$ ou $x > y > z$.

Les deux lemmes suivants peuvent être utiles pour démontrer l'unicité ou l'existence d'un nombre réel « positionné » par rapport à d'autres nombres, rationnels ou réels.

Lemme. *Si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$, alors il existe un nombre rationnel r tel que $x < r < y$.*

Démonstration. Soient x et y deux nombres réels tels que $x < y$. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que $r \leqslant x$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels r tels que $y \leqslant r$. Alors :

(1) A et B sont non vides, d'après la partie (3) de la définition des nombres réels,

(2) pour tout $p \in A$ et pour tout $q \in B$, on a que $p < q$.

Supposons qu'il n'y a aucun nombre rationnel qui soit strictement entre x et y. Alors tout nombre rationnel est soit dans A, soit dans B. D'où, d'après la partie (2) de la définition des nombres réels, il existe un *unique* nombre réel z tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p \leqslant z \leqslant q$. Cela contredit le fait que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p \leqslant x < y \leqslant q$. Cette contradiction signifie qu'il existe un nombre rationnel qui est strictement entre x et y. $\square$

Lemme. *Soient X et Z deux ensembles non vides de nombres réels tels que pour tout $x \in X$ et pour tout $z \in Z$, on a que $x \leqslant z$. Alors il existe un nombre réel y tel que pour tous $x \in X$ et $z \in Z$, on a que $x \leqslant y \leqslant z$. En plus, parmi tous les nombres réels y tels que pour tous $x \in X$ et $z \in Z$, on a que $x \leqslant y \leqslant z$, il y en a un que est le plus grand, et un qui est le plus petit.*

Exercice. Prouver ce lemme.

Notation. Si x et y sont deux nombres réels, on va noter « $\max(x, y)$ » le plus grand entre x et y et « $\min(x, y)$ » le plus petit entre x et y :

$$\max(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant y, \\ y & \text{si} \quad x \leqslant y; \end{cases} \qquad \min(x, y) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant y, \\ y & \text{si} \quad x \geqslant y. \end{cases}$$

Réels positifs et négatifs

Définition. Un nombre réel x est dit :

(1) *positif* (au sens large) si et seulement si $x \geqslant 0$,

(2) *négatif* (au sens large) si et seulement si $x \leqslant 0$,

(3) *strictement positif* si et seulement si $x > 0$,

(4) *strictement négatif* si et seulement si $x < 0$.

I.3. Minimum et maximum

Définition. Soit X un ensemble de nombres réels.

(1) Un élément $x \in X$ est dit *minimal* dans X, ou un *minimum* de X, si et seulement si dans X il n'y a pas d'élément strictement plus petit que x.

(2) Un élément $x \in X$ est dit *maximal* dans X, ou un *maximum* de X, si et seulement si dans X il n'y a pas d'élément strictement plus grand que x.

Autrement dit, le minimum d'un ensemble de réels et le plus petit élément de cet ensemble, et le maximum en est le plus grand.[2]

Notation. Si X est un ensemble des nombres réels, on va noter « $\min X$ » le plus petit élément de X, s'il y en a, et on va noter « $\max X$ » le plus grand élément de X, s'il y en a.

Exemple. Si X est l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $\min X = 0$ et $\max X = 1$. Si X est l'ensemble des nombres réels x tels que $0 < x < 1$, alors les valeurs des expressions « $\min X$ » et « $\max X$ » ne sont pas définies.

[2] Cependant, dans certains *ensembles partiellement ordonnés*, *minimal* ne veut pas dire *le plus petit*, et *maximal* ne veut pas dire *le plus grand*.

2025-01-23T14:27

I.4. Minorants et majorants, infimum et supremum

Définition. Soit X un ensemble de nombres réels.

(1) Un nombre réel y est dite un *minorant* de X si et seulement si pour tout $x \in X$, on a que $x \geqslant y$; dans ce cas on dit aussi que X est *minoré* par y.

(2) Un nombre réel y est dite un *majorant* de X si et seulement si pour tout $x \in X$, on a que $x \leqslant y$; dans ce cas on dit aussi que X est *majoré* par y.

Exemples. (1) L'ensemble des nombres entiers n'est minoré par aucun nombre entier ou réel. Il n'est pas majoré non plus.

(2) L'ensemble des nombres rationnel q tels que $q^2 \leqslant 2$ est minoré par -10 et majoré par 10.

Exercice. Soient X un ensemble de nombres réels, A l'ensemble des minorants rationnels de X, et B l'ensemble des non minorants rationnels de X. Supposons que A et B ne soient pas vides. Soit y l'unique nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$.

(1) Montrer que y est un minorant de X.

(2) Montrer que y est le plus grand minorant de X.

Théorème. *Soit X un ensemble non vide de réels.*

(1) *Si X est minoré par un nombre réel, alors parmi les minorants réels de X il en existe un le plus grand.*

(2) *Si X est majoré par un nombre réel, alors parmi les majorants réels de X il en existe un le plus petit.*

Exercice. Prouver ce théorème.

On peut se poser la question si un théorème analogique existe pour les nombres rationnels. Comme le montre l'exemple suivant, il existe des ensembles de nombres rationnels qui sont majorés et minorés par des nombres rationnels, mais pour lesquels il n'y a pas du plus petit majorant *rationnel*, ni du plus grand minorant *rationnel*.

Exemple. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $q^2 \leqslant 2$. Alors A est majoré par 2 et minoré par -2. Or, parmi les majorants *rationnels* de A il n'y a pas du plus petit, et parmi les minorants *rationnels* de A il n'y a pas du plus grand.

Définition. Soit X un ensemble de réels. Le plus grand minorant réel de X, s'il existe, est dit la *borne inférieure* de X, ou l'*infimum* de X, et est noté « $\inf X$ ». Le plus petit majorant réel de X, s'il existe, est dit la *borne supérieure* de X, ou le *supremum* de X, et est noté « $\sup X$ ».

Exemple. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $0 < q < 1$. Alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.

Observons que si un ensemble X de réels possède un élément minimal, alors $\inf X = \min X$, et que s'il possède un élément maximal, alors $\sup X = \max X$.

I.5. Intervalles

Notation. Si x et y sont deux nombres réels, alors on va noter :

(1) « $[x, y]$ » l'ensemble des réels z tels que $x \leqslant z \leqslant y$,

(2) « $[x, y[$ » l'ensemble des réels z tels que $x \leqslant z < y$,

(3) « $]x, y]$ » l'ensemble des réels z tels que $x < z \leqslant y$,

(4) « $]x, y[$ » l'ensemble des réels z tels que $x < z < y$.

Si x est un nombre réel, alors on va noter :

(5) « $[x, \infty[$ » l'ensemble des réels y tels que $x \leqslant y$,

(6) « $]x, \infty[$ » l'ensemble des réels y tels que $x < y$,

(7) « $]-\infty, x]$ » l'ensemble des réels y tels que $y \leqslant x$,

(8) « $]-\infty, x[$ » l'ensemble des réels y tels que $y < x$.

On va aussi se servir de la notation suivante :

(9) « $]-\infty, \infty[$ » dénote l'ensemble des réel : $]-\infty, \infty[\overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R}$.

Théorème. *Soit I un ensemble non vide de nombres réels tel que pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $x < y < z$ et $x, z \in I$, on a que $y \in I$.*

(1) *Si I est minoré et majoré par des nombres réels, alors I coïncide avec un des quatre ensembles suivants* : $[\inf I, \sup I]$, $[\inf I, \sup I[$, $]\inf I, \sup I]$, $]\inf I, \sup I[$.

(2) *Si I est minoré par un nombre réel mais n'est majoré par aucun nombre réel, alors I coïncide avec un des deux ensembles suivants* : $[\inf I, \infty[$, $]\inf I, \infty[$.

(3) *Si I est majoré par un nombre réel mais n'est minoré par aucun nombre réel, alors I coïncide avec un des deux ensembles suivants* : $]-\infty, \sup I]$, $]-\infty, \sup I[$.

(4) *Si I n'est minoré, ni majoré, par aucun nombre réel, alors $I = \mathbf{R} =]-\infty, \infty[$.*

Exercice. Prouver ce théorème.

Définition. Les ensembles non vides de réels qui sont d'une des formes $[x, y]$, $[x, y[$, $]x, y]$, $]x, y[$, $[x, \infty[$, $]x, \infty[$, $]-\infty, x]$, $]-\infty, x[$ ou $]-\infty, \infty[$ sont dits *intervalles*. Les intervalles des formes $[x, y]$, $[x, y[$ et $[x, \infty[$ sont dits *fermés à gauche*. Les intervalles des formes $]x, y]$, $]x, y[$ et $]x, \infty[$ sont dits *ouverts à gauche*. Les intervalles des formes $[x, y]$, $]x, y]$ et $]-\infty, x]$ sont dits *fermés à droite*. Les intervalles des formes $[x, y[$, $]x, y[$ et $]-\infty, x[$ sont dits *ouverts à droite*.

I.6. Addition et soustraction

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors leur *somme*, notée « $x + y$ », est définie par les deux conditions :

(1) pour tous nombres rationnels p et q tels que $p \leqslant x$ et $q \leqslant y$, on a que $p+q \leqslant x+y$,

(2) pour tous nombres rationnels p et q tels que $x \leqslant p$ et $y \leqslant q$, on a que $x+y \leqslant p+q$.

Exercice. Vérifier si cette définition est correcte.

Ainsi on a défini l'opération d'*addition* $(+)$ qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur somme.

Exercice. Soit A l'ensemble des nombres rationnels q tels que $q^2 < 2$. Posons $x = \inf A$ et $y = \sup A$. Montrer que $x + y = 0$.

Les trois identités suivantes satisfaites par l'opération d'addition de nombres réels sont les mêmes que pour l'opération d'addition de nombres entiers :

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(2) $x + 0 = x = 0 + x$,

(3) $y + x = x + y$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. *Soit x un nombre réel arbitraire. Soit A l'ensemble des nombres rationnels r tels que $x + r \leqslant 0$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels r tels que $x + r > 0$. Alors*

(1) *pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p < q$,*

(2) *tout nombre rationnel appartient soit à A, soit à B,*

(3) *A et B ne sont pas vides.*

Soit y le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$. Alors $x + y = 0 = y + x$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y, il existe un unique nombre réel z tel que $z + y = x$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Deux nombres réels x et y sont dits *opposés* l'un de l'autre si et seulement si $x + y = 0$.

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors l'unique nombre réel z tel que $z + x = y$ est dit la *différence* de y et x et est noté « $y - x$ ».

Autrement dit,

$$y - x = z \quad \Leftrightarrow \quad y = z + x.$$

Ainsi on a défini l'opération de *soustraction* $(-)$ qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur différence.

L'opération de soustraction $(-)$ de nombres réels peut aussi être définie par les deux identités suivantes, à la condition que l'opération d'addition $(+)$ est déjà définie :

(1) $(x + y) - y = x$, (2) $(x - y) + y = x$.

En fait, n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres réels.

Exercice. Montrer que n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération de soustraction de nombres réels.

Les identités suivantes satisfaites pour tous x, y, z réels sont les même que pour les nombres entiers :

(1) $x + (y - z) = (x + y) - z$,

(2) $x - (y + z) = (x - z) - y$,

(3) $x - (y - z) = (x + z) - y$,

(4) $(x - y) + (y - z) = x - z$,

(5) $(x + z) - (y + z) = x - y$,

(6) $(x - y) + z = (x + z) - y$,

(7) $(x - y) - z = (x - z) - y$,

(8) $x - (x - y) = y$,

(9) $x - 0 = x$,

(10) $x - x = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Notation. L'expression « $+x$ » veut dire $0 + x$ $(= x)$. L'expression « $-x$ » veut dire $0 - x$.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z, si $x < y$, alors $x + z < y + z$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z, les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x + z < y + z, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x + z \leqslant y + z.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z, si $x < y$, alors $z - x > z - y$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z, les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad z - x > z - y, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad z - x \geqslant z - y.$$

I.7. Multiplication et division

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre réel, alors le *produit* de x et n, noté « $x \times n$ », « $x \cdot n$ », ou « xn », est défini par la règle :

$$xn \overset{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}.$$

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre réel, et $a = n - m$, alors le *produit* de x et a, noté « $x \times a$ », « $x \cdot a$ », ou « xa », est défini par la règle :

$$x(n - m) \overset{\text{déf}}{=} 0 \underbrace{+ x + x + \cdots + x}_{n \text{ fois}} \underbrace{- x - x - \cdots - x}_{m \text{ fois}} = xn - xm.$$

Lemme. *Pour tout nombre réel x et pour tout entier a non nul, il existe un unique nombre réel y tel que $ya = x$.*

Exercice. Prouver ce lemme.

Définition. Si a est un entier non nul et x est un nombre réel, alors l'unique nombre réel y tel que $ya = x$ est dit le *quotient* de x par a et est noté « $x \div a$ », ou « $x : a$ », ou « x/a », ou « $a\backslash x$ », ou « $\dfrac{x}{a}$ ».

Définition. Si a est un entier non nul, b est un entier, x est un nombre réel, et $q = b/a$, alors le *produit* de x et q, noté « $x \times q$ », « $x \cdot q$ », ou « xq », est défini par la règle :

$$x \cdot \frac{b}{a} \overset{\text{déf}}{=} \frac{xb}{a} = \frac{x}{a} \cdot b.$$

Définition. Si x et y sont deux nombres réels, alors leur *produit*, noté « $x \times y$ », « $x \cdot y$ », ou « xy », est défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que y est entre p et q, on a que xy est entre xp et xq (au sens large).

Exercice. Vérifier si ces définitions sont toutes correctes.

Ainsi on a défini l'opération de *multiplication* $(\cdot)$ (aussi notée « $(\times)$ ») qui à deux n'importe quels nombres réels associe leur produit.

Remarque. Le produit de nombres réels *strictement positifs* x et y pourrait être défini par les conditions :

(1) pour tous nombres rationnels p et q tels que $0 < p \leqslant x$ et $0 < q \leqslant y$, on a que $pq \leqslant xy$,

(2) pour tous nombres rationnels p et q tels que $x \leqslant p$ et $y \leqslant q$, on a que $xy \leqslant pq$.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y, $yx = xy$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Les identités suivantes sont satisfaites :

(1) $x(yz) = (xy)z$,

(2) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(3) $yx = xy$,

(4) $x(y + z) = xy + xz$,

(5) $x(y - z) = xy - xz$,

(6) $x \cdot 0 = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Lemme. *Soit x un nombre réel strictement positif. Soit A l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs r tels que $xr \leqslant 1$. Soit B l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs r tels que $xr > 1$. Alors*

(1) *pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a que $p < q$,*

(2) *tout nombre rationnel strictement positif appartient soit à A, soit à B,*

(3) *A et B ne sont pas vides.*

Soit y le nombre réel tel que pour tous $p \in A$ et $q \in B$, on a $p \leqslant y \leqslant q$. Alors $xy = 1 = yx$.

Exercice. Prouver ce lemme.

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y avec $y \neq 0$, il existe un unique nombre réel z tel que $zy = x$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Si x et y sont nombres réels tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $xy \neq 0$.*

Définition. Deux nombres réels x et y sont dits *réciproques* l'un de l'autre si et seulement si $xy = 1$.

Définition. Si x est un nombre réel non nul et y est un nombre réel, alors l'unique nombre réel z tel que $zx = y$ est dit le *quotient* de y par x et est noté « $y \div x$ », ou « $y : x$ », ou « y/x », ou « $x\backslash y$ », ou « $\dfrac{y}{x}$ ».

Autrement dit,

$$\frac{y}{x} = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = zx \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Ainsi on a défini l'opération de *division* (/) qui à n'importe quels deux nombres réels, dont le deuxième n'est pas zéro, associe leur quotient.

L'opération de division (/) de réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes, à la condition que l'opération de multiplication ($\cdot$) est déjà définie :

(1) $(xy)/y = x$ si $y \neq 0$,

(2) $(x/y)y = x$ si $y \neq 0$,

(3) la valeur de « x/y » n'est pas définie si $y = 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Montrer que la deuxième propriété résulte de la première, et que la première résulte de la deuxième.

Voici quelques identités remarquables satisfaites par l'opération de division des nombres réels *à la condition que les valeurs de tous les quotients soient définies* (que les dénominateurs ne soient pas 0) :

(1) $x(y/z) = (xy)/z$,

(2) $x/(yz) = (x/z)/y$,

(3) $x/(y/z) = (xz)/y$,

(4) $(x/y)(y/z) = x/z$,

(5) $(xz)/(yz) = x/y$,

(6) $(x/y)z = (xz)/y$,

(7) $(x/y)/z = (x/z)/y$,

(8) $x/(x/y) = y$,

(9) $x/1 = x$,

(10) $x/x = 1$,

(11) $(x+y)/z = x/z+y/z$,

(12) $(x-y)/z = x/z-y/z$,

(13) $0/x = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels x, y, z,*

(1) *si $x < y$ et $z > 0$, alors $xz < yz$,*

(2) *si $x < y$ et $z < 0$, alors $xz > yz$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x, y, z,*

(1) *si $z > 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz < yz, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad xz \leqslant yz,$$

(2) *si $z < 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad xz > yz, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad xz \geqslant yz.$$

Corollaire. *Pour tous nombres réels x et y,*

(1) *si $x > 0$ et $y > 0$, alors $xy > 0$,*

(2) *si $x > 0$ et $y < 0$, alors $xy < 0$,*

(3) *si $x < 0$ et $y > 0$, alors $xy < 0$,*

(4) *si $x < 0$ et $y < 0$, alors $xy > 0$.*

2025-01-23T14:27

Corollaire. *Pour tout nombre réel* x, $xx \geqslant 0$.

Proposition. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x, y, z, *si* $x < y$, *alors* $z/x > z/y$.

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x, y, z, *les équivalences suivantes sont satisfaites* :

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad z/x > z/y, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad z/x \geqslant z/y.$$

I.8. Approche axiomatique

Au lieu de d'abord *construire* les nombres réels à partir des nombres rationnels (ou à partir d'autres objets mathématiques) et puis établir toutes leurs propriétés, on peut se contenter d'admettre que l'ensemble des nombres réels existe et est muni de quelques opérations et relations qui satisfont quelques propriétés de base. Telles propriétés de base qu'on admet sans demonstration sont dites *axiomes*.

La structure de l'ensemble des nombres réels muni de ses opérations et de ses relations peut être décrite par les 17 axiomes présentés ci-dessous.

La série suivante de 10 axiomes affirme que l'ensemble des nombres réels, muni de ses opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, ainsi que des éléments distingués 0 et 1, est ce qui s'appelle un *corps commutatif* :

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(2) $x + 0 = x = 0 + x$,

(3) $x + (y - x) = y = (y - x) + x$,

(4) $y + x = x + y$,

(5) $x(yz) = (xy)z$,

(6) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(7) $x(y/x) = y = (y/x)x$ si $x \neq 0$,

(8) $yx = xy$,

(9) $x(y + z) = xy + xz$,

(10) $1 \neq 0$.

Les axiomes dans cette liste sont présentées sous forme abrégée. Par exemple, l'axiome écrit comme « $yx = xy$ » veut dire : « pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a : $yx = xy$ ». Dans ce qui suit, on va continuer à utiliser une telle écriture abrégée.

La série suivante de 4 axiomes affirme que l'ensemble des nombres réels, muni de la relation ($\leqslant$), est ce qui s'appelle un *ensemble totalement ordonné* :

(11) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$,

(12) $x \leqslant x$,

(13) si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$,

(14) $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

En ajoutant aux 14 axiomes précédents les 2 suivants, on affirme que les nombres réels forment ce qui s'appelle un *corps ordonné* :

(15) si $x \leqslant y$, alors $x + z \leqslant y + z$, (16) si $0 \leqslant x$ et $0 \leqslant y$, alors $0 \leqslant xy$.

Les 16 axiomes précédents sont satisfaits par le corps ordonné des nombres réels, mais aussi par le corps ordonné des nombres rationnels et par beaucoup d'autres. Le dernier axiome distingue le corps ordonné des nombres réels :

(17) tout ensemble non vide de nombres réels majoré par un nombre réel admet le supremum réel (le plus petit majorant réel).

Comme on pourrais l'imaginer, celui-ci peut être remplacé par le suivant :

(17) tout ensemble non vide de nombres réels minoré par un nombre réel admet l'infimum réel (le plus grand minorant réel).

(Les deux sont équivalents tant qu'on admet les 16 précédents.)

I.9. Valeur absolue

Définition. La *valeur absolue* d'un nombre réel x, notée « $|x|$ », est définie ainsi :

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} +x & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

En utilisant la notation avec « max », on peut définir la valeur absolue d'un nombre réel x par la formule :

$$|x| = \max(x, -x).$$

Une autre façon (équivalente) de définir la valeur absolue d'un nombre réel x est par l'équivalence suivante :

$$|x| = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xx = yy \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Exercice. Montrer que la valeur absolue peut être définie par cette équivalence.

Lemme. *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|x| \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leqslant x \leqslant y \qquad \textit{et} \qquad |x| < y \quad \Leftrightarrow \quad -y < x < y.$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
|x| \leqslant y \quad &\Leftrightarrow \quad \max(x,-x) \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant y \\ -x \leqslant y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant y \\ -y \leqslant x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -y \leqslant x \leqslant y, \\
|x| < y \quad &\Leftrightarrow \quad \max(x,-x) < y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < y \\ -x < y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < y \\ -y < x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -y < x < y.
\end{aligned}
$$

□

Proposition (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration. Comme $|x| \leqslant |x|$ et $|y| \leqslant |y|$, d'après le lemme précédent on a :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

D'où,

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|,$$

et donc, encore d'après le lemme précédent,

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

□

L'origine du nom « *inégalité triangulaire* » sera peut-être plus claire si l'on traduit cette inégalité sous la forme suivante :

$$|c-a| \leqslant |b-a| + |c-b|.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels x et y,*

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels x et $y \neq 0$,*

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Exercice. Prouver ce corollaire.

I.10. Exponentiation, puissances, racines

Définition. Si n est un nombre naturel et x est un nombre réel, alors x *puissance* n, ou la n-ième *puissance* de x, ou x *élevé à la* n*-ième puissance*, est le nombre noté « x^n » et défini par la règle :

$$x^n \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \underbrace{\cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}}.$$

Par exemple : $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = xx$, $x^3 = xxx$.

Remarque. Il n'y a pas de consensus général sur le sens de « 0^0 ». D'après la définition donnée ici, $0^0 = 1$. Cependant, parfois on décide que l'expression « 0^0 » n'ait pas de sens ou que sa valeur ne soit pas définie (comme pour « $0/0$ »).

Définition. Si m et n sont deux nombres naturels, x est un nombre réel non nul, et $a = n - m$, alors x *puissance* a est le nombre noté « x^a » et défini par la règle :

$$x^{n-m} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 \underbrace{\cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ fois}} \underbrace{/x/x/ \cdots /x}_{m \text{ fois}} = \frac{x^n}{x^m}.$$

Voici quelques identités remarquables pour a et b entiers et pour x et y réels *non nuls* :

(1) $x^{ab} = (x^a)^b$,

(2) $x^1 = x$,

(3) $x^{a+b} = x^a x^b$,

(4) $x^{a-b} = x^a / x^b$,

(5) $x^0 = 1$,

(6) $(xy)^a = x^a y^a$,

(7) $(x/y)^a = x^a / y^a$,

(8) $1^a = 1$.

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, une *racine* n*-ième* d'un nombre x est un nombre y tel que $y^n = x$. Une racine deuxième est aussi dite *racine carrée*, et une racine troisième est aussi dite *racine cubique*.

Proposition. (1) *Si n est un nombre naturel non nul, alors tout nombre réel positif admet une unique racine n-ième positive.*

(2) *Si n est un nombre naturel impair, alors tout nombre réel admet une unique racine n-ième réelle.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Soient n un nombre naturel impair et x un nombre réel. Alors ***la*** racine n-ième de x est l'unique racine n-ième réelle de x.

Définition. Soient n un nombre naturel non nul et x un nombre réel positif ($x \geqslant 0$). Alors ***la*** racine n-ième de x est l'unique racine n-ième positive de x. Si x est strictement positif ($x > 0$), alors la racine n-ième positive de x est aussi dite la racine n-ième *principale* de x.

Notation. Si n est un nombre naturel non nul et x est un nombre réel qui admet une racine n-ième réelle, alors on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n-ième réelle de x si n et impair, et on note « $\sqrt[n]{x}$ » ou « $\sqrt[n]{x}$ » l'unique racine n-ième positive de x si n est pair. Si n est pair et x est strictement négatif, alors la valeur de l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'est pas définie (l'expression « $\sqrt[n]{x}$ » n'a pas de sens). Dans le cas où $n = 2$, on utilise aussi la notation « $\sqrt{x}$ » au lieu de « $\sqrt[2]{x}$ ».

Ainsi, si n est un nombre naturel *impair*, alors pour tous x et y réels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^n,$$

et si n est un nombre naturel non nul *pair*, alors pour tous x et y réels,

$$\sqrt[n]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y^n \\ y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Pour n naturel *impair*, l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les deux identités suivantes :

(1) $\sqrt[n]{x^n} = x$, (2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

En fait, n'importe quelle de ces deux identités suffit toute seule pour définir l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels (pour n impair).

Pour n naturel non nul *pair*, l'opération $\sqrt[n]{\ }$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

(1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ si $x \geqslant 0$,

(2) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ si $x \geqslant 0$,

(3) la valeur de « $\sqrt[n]{x}$ » n'est définie que si $x \geqslant 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Voici quelques identités remarquables pour m et n naturels non nuls, a entier, et x et y réels, qui sont satisfaites *à la condition que les valeurs des deux membres* (des parties gauche et droite) *soient définies* :

(1) $\sqrt[n]{x^a} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^a$,

(2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$,

(3) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$,

(4) $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}$,

(5) $\sqrt[n]{1} = 1$, $\sqrt[n]{0} = 0$.

Exercice. Démontrer ces identités.

Observons que $\sqrt{(-1)(-1)} = 1$, alors que la valeur de l'expression « $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ » n'est pas définie (car déjà l'expression « $\sqrt{-1}$ » n'a pas de valeur définie).

2025-01-23T14:27

Définition. Si n est un nombre naturel non nul, a est un entier, x est un nombre réel strictement positif, et $q = \dfrac{a}{n}$, alors x *puissance* q est le nombre noté « x^q » et défini par la règle :

$$x^{a/n} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt[n]{x^a} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^a.$$

Définition. Si x est un nombre réel strictement positif et y est un nombre réel arbitraire, alors x *puissance* y est le nombre réel noté « x^y » et défini par la condition :

> pour tous nombres rationnels p et q tels que y est entre p et q, on a que x^y est entre x^p et x^q (au sens large).

Exercice. Vérifier si toutes les définitions données sont correctes et cohérentes entre elles.

Voici quelques identités remarquables pour x et y réels *strictement positifs* et pour s et t réels :

(1) $x^{st} = (x^s)^t$,

(2) $x^1 = x$,

(3) $x^{s+t} = x^s x^t$,

(4) $x^{s-t} = x^s/x^t$,

(5) $x^0 = 1$,

(6) $(xy)^t = x^t y^t$,

(7) $(x/y)^t = x^t/y^t$,

(8) $1^t = 1$.

Exercice. Calculer $\sqrt{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}}$, $\left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{3^{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}$.

Dans une expression de la forme « x^y », la valeur de « x » est dit la *base*, et la valeur de « y » est dit l'*exposant*.

Définition. Le nombre x^y est aussi dit x *exposant* y, ainsi que l'*exponentielle* de y en *base* x.

Rapport aux relations d'ordre usuelles

Proposition. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x *et* y *et pout tout nombre réel* t*,*

(1) *si* $x < y$ *et* $t > 0$*, alors* $x^t < y^t$*,*

(2) *si* $x < y$ *et* $t < 0$*, alors* $x^t > y^t$*.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels* strictement positifs x *et* y *et pout tout nombre réel* t*,*

(1) *si* $t > 0$*, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^t < y^t, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^t \leqslant y^t,$$

(2) *si $t < 0$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^t > y^t, \qquad\qquad x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x^t \geqslant y^t.$$

Proposition. *Pour tous nombres réels s et t et pout tout nombre réel* strictement positif x,

(1) *si $s < t$ et $x > 1$, alors $x^s < x^t$,* (2) *si $s < t$ et $x < 1$, alors $x^s > x^t$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Corollaire. *Pour tous nombres réels s et t et pout tout nombre réel* strictement positif x,

(1) *si $x > 1$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$s < t \quad \Leftrightarrow \quad x^s < x^t, \qquad\qquad s \leqslant t \quad \Leftrightarrow \quad x^s \leqslant x^t,$$

(2) *si $x < 1$, alors les équivalences suivantes sont satisfaites :*

$$s < t \quad \Leftrightarrow \quad x^s > x^t, \qquad\qquad s \leqslant t \quad \Leftrightarrow \quad x^s \leqslant x^t.$$

I.11. Logarithmes

Proposition. *Si x et y sont nombres réels* strictement positifs *et $x \neq 1$, alors il existe un unique nombre réel z tel que $x^z = y$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Définition. Si $x > 0$, $y > 0$ et $x \neq 1$, alors l'unique nombre réel z tel que $x^z = y$ est dit le *logarithme* de y en *base* x et est noté « $\log_x y$ ». Dans le cas où $x = 1$, ainsi que dans le cas où $y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, la valeur de « $\log_x y$ » n'est pas définie.

Cette définition de $\log_x$ (pour x strictement positif et différent de 1) peut être exprimée par l'équivalence suivante :

$$\log_x y = z \quad \Leftrightarrow \quad y = x^z.$$

Pour x strictement positif et différent de 1, l'opération $\log_x$ sur les nombres réels peut aussi être définie par les trois propriétés suivantes :

(1) $\log_x x^y = y$,

(2) $x^{\log_x y} = y$ si $y > 0$,

(3) la valeur de « $\log_x y$ » n'est définie que si $y > 0$.

En fait, la deuxième propriété résulte de la première, et la première résulte de la deuxième, donc il suffit de garder une seule parmi les deux.

Exercice. Calculer $\log_8 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\log_3 \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Voici quelques identités remarquables satisfaites pour tous réels x, y, z, w, t, tels que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $w > 0$, $x \neq 1$, $y \neq 1$:

(1) $(\log_x y)(\log_y z) = \log_x z$,

(2) $(\log_x y)(\log_y x) = 1$,

(3) $\log_x x = 1$,

(4) $w^{\log_x z} = z^{\log_x w}$,

(5) $\log_x zw = \log_x z + \log_x w$,

(6) $\log_x \dfrac{z}{w} = \log_x z - \log_x w$,

(7) $\log_x 1 = 0$,

(8) $\log_x z^t = (\log_x z)t$.

Exercice. Démontrer ces identités en admettant les propriétés de l'exponentiation présentées précédemment.

I.12. L'ensemble des nombres réels, est-il dénombrable ?

Serait-il juste de dire qu'il y a « plus » des nombres entiers relatifs que des nombres entiers naturels ? Pas vraiment, car on peut *énumérer* les nombres entiers aussi bien que les nombres naturels. En effet, voici une liste (infinie) de l'ensemble des nombres naturels :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \dots,$$

et en voici une de l'ensemble des entiers relatifs :

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \dots .$$

De ce point de vue, il y a *autant* de nombres entiers que de nombres naturels. Les uns comme les autres peuvent être *énumérés* (rangés dans une liste infinie).

Définition. Un ensemble infini est dit *dénombrable* si et seulement si il peut être énuméré.

Les ensembles $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont donc dénombrables. L'ensemble de tous les mots en deux lettres « A » et « B » est aussi dénombrable :

$$\text{A},\ \text{B},\ \text{AA},\ \text{AB},\ \text{BA},\ \text{BB},\ \text{AAA},\ \text{AAB},\ \dots .$$

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbf{R}$. Est-il dénombrable ?

Question. Peut-on énumérer les nombres réels ?

Supposons que l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels a été énuméré, et qu'on a obtenu ainsi une liste de tous les nombres réels :

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dots .$$

(On a choisi ici d'indexer les nombres réels avec les nombres naturels, zéro inclus, mais on pourrais aussi bien commencer avec l'indice un : $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ \dots$.)

Considérons alors deux listes de nombres rationnels (ou même réels, peu importe)

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots \quad \text{et} \quad b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots$$

telles que pour tout indice n,

(1) $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, (2) $t_n \notin [a_n, b_n]$.

Avant de procéder, assurions-nous que des telles listes $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ et $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots$ existent. En voici une construction :

(1) Si $t_0 \geqslant 0$, posons

$$a_0 = -2, \qquad b_0 = -1,$$

et si $t_0 < 0$, posons

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 2.$$

(2) Pour tout n à partir de 1, si $t_n \geqslant \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, posons

$$a_n = a_{n-1}, \qquad b_n = \frac{2a_{n-1} + b_{n-1}}{3},$$

et sinon, posons

$$a_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}, \qquad b_n = b_{n-1}.$$

Il est facile de vérifier que les listes ainsi obtenues satisfont les deux propriétés requises.

Soient A l'ensemble des éléments de la liste $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,$ et B l'ensemble des éléments de la liste $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \dots$. Alors A et B sont non vides, et pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a que $a < b$. Donc, d'après les propriétés de l'ensemble des nombres réels déjà établies, il existe un nombre réel x tel que pour tous $a \in A$ et $b \in B$, on a que $a \leqslant x \leqslant b$. Soit n l'indice de x dans la liste $t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots$. Alors, $x = t_n \notin [a_n, b_n]$. Or, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. On a obtenu une contradiction.

On conclut que l'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Question. Peut-on énumérer les nombres rationnels ?

II. Généralités sur les fonction

II.1. Notion de fonction

Une *fonction* est une association bien déterminée des objet (mathématiques) à des objets (mathématiques) qui à tout « objet-*argument* » a

- soit associe un unique « objet-*valeur* » b,
- soit n'associe rien du tout.

Dans le second cas on dit que la valeur de cette fonction n'est pas *définie* pour cet argument a, ou que cet argument n'est pas dans le *domaine de définition* de cette fonction.

Si f est une fonction et a et b sont deux objets (qui peuvent aussi être fonctions), alors l'écriture « $a \overset{f}{\mapsto} b$ » ou « $f\colon a \mapsto b$ » signifie que f associe b à a.

La valeur qu'une fonction f associe à un argument a est notée « fa » ou « $f(a)$ » (pour souligner la différence des rôles de f et de a), ou « $(f)a$ » (pour souligner la différence d'une autre manière). Ainsi on peut écrire « $fa = b$ » au lieu de « $f\colon a \mapsto b$ ».

La relation « $a \overset{f}{\mapsto} b$ » peut aussi être exprimée en disant que

- « b est l'*image* de a par f », ou que
- « a est un *antécédent* » (ou « une *pré-image* ») « de b par f ».

Exemples.

(1) Une fonction non mathématique : la fonction f telle que pour toute salle de cours S du campus Luminy de l'Université d'Aix-Marseille, fS soit la capacité (le nombre de places prévu) de S.

(2) Une fonction mathématique : la fonction g telle que pour tout entier strictement positif n, gn soit le nombre des différents diviseurs premiers de n. Ainsi, par exemple, $g(2) = 1$, $g(12) = 2$, et $g(\pi)$ n'est pas définie.

(3) Une autre fonction mathématique : la fonction h qui à tout nombre réel x associe un de deux nombres 0 ou 1, telle que $hx = 1$ si x est rationnel, et $hx = 0$ si x est irrationnel (n'est pas rationnel). Ainsi, par exemple, $h(0) = 1$, $h(2/3) = 1$, $h(\pi) = 0$.

(4) Encore une fonction (mathématique) : la fonction k qui à tout nombre réel x associe la fonction qui à tout nombre réel y associe x. Ainsi, par exemple, $(k(1))(2) = 1$, $(k(2))(1) = 2$. En général, $kxy = x$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Si f est une fonction et que $g = f$, alors évidemment g est aussi une fonction qui est définie pour les mêmes arguments que f, et si a est tel que fa et ga sont définies, alors $ga = fa$.

Il est cependant nécessaire de préciser que la réciproque est vraie aussi. C'est-à-dire, si f et g sont deux fonction qui sont définies pour les mêmes arguments, et que pour chaque argument a pour lequel elles sont définies, $fa = ga$, alors $f = g$. Cette condition est une partie formelle de notre description informelle de la notion de fonction.[1]

Parfois au lieu de « fonction », on dit « *application* ». Certaines fonctions spéciales s'appellent « *opérateurs* », « *opérations* », « *transformations* ».

II.2. Domaine/ensemble de définition, ensemble image

Si f est une fonction, son *domaine* ou *ensemble de définition* est l'ensemble de tous les objets x tels que la valeur fx est définie. L'*ensemble image* de f est l'ensemble de toutes les valeurs de f, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les objets fx.

L'ensemble de définition d'une fonction f sera parfois désigné D_f. Ainsi,

$$D_f \overset{\text{déf}}{=} \{\, x \mid fx \text{ est définie} \,\}.$$

Par contre on ne va pas utiliser de notation spéciale pour l'ensemble image de f :

$$\{\, fx \mid fx \text{ est définie} \,\}.$$

Notation. On écrit « $f\colon A \to B$ » pour affirmer que l'ensemble de définition de f est A et que l'ensemble image de f est *inclus* dans B. On écrit aussi : « $A \xrightarrow{f} B$ ».

Exemples.

(1) Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $fx = x^2$. Alors l'ensemble de définition de f est $\mathbf{R}$ et l'ensemble image de f est $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$.

(2) Soit la fonction g définie par $gx = \sqrt{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. Alors l'ensemble de définition de g est $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$ et l'ensemble image de g est $\mathbf{R}_+ = [0, \infty[$.

[1] Parfois on utilise une notion de fonction légèrement plus « fine », où l'*ensemble d'arrivée* fait partie de la notion de fonction, et ainsi la fonction cosinus $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et la fonction cosinus $\mathbf{R} \to [-1, 1]$ sont considérées comme deux fonctions différentes. On ne va pas utiliser cette approche dans ce cours. (Sinon, on devrait préciser l'ensemble d'arrivée chaque fois qu'on définit une fonction, et on devrait décider si l'ensemble d'arrivée de sin et de cos est $\mathbf{R}$ ou $[-1, 1]$, ou autre chose.)
En plus, parfois on considère que l'*ensemble de départ* fait partie de la notion de fonction, et que celui-ci n'est pas toujours réduit au domaine de définition. Par exemple, on peut dire que l'ensemble de départ d'une fonction f définie par $fx = 1/x$ est $\mathbf{R}$, alors que son domain de définition est $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dans ce cours on va identifier l'ensemble de départ avec le domaine de définition.

II.3. Fonctions constantes, fonctions identités

Définition. Une fonction f est dite *constante* sur une partie A de son domaine de définition si et seulement si pour tous $x, y \in A$, $fx = fy$. Une fonction est dite *constante* si et seulement si elle est constante sur son domaine de définition.

Définition. Si A est un ensemble, la *fonction identité* de A est la fonction $\mathrm{id}_A \colon A \to A$ définie par la formule :

$$\mathrm{id}_A\, x \overset{\text{déf}}{=} x \quad \text{pour tout} \quad x \in A.$$

II.4. Composition de fonctions

Définition. Soient f et g deux fonctions. La *fonction composée* $g \circ f$ est définie par la formule :

$$(g \circ f)x \overset{\text{déf}}{=} g(fx).$$

Si $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$, alors $g \circ f \colon A \to C$.
Voici deux propriétés remarquables :

(1) pour toutes fonctions f, g, h,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

(2) pour toute fonction $f \colon A \to B$,

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

II.5. Restriction et prolongement de fonctions

Définition. Soient f et g deux fonctions avec les domaines de définition D_f pour f et D_g pour g. La fonction g est dite un *prolongement* de la fonction f si et seulement si

(1) $D_f \subset D_g$, et

(2) $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Dans ce cas on dit aussi que g est un *prolongement de f à D_g* (ou *sur* D_g), ou encore que g *prolonge f à D_g* (ou *sur* D_g). La fonction f est dite une *restriction* de g si et seulement si g est un prolongement de f. Dans ce cas on dit aussi que g est la *restriction de f à D_g* (ou *sur* D_g).

Notation. Pour noter que g est un prolongement de f (et que f est une restriction de g) on peut écrire « $f \subset g$ ».

Notation. La restriction de $f\colon A \to B$ à $C \subset A$ est notée « $f|_C$ ».

Une autre façon de définir la restriction de $f\colon A \to B$ à $C \subset A$ est par la formule $f|_C \overset{\text{déf}}{=} f \circ \mathrm{id}_C$.

Exemple. Soient $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ et $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par les formules :

$$fx = (\sqrt{x})^2 \quad \text{et} \quad gx = \sqrt{x^2}.$$

Alors g est un prolongement de f à $\mathbf{R}$, et f est la restriction de g à $\mathbf{R}_+$.

II.6. Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition. Une fonction f est dite *injective* sur une partie A de son domaine de définition si et seulement si pour tous $x, y \in A$, si $fx = fy$, alors $x = y$. Une fonction est dit une *injection* si et seulement si elle est injective sur son domaine de définition.

Définition. Une fonction f est dite *surjective* sur un ensemble B si et seulement si pour tout $x \in B$ il existe y (dans le domaine de définition de f) tel que $fx = y$. Une fonction est dite une *surjection* sur B si et seulement si B est son ensemble image.

Proposition. *Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ deux fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Alors f est injective sur A et g est surjective sur A.*

Exercice. Prover la proposition.

Définition. Une fonction $f\colon A \to B$ est dite *bijective*, ou une *bijection*, entre A et B si et seulement si f est injective sur A et surjective sur B.

Autrement dit, $f\colon A \to B$ est une bijection entre A et B si et seulement si tout élément de B possède un unique antécédent (dans A) par rapport à f.

II.7. La fonction réciproque (ou inverse)

Définition. Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ deux fonctions.

(1) La fonction g est dite *inverse à gauche* de f si et seulement si $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

(2) La fonction g est dite *inverse à droite* de f si et seulement si $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Ainsi, g est inverse à gauche de f si et seulement si f est inverse à droite de g.

Exemple. Soient $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ et $g\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ les fonctions définies par les formules :

$$fx = x^2 \quad \text{et} \quad gx = \sqrt{x}.$$

Alors g est inverse à droite de f (et f est inverse à gauche de g), mais f n'admet aucune inverse à gauche. Cependant, g admet une inverse à droite.

Exercice. Montrer que la fonctions $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$, n'a pas d'inverse à gauche.

Deux fonctions f et g sont dans la relation « g est inverse à gauche de f et f est inverse à droite de g » si et seulement si l'implication suivante est satisfaite pour tous x et y :

$$fx = y \;\Rightarrow\; x = gy.$$

Proposition. *Soient $f, h\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ trois fonctions telles que*

(1) *f est inverse de g à droite ($g \circ f = \mathrm{id}_A$) et*

(2) *h est inverse de g à gauche ($h \circ g = \mathrm{id}_B$).*

Alors $f = h$.

Démonstration. $f = \mathrm{id}_B \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ \mathrm{id}_A = h.$ □

Définition. Deux fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ sont dites *réciproques*, ou *inverses*, l'une de l'autre si et seulement si $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Une fonction qui admet une réciproque est dite *inversible*.

Ainsi, deux fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre si et seulement si l'équivalence suivante est satisfaite pour tous x et y :

$$fx = y \;\Leftrightarrow\; x = gy.$$

D'après une proposition précédente, si une fonction f admet une fonction réciproque, elle en admet une seule.

Notation. La fonction réciproque d'une fonction inversible f est notée « f^{-1} ».

Si f est inversible, alors le domaine de définition de f^{-1} est l'ensemble image de f, et l'ensemble image de f^{-1} est le domaine de définition de f.

Si $f\colon A \to B$ est une bijection entre A et B, et que $g\colon B \to A$ est la fonction qui à chaque élément de B associe son unique antécédent dans A par rapport à f, alors f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Proposition. *Une fonction est inversible si et seulement si elle est injective (autrement dit, si et seulement si elle est bijective entre son domaine de définition et son ensemble image).*

Remarque. Pour les fonctions réelles, la notation « f^{-1} » pour la fonction réciproque de f peut conduire à une confusion[2] entre f^{-1} et $1/f$, où $1/f$ est définie par :

$$\frac{1}{f}x = \frac{1}{fx} = (fx)^{-1}.$$

Dans ce cours, on ne va jamais utiliser la notation « f^{-1} » pour $1/f$, qui est l'inverse de f « point par point ».

[2] L'exposant « -1 » dans la notation « f^{-1} » pour la fonction réciproque de f est un exposant par rapport à la composition ($\circ$), pas par rapport à la multiplication ($\times$), contrairement au cas des nombres, comme dans « $2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$ ».

III. Fonctions réelles d'une variable réelle

Une fonction est dite *réelle d'une variable réelle* si son domaine de définition et son ensemble image sont parties de $\mathbf{R}$.

III.1. Opérations « point par point »

Soient $f\colon A \to \mathbf{R}$, $g\colon B \to \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors on définit les fonctions αf, $f \pm g$, fg, et f/g par les formules suivantes :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Clairement, le domaine de définition de $f+g$, de $f-g$, et de fg est $A \cap B$. Le domaine de définition de f/g est $A \cap \{\, x \in B \mid g(x) \neq 0 \,\}$.

III.2. Extrema

Définition. Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, $D \subset \mathbf{R}$.

(1) On dit que f atteint en $a \in D$ son *maximum* (global) si et seulement si $f(a) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in D$; dans ce cas, on appelle la valeur $f(a)$ le *maximum* (global) de f et on le note $\max_D f$.

(2) On dit que f atteint en $a \in D$ son *minimum* (global) si et seulement si $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in D$; dans ce cas, on appelle la valeur $f(a)$ le *minimum* (global) de f et on le note $\min_D f$.

(3) On dit que f atteint en $a \in D$ un *maximum local* si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$.

(4) On dit que f atteint en $a \in D$ un *minimum local* si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$.

(5) On dit que f atteint en $a \in D$ un *maximum local strict* si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) > f(x)$ pour tout $x \in D$ tel que $0 < |x-a| < \delta$.

(6) On dit que f atteint en $a \in D$ un *minimum local strict* si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que $f(a) < f(x)$ pour tout $x \in D$ tel que $0 < |x-a| < \delta$.

Si une fonction atteint en a un maximum ou un minimum (local ou global), on dit qu'elle y atteint un *extremum* (local ou global).

III.3. Monotonies et variations

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, et $A \subset D$.

(1) La fonction f est dite *croissante* sur A si et seulement si pour tous $x, y \in A$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.

(2) La fonction f est dite *décroissante* sur A si et seulement si pour tous $x, y \in A$, si $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.

(3) La fonction f est dite *strictement croissante* sur A si et seulement si pour tous $x, y \in A$, si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$.

(4) La fonction f est dite *strictement décroissante* sur A si et seulement si pour tous $x, y \in A$, si $x < y$, alors $f(x) > f(y)$.

Une fonction croissante ou décroissante sur A est dite *monotone* sur A. Une fonction strictement croissante ou strictement décroissante sur A est dite *strictement monotone* sur A.

Remarque. Dans d'autres domaines de la mathématique, « monotone » peut vouloir dire « croissante ».

Proposition. *Si une fonction est strictement monotone sur un ensemble A, alors elle est injective sur A.*

III.4. Symétries

Définition. Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$.

(1) La fonction f est dite *paire* si et seulement si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = f(x).$$

(2) La fonction f est dite *impaire* si et seulement si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et

$$f(-x) = -f(x).$$

Exemples. Si $n \in \mathbf{Z}$ est pair, alors la fonction $x \mapsto x^n$ est paire. Si $n \in \mathbf{Z}$ est impair, alors la fonction $x \mapsto x^n$ est impaire.

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, et $T \in \mathbf{R}$, $T \neq 0$. La fonction f est dite *périodique de période T*, ou *T-périodique*, si et seulement si pour tout $x \in D$, $x \pm T \in D$ et

$$f(x - T) = f(x + T) = f(x).$$

Exemples. (1) Les fonctions cosinus et sinus (cos et sin) sont 2π-périodiques, et donc aussi 4π-périodiques, 6π-périodiques. La *plus petite période* de chacune est 2π. (Par ailleurs, $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.)

(2) La fonction tangente (tan) est 2π-périodique, π-périodique ($\tan x = \sin x / \cos x$).

(3) La fonction f définie par $f(x) = \cos(2x)\sin(2x)$ est π-périodiques, $\pi/2$-périodique.

III.5. Graphe

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.

Si P est un plan affine muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors le *graphe* de f dans P est l'ensemble des points de la forme $O + x\vec{u} + f(x)\vec{v}$ pour tous x dans le domaine de définition de f.

Si f est *continue* et son domaine de définition est un intervalle, alors le graphe de f dans P est une *courbe*.

IV. Continuité

IV.1. Notion de connexité

En étudiant et en appliquant la notion de *continuité* d'une fonction, il est parfois utile de disposer de la notion de *connexité* d'une partie de $\mathbf{R}$, ou d'une partie d'un plan, ou d'une partie d'un espace affine de dimension finie. Il est en particulier important de ne pas confondre la continuité d'une fonction avec la connexité de son graphe.

Si A est une partie d'un espace affine E de dimension finie, on peut distinguer les cas où A soit *connexe* ou A ne soit pas *connexe*.

Par exemple, un segment, un cercle, une boule, une sphère sont tous connexes. La partie d'un segment qui reste si on enlève un point à l'intérieur de ce segment n'est pas connexe, elle a deux *composantes connexes*.

Un rectangle est connexe. Si on prend un rectangle et enlève une diagonale, la partie qui reste ne sera pas connexe, elle aura deux *composantes connexes*. Si on prend un rectangle et enlève les deux diagonales, la partie qui reste aura quatre *composantes connexes*.

En général,

(1) toute composante connexe d'un ensemble est connexe,

(2) tout ensemble est l'union de ses composantes connexes,

(3) un ensemble est connexe si et seulement si il a une unique composante connexe – lui-même.

Exemples. Les graphes des fonction sinus et cosinus sont connexes. Le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas connexe, il a deux composantes connexes.

Proposition. *Une partie A de $\mathbf{R}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.*

IV.2. Notion de continuité

Définition. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, est dite *continue en point* $a \in D$ si et seulement si

> pour tout $c > 0$, il existe $d > 0$ tel que pour tout $x \in D$, si $|x - a| < d$, alors $|f(x) - f(a)| < c$.

Définition. Une fonction est dite *continue* si et seulement si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Toutes les fonctions élémentaires (polynomiales, rationnelles, racines, exponentielles, logarithmes, trigonométriques, trigonométriques inverses) sont continues.

Définition. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, est dite *continue sur* $A \subset D$ si est seulement si $f|_A$ est continue.

Définition. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, est dite *continue en* $a \in D$ *à droite* si et seulement si $f|_{D\cap[a,\infty[}$ est continue en a. Elle est dite *continue en* $a \in D$ *à gauche* si et seulement si $f|_{D\cap]-\infty,a]}$ est continue en a.

Proposition. *Soit* $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, *une fonction continue. Alors le nombre des composantes connexes du graphe de* f *est égal au nombres des composantes connexes du domaine de définition de* f. *En particulier, si* D *est un intervalle, alors le graphe de* f *est connexe.*

IV.3. Démonstration de la continuité d'une fonction

IV.3.1. L'inégalité triangulaire réelle

Démonstrations de la continuité utilisent souvent l'*inégalité triangulaire* :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{pour tous} \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Cette inégalité est en fait vraie pour tous $x, y \in \mathbf{C}$, mais le cas réel est plus facile à démontrer, ce qu'on va faire ici.

Lemme. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{R}$,

$$|x| < y \;\Leftrightarrow\; -y < x < y \qquad \textit{et} \qquad |x| \leqslant y \;\Leftrightarrow\; -y \leqslant x \leqslant y.$$

Ce lemme est facile à démontrer en observant que

$$|x| = \max(x, -x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire réelle. Comme

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{et} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

on trouve que

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

et donc

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \qquad \square$$

Exercice. Montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est continue en point $x = -2$.

2025-01-23T14:27

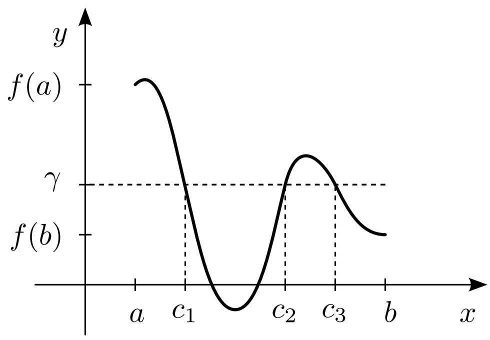

FIG. IV.1. : Une valeur intermédiaire γ atteinte 3 fois.

IV.3.2. Continuité et opérations sur les fonctions

Proposition. *Si f et g sont continues, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue.*

Proposition. *Si f et g sont continues, alors les fonctions $f+g$, fg et f/g sont toutes continues.*

Théorème. *Soient $I \subset \mathbf{R}$ un* intervalle *et $f\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction strictement monotone. Alors la fonction réciproque f^{-1} est continue.*

IV.4. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset D$. Alors pour toute valeur γ comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \gamma$ (voir la figure* IV.1).

Esquisse d'une démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $f(a) < \gamma < f(b)$. Posons alors

$$c = \sup\{\, x \in [a,b] \mid f(x) < \gamma \,\}.$$

On peut montrer, en utilisant la continuité de f, que $f(c) = \gamma$. □

En peut aussi démontrer ce théorème à partir du fait que tout intervalle est *connexe*, et ainsi le graphe d'une fonction continue sur un intervalle est connexe.

Exemple. Soit $f(x) = 1 + x - x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbf{R}$; en particulier, elle est continue sur $[1,2]$. Comme $f(1) = 1$ et $f(2) = -5$, et que 0 est compris strictement entre 1 et -5, il existe $x \in \,]1,2[$ tel que $f(x) = 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

IV.5. Théorème des bornes

Théorème (Théorème des bornes, théorème de Weierstrass)**.** *Soit* $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b] \subset D$*. Alors il existe* $c, d \in [a, b]$ *tels que pour tout* $x \in [a, b]$,

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

Autrement dit, f *est* bornée *sur* $[a, b]$ *et possède la valeur minimale sur* $[a, b]$ *(atteinte en* $c \in [a, b]$*) et la valeur maximale sur* $[a, b]$ *(atteinte en* $d \in [a, b]$*).*

Exemple. La fonction $x \mapsto 1/x$, $x \in \mathbf{R}$, est continue sur $]0, 1]$, mais elle n'est pas bornée sur cet intervalle. En revanche, elle est bornée sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$ qui est inclus dans son domaine de définition.

IV.6. Prolongement par continuité

SECTION-BROUILLON

Définition. Soient $A \subset B \subset \mathbf{R}$ et $f\colon A \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Le *prolongement par continuité* de f sur B est la fonction $g\colon B \to \mathbf{R}$ qui est l'unique fonction continue $B \to \mathbf{R}$ qui prolonge f sur B. S'il n'existe pas de prolongement continu de f sur B, ou s'il y en a plusieurs, alors f n'admet pas de *prolongement par continuité* sur B.

V. Fonctions élémentaires usuelles

Citons Wikipédia :

> Une fonction *élémentaire* est une fonction d'une variable construite à partir d'un nombre fini d'exponentielles, logarithmes, constantes, et racines n-ièmes par composition et combinaisons utilisant les quatre opérations élémentaires $(+)$, $(-)$, $(\times)$, $(\div)$. En permettant à ces fonctions (et les constantes) d'être complexes, les fonctions trigonométriques et leur inverses sont élémentaires.

V.1. Fonctions polynomiales et rationnelles

Définition. Une *fonction polynomiale réelle* est toute fonction $p\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui peut être définie par une formule de la forme

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbf{R},$$

où $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$.

En particulier, les fonctions constantes $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et les fonctions affines sont polynomiales.

Toute fonction polynomiale réelle est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Définition. Une *fonction rationnelle réelle* est toute fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui peut être définie par une formule de la forme

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

où p et q sont deux fonctions polynomiales réelles, q non nulle.

En particulier, toute fonction polynomiale est aussi rationnelle.

Toute fonction rationnelle est continue (sur son domaine de définition).

On peut montrer qu'un *polynôme* de *degré* $n \geqslant 0$ à coefficients réels (ou complexes) admet au plus n *racines* distinctes. Il en résulte qu'une fonction rationnel est définie partout dans $\mathbf{R}$ sauf en un nombre fini de points (où « le dénominateur s'annule »).

Remarque. On peut prolonger toute fonction polynomiale réelle $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en une *fonction polynomiale complexe* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Également, on peut prolonger toute fonction rationnelle réelle en une *fonction rationnelle complexe* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

V.2. Fonctions puissances

SECTION-BROUILLON

Définition. Soit $a \in \mathbf{R}$. La *fonction puissances* (réelle) d'*exposant* a est la fonction $x \mapsto x^a$, $x \in \mathbf{R}$.

Soit $a \in \mathbf{R}$ et soit f la fonction puissance réelle d'exposant a :

$$f(x) = x^a, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La fonction f est continue (sur son domaine de définition).
La fonction f est définie :

- sur $\mathbf{R}$ si $a \in \mathbf{N}$,
- sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ si $a \in \mathbf{Z}$ et $a \notin \mathbf{N}$,
- sur $[0, \infty[$ si $a > 0$ et $a \notin \mathbf{Z}$,
- sur $]0, \infty[$ si $a < 0$ et $a \notin \mathbf{Z}$.

Si $a \in \mathbf{Z}$, la fonction f est

- paire si a est pair,
- impaire si a est impair.

Sur l'intervalle $]0, \infty[$, la fonction f est

- strictement croissante si $a > 0$,
- strictement décroissante si $a < 0$,
- constante (1 partout) si $a = 0$.

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), on peut montrer que

- pour $a > 0$, la restriction $f|_{[0,\infty[}$ est une bijection croissante entre $[0, \infty[$ et $[0, \infty[$, et que
- pour $a < 0$, la restriction $f|_{]0,\infty[}$ est une bijection décroissante entre $]0, \infty[$ et $]0, \infty[$.

En plus, si $a \in \mathbf{N}$ et a est impair, alors f est une bijection croissante entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$.

V.3. Fonctions racines

SECTION-BROUILLON

Définition. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$. La *fonction racine* n^e (réelle) est la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$, et soit f la fonction racine n^{e} réelle :

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La fonction f est continue (sur son domaine de définition).

Pour $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 2$, n pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $[0, \infty[$. Cette fonction est une bijection (strictement) croissante entre $[0, \infty[$ et $[0, \infty[$.

Pour $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 3$, n impair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Cette fonction est impaire. Elle est une bijection (strictement) croissante entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}$.

V.4. Fonctions exponentielles

Définition. Soit $a > 0$, $a \neq 1$. La *fonction exponentielle* (réelle) de *base* a est la fonction $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Soit $a > 0$, $a \neq 1$, et soit f la fonction exponentielle réelle de base a :

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Si $a > 1$, la fonction f est strictement croissante. Si $0 < a < 1$, la fonction f est strictement décroissante.

L'ensemble image de f est $]0, \infty[$, et donc f est une bijection entre $\mathbf{R}$ et $]0, \infty[$.

V.5. Fonctions logarithmes

Définition. Soit $a > 0$, $a \neq 1$. La *fonction logarithme* de *base* a est la fonction $\log_a$, c'est-à-dire, la fonction $x \mapsto \log_a x$, $x > 0$.

On peut aussi définir $\log_a$ comme la fonction réciproque de l'exponentielle (réelle) de base a.

Soit $a > 0$, $a \neq 1$, et considérons la fonction $\log_a$.

La fonction $\log_a$ est définie et continue sur $]0, \infty[$.

Si $a > 1$, la fonction $\log_a$ est strictement croissante. Si $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante.

L'ensemble image de $\log_a$ est $\mathbf{R}$, et donc $\log_a$ est une bijection entre $]0, \infty[$ et $\mathbf{R}$.

2025-01-23T14:27

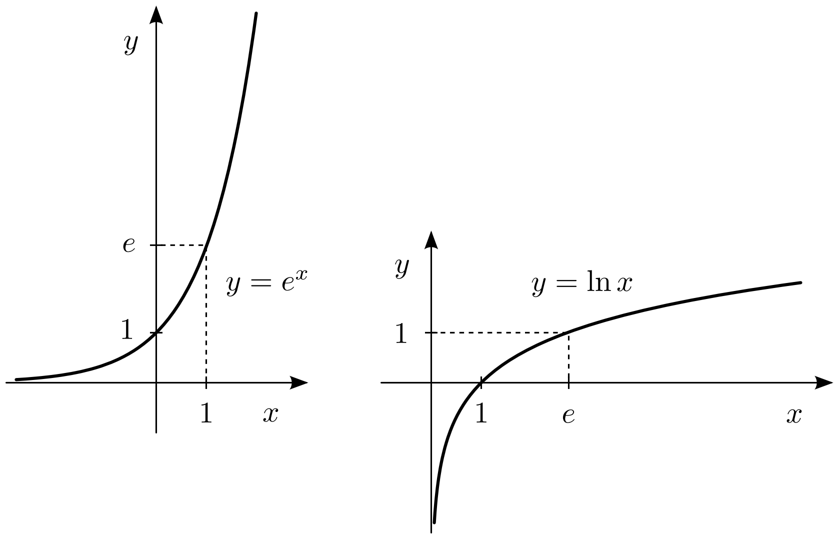

FIG. V.1. : La fonction exponentielle et la fonction logarithme naturel.

V.6. La fonction exponentielle $\exp$, la fonction logarithme naturel, le nombre d'Euler

SECTION-BROUILLON

La fonction *exponentielle réelle* $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est définie par la formule :

$$\exp(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots .$$

Remarque. On peut utiliser la même formule pour définir la fonction *exponentielle complexe* $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Si on veut utiliser les deux dans un même texte, on peut les noter $\exp_{\mathbf{R}}$ et $\exp_{\mathbf{C}}$, mais d'habitude on n'a besoin que d'une parmi les deux, et donc exp peut désigner soit l'exponentielle réelle, soit l'exponentielle complexe, selon le contexte.

La fonction exp est définie et continue sur $\mathbf{R}$, elle est strictement positive et strictement croissante, son ensemble image est $]0, \infty[$, et donc elle est une bijection entre $\mathbf{R}$ et $]0, \infty[$.

Voici quelques propriétés remarquables de la fonction exp :

$$\exp(0) = 1, \qquad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \qquad \exp(xy) = \exp(x)^y.$$

En utilisant la fonction exp, on peut définir le *nombre* e (connu comme le *nombre d'Euler* ou la *constante de Néper*) :

$$e \overset{\text{déf}}{=} \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots \approx 2{,}7182818285.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\exp(x) = \exp(1x) = (\exp(1))^x = e^x,$$

et on peut donc écrire e^x au lieu de $\exp(x)$.

La fonction *logarithme naturel*, aussi connue comme *logarithme népérien*, notée ln, est la fonction logarithme de base e :

$$\ln = \log_e .$$

Ainsi, ln et exp sont réciproques l'une de l'autre :

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp y$$

pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbf{R}$.

On peut exprimer toutes les fonctions exponentielles et logarithmes en termes des fonctions exp et ln :

$$a^x = \exp(x \ln a) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R},$$

et

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

Exercice. Déduire ces formules des propriétés présentées précédemment.

V.7. Fonctions trigonométriques

À l'origine, la *trigonométrie* était une étude des relations entre les mesures des côtés et des angles dans les triangles. En grec, τϱίγωνος [trígonos] veut dire « triangulaire », et μέτϱον [métron] veut dire « mesure ».

V.7.1. Les fonctions sinus et cosinus

Le fonctions trigonométriques *sinus* et *cosinus* peuvent être définies géométriquement à l'aide d'un cercle unité dans un plan euclidien orienté, voir la figure V.2. Un tel cercle parfois s'appelle un *cercle trigonométrique*.

D'après le théorème de Pythagore, l'identité suivante est satisfaite pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

Notation. Par coutume, pour $n \in \mathbf{N}$, la notation « $\sin^n x$ » signifie $(\sin x)^n$ et la notation « $\cos^n x$ » signifie $(\cos x)^n$.

Avec cette notation traditionnelle, l'identité précédente peut être écrite ainsi :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Remarque. En général, « $f^2(x)$ » peut signifier $f(f(x))$.

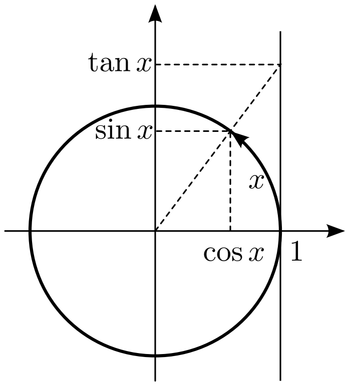

FIG. V.2. : Cercle trigonométrique.

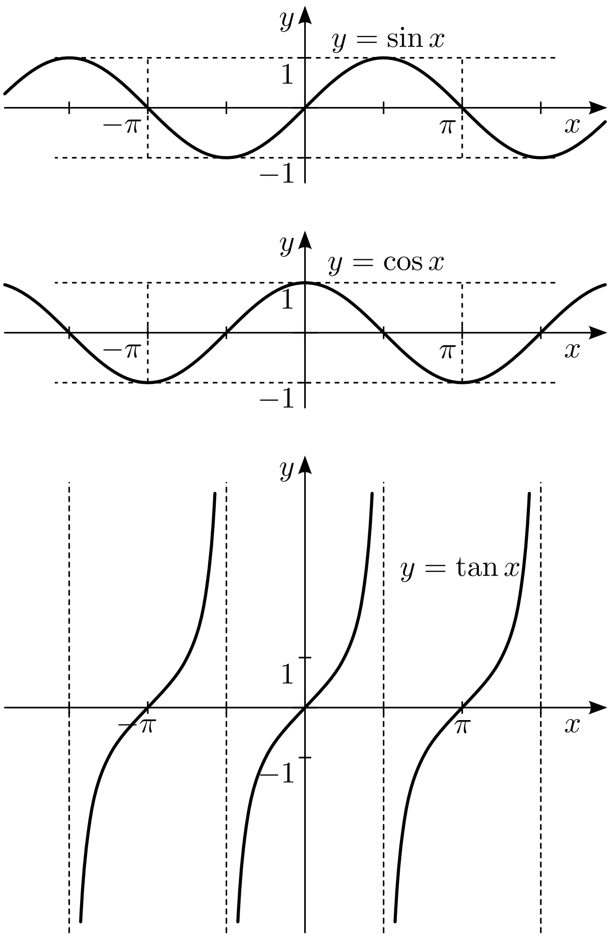

FIG. V.3. : Fonctions trigonométriques.

La fonction cos est paire. La fonction sin est impaire. Les deux sont 2π-périodiques, car 2π est la longueur du cercle unité.

La restriction de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est une bijection croissante entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-1, 1]$.

La restriction de cos sur $[0, \pi]$ est une bijection décroissante entre $[0, \pi]$ et $[-1, 1]$.

On peut prouver les *formules d'addition*[1] pour sin et cos :

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= (\cos x)(\cos y) - (\sin x)(\sin y), \\ \sin(x+y) &= (\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y). \end{aligned}$$

V.7.2. Les fonctions tangente et cotangente

Les fonctions *tangente* et *cotangente* sont définies par les formules :

$$\tan x \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{et} \qquad \cot x \overset{\text{déf}}{=} \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Les fonctions tan et cot sont toutes les deux impaires et π-périodiques.

La restriction de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection croissante entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbf{R}$.

La restriction de cot sur $]0, \pi[$ est une bijection décroissante entre $]0, \pi[$ et $\mathbf{R}$.

V.7.3. Quelques valeurs particulières

Voici quelque valeurs particulières des fonctions trigonométriques qui peuvent être calculées géométriquement :

$$\begin{array}{lll} \cos 0 = 1, & \sin 0 = 0, & \tan 0 = 0, \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \tan \frac{\pi}{4} = 1, \\ \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, & \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \\ \cos \frac{\pi}{2} = 0, & \sin \frac{\pi}{2} = 1, & \text{tan n'est pas définie en } \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

[1] En utilisant la multiplication des matrices, on peut écrire les formules d'addition comme suit :

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Le sens géométrique de cette formule est le suivant : la matrice de *rotation* par l'angle orienté de valeur $x + y$ est le produit des matrices de rotation par les angles orientés de valeurs x et y.

V.8. Fonctions trigonométriques inverses

Définition. La fonction *arc-sinus* est la fonction $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par l'équivalence suivante :

$$\arcsin x = y \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x = \sin y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\Big)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Définition. La fonction *arc-cosinus* est la fonction $\arcsin\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ définie par l'équivalence suivante :

$$\arccos x = y \quad \Leftrightarrow \quad (x = \cos y \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Définition. La fonction *arc-tangente* est la fonction $\arctan\colon \mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ définie par l'équivalence suivante :

$$\arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad \Big(x = \tan y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\Big)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Définition. La fonction *arc-cotangente* est la fonction $\operatorname{arccot}\colon \mathbf{R} \to \left]0, \pi\right[$ définie par l'équivalence suivante :

$$\operatorname{arccot} x = y \quad \Leftrightarrow \quad (x = \cot y \quad \text{et} \quad 0 < y < \pi)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Ainsi, la fonction arcsin et inverse à droite de sin, la fonction arccos est inverse à droite de cos, la fonction arctan est inverse à droite de tan, la fonction arccot est inverse à droite de cot.

On peut aussi exprimer arcsin, arccos, arctan, arccot comme les réciproques de certaines restrictions de sin, cos, tan, cot :

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}, \qquad \arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1},$$
$$\arctan = (\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[})^{-1}, \qquad \operatorname{arccot} = (\cot|_{]0,\pi[})^{-1}.$$

Les fonctions arcsin, arccos, arctan, arccot sont continues.

Les fonctions arcsin et arctan sont impaires.

Exercice. Montrer les identités (pour les valeurs de x dans les domaines de définition) :

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice. Montrer les identités :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\arcsin x).$$

V.9. Fonctions hyperboliques

SECTION-BROUILLON

V.9.1. Cosinus et sinus hyperboliques

Définition. Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont respectivement définies par les formules :

$$\cosh x \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x \overset{\text{déf}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Les fonctions cosh et sinh satisfont l'identité

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathbf{R}.$$

Remarque. On peut utiliser les mêmes formules pour définir $\cosh z$ et $\sinh z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. De la même façon, on peut utiliser les formules provenant de la formule d'Euler pour définir $\cos z$ et $\sin z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Les fonctions cosh et sinh sont continues et dérivables sur $\mathbf{R}$, et on a :

$$\cosh' x = \sinh x, \qquad \sinh' x = \cosh x.$$

On a aussi les propriétés suivantes :

(1) $\cosh(0) = 1$, $\sinh(0) = 0$;

(2) cosh est paire, sinh est impaire ;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$;

(4) cosh est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$;

(5) sinh est strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$;

(6) $\cosh|_{[0,+\infty[}$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$;

(7) sinh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Définition. La fonction *tangente hyperbolique* est définie par la formule :

$$\tanh x \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, c'est une fonction impaire et sa dérivée vaut :

$$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.$$

Elle est donc strictement croissante. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement -1 et 1. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1, 1[$.

V.10. Fonctions hyperboliques inverses

SECTION-BROUILLON

Définition. La fonction *argument du sinus hyperbolique* est la réciproque de $\sinh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On la note $\operatorname{argsinh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. La fonction *argument du cosinus hyperbolique* est la réciproque de $\cosh|_{\mathbf{R}_+}\colon \mathbf{R}_+ \to [1, +\infty[$. On la note $\operatorname{argcosh}\colon [1, +\infty[\to \mathbf{R}_+$. La fonction *argument de la tangente hyperbolique* est la réciproque de $\tanh\colon \mathbf{R} \to]-1, 1[$. On la note $\operatorname{argtanh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

VI. Limites

CHAPITRE-BROUILLON

VI.1. Voisinages et adhérences

Définition. Soit a un réel. Une partie V de $\mathbf{R}$ est dite un *voisinage* de a dans $\mathbf{R}$ si et seulement si il existe un réel strictement positif δ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $|x-a| < \delta$, alors $x \in V$.

Exemples. Voici quelques voisinages de π dans $\mathbf{R}$:

$$]3,4[, \quad [3,4], \quad [-4,4], \quad \left]3\tfrac{10}{71}, 3\tfrac{1}{7}\right[, \quad [0,\infty[, \quad \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}.$$

Voici quelques parties de $\mathbf{R}$ qui ne sont pas voisinages de π dans $\mathbf{R}$:

$$]-\infty,0], \quad [4,5], \quad [0,\pi], \quad [\pi,4], \quad \mathbf{R}\setminus\{\pi\}.$$

Proposition. *Soit a un réel.*

(1) *Si U est un voisinage de a dans* $\mathbf{R}$ *et que $U \subset V \subset \mathbf{R}$, alors V est aussi un voisinage de a dans* $\mathbf{R}$.

(2) *Si U et V sont deux voisinages de a dans* $\mathbf{R}$, *alors leur intersection $U \cap V$ l'est aussi.*

Proposition. *Soit a un réel.*

(1) *Tout intervalle réel ouvert qui contient a est un voisinage de a dans* $\mathbf{R}$.

(2) *Si U est un voisinage de a dans* $\mathbf{R}$, *alors il existe un intervalle réel ouvert I tel que $a \in I \subset U$.*

Définition. Soit D une partie de $\mathbf{R}$. On dit que $a \in \mathbf{R}$ est un *point adhérent* à D si et seulement si dans tout voisinage de a dans $\mathbf{R}$ il y a un élément de D. L'ensemble des réels adhérents à $D \subset \mathbf{R}$ s'appelle l'*adhérence* de D dans $\mathbf{R}$.

On peut définir les points adhérents sans évoquer explicitement la notion de voisinage ainsi : $a \in \mathbf{R}$ est un point adhérent à $D \subset \mathbf{R}$ si et seulement si

pour tout $d > 0$, *il existe* $x \in D$ tel que $|x-a| < d$.

En utilisant les symboles *quantificateurs*, cela s'écrit :

$$\forall d > 0,\ \exists x \in D \text{ tel que } |x-a| < d.$$

Exemples. (1) L'adhérence de $]0,1[$ est $[0,1]$.

(2) L'adhérence de $\mathbf{Z}$ est $\mathbf{Z}$.

(3) L'adhérence de $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}\,\}$ est $\{\,\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}\,\}\cup\{0\}$.

Proposition. *Pour toute partie $X \subset \mathbf{R}$, notons $\overline{X}$ l'adhérence de X dans $\mathbf{R}$. Alors :*

(1) *pour toute partie $X \subset \mathbf{R}$, $X \subset \overline{X} = \overline{\overline{X}}$,*

(2) *si $X \subset Y \subset \mathbf{R}$, alors $\overline{X} \subset \overline{Y}$,*

(3) *pour tous $X \subset \mathbf{R}$ et $Y \subset \mathbf{R}$, $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.*

VI.2. Notions de limite

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. On dit que $b \in \mathbf{R}$ est une *limite* de f en[1] a si et seulement si pour tout voisinage U de b dans $\mathbf{R}$, il existe un voisinage V de a dans $\mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) \in U$.

Sans évoquer la notion de voisinage, une limite de f en $a \in \mathbf{R}$ peut être définie ainsi : $b \in \mathbf{R}$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ si et seulement si

pour tout $c > 0$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $|x - a| < d$, alors $|f(x) - b| < c$.

Avec les symboles *quantificateurs*, cela s'écrit :

$$\forall c > 0,\ \exists d > 0 \text{ tel que } \forall x \in D,\ \big(|x-a| < d \Rightarrow |f(x) - b| < c\big).$$

Pour écrire que b soit une limite de f en a, on peut utiliser la notation :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b.$$

Ceci est lu : « $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a ».

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$. On dit que ∞ est une *limite* de f en a si et seulement si pour tout $M \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage V de a dans $\mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) > M$. Cela s'exprime par la notation :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \infty.$$

De la même façon, on dit que $-\infty$ est une *limite* de f en a si et seulement si pour tout $M \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage V de a dans $\mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) < M$. Cela s'exprime par la notation :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty.$$

[1] Certains auteurs, par exemple Bourbaki, disent plutôt « limite de f *au* point a » (voir Bourbaki, *Topologie générale, Chapitres 1 à 4*, chapitre I, §7, № 4).

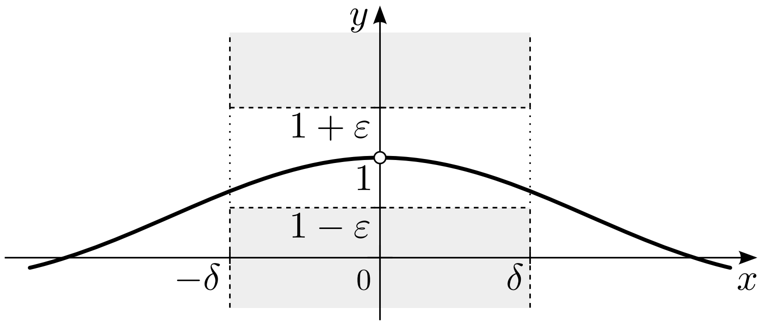

FIG. VI.1. : La limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en 0 est 1.

Ainsi :

(1) ∞ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ si et seulement si

pour tout $M \in \mathbf{R}$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $|x-a| < d$, alors $f(x) > M$.

(2) $-\infty$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ si et seulement si

pour tout $M \in \mathbf{R}$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $|x-a| < d$, alors $f(x) < M$.

En plus des limites, finies ou infinies, en un point de $\mathbf{R}$, on définit les limites, finies ou infinies, en ∞ et en $-\infty$.

Définition. Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, avec $D \subset \mathbf{R}$. On dit que $b \in \mathbf{R}$ est une *limite* de f en ∞ si et seulement si pour tout voisinage U de b dans $\mathbf{R}$, il existe $N \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $x > N$, $f(x) \in U$. Cela s'exprime par la notation :

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

On dit que $b \in \mathbf{R}$ est une *limite* de f en $-\infty$ si et seulement si pour tout voisinage U de b dans $\mathbf{R}$, il existe $N \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $x < N$, $f(x) \in U$. Cela s'exprime par la notation :

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} b.$$

Ainsi :

(1) $b \in \mathbf{R}$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en ∞ si et seulement si

pour tout $c > 0$, *il existe* $N \in \mathbf{R}$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $x > N$, alors $|f(x) - b| < c$;

(2) $b \in \mathbf{R}$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $-\infty$ si et seulement si

> *pour tout* $c > 0$, *il existe* $N \in \mathbf{R}$ tel que *pour tout* $x \in D$,
> si $x < N$, alors $|f(x) - b| < c$.

Définition. Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, avec $D \subset \mathbf{R}$. On dit que ∞ est une *limite* de f en ∞ si et seulement si pour tout $M \in \mathbf{R}$, il existe $N \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in D$ tel que $x > N$, $f(x) > M$. Cela s'exprime par la notation :

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ainsi, ∞ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en ∞ si et seulement si

> *pour tout* $M \in \mathbf{R}$, *il existe* $N \in \mathbf{R}$ tel que *pour tout* $x \in D$,
> si $x > N$, alors $f(x) > M$.

Exercice. Définir par analogie la signification de « $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ », de « $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \infty$ », et de « $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ».

Lorsque on parle de la limite d'une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$, on suppose d'habitude que le point a soit adhérent à D, car dans le cas contraire, d'après notre définition, toute valeur réelle, ainsi que $\pm\infty$, sera une limite de f en a. Pour la même raison, lorsque on parle de la limite de f en ∞, on suppose d'habitude que le domaine de f ne soit majoré par aucun nombre réel, et lorsque on parle de la limite de f en $-\infty$, on suppose d'habitude que le domaine de f ne soit minoré par aucun nombre réel.

Proposition. *Soient* $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Supposons que*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L_1, \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L_2, \qquad L_1, L_2 \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\},$$

et qu'une des conditions suivantes est satisfaite :

(1) *soit* $a \in \mathbf{R}$ *et* a *est adhérent à* D,

(2) *soit* $a = \infty$ *et* D *n'est majoré par aucun réel,*

(3) *soit* $a = -\infty$ *et* D *n'est minoré par aucun réel.*

Alors $L_1 = L_2$.

On ne va considérer les limites que dans les situations où cette proposition s'applique. On va noter $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ l'unique limite de f en $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ si la limite existe.

VI.2.1. Limite « épointée »

La notion de limite en un point $a \in \mathbf{R}$ qu'on utilise ici n'est pas complètement standard. Il existe une tradition de définir la limite de f en a comme la valeur b telle que

> *pour tout* $c > 0$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
> si $0 < |x - a| < d$, alors $|f(x) - b| < c$.

Cette notion de limite est généralement moins pratique. Si on aura besoin de considérer une limite dans ce sens, on va l'appeler *limite épointée* et on va utiliser une notation de la forme :

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} b \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b.$$

Autrement dit, la limite épointée de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en a est la limite de la restriction $f|_{D\setminus\{a\}}$ en a :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a} f|_{D\setminus\{a\}}(x).$$

VI.2.2. Limites « à gauche » et « à droite »

Considérons, comme un exemple, la fonction $f\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$ définie par la formule :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|}.$$

Il est facile de vérifier que f n'admet pas de limite en 0. En revanche, les restrictions $f|_{]-\infty,0[}$ et $f|_{]0,\infty[}$ admettent une limite en 0 :

$$\lim_{x\to 0} f|_{]-\infty,0[}(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0} f|_{]0,\infty[}(x) = -1.$$

La limite de $f|_{]-\infty,0[}$ en 0 est dite la *limite de f en 0 à gauche*, et elle est notée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

La limite de $f|_{]0,\infty[}$ en 0 est dite la *limite de f en 0 à droite*, et elle est notée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Ainsi, pour la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1,$$

mais il n'y a pas de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

En général, si $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, alors

(1) la *limite de f en a à gauche*, notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, est la limite de $f|_{]-\infty,a[\cap D}$ en a, et

(2) la *limite de f en a à droite*, notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, est la limite de $f|_{]a,\infty[\cap D}$ en a.

En utilisant une autre forme de notation, on peut écrire

$$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} L \quad \text{au lieu de} \quad f|_{]-\infty,a[\cap D}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L,$$

et

$$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} L \quad \text{au lieu de} \quad f|_{]a,\infty[\cap D}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L.$$

Voici des définitions plus directes, pour le cas des limites finies :

(1) $b \in \mathbf{R}$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ à gauche si et seulement si

pour tout $c > 0$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $a - d < x < a$, alors $|f(x) - b| < c$;

(2) $b \in \mathbf{R}$ est une limite de $f\colon D \to \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{R}$ à droite si et seulement si

pour tout $c > 0$, *il existe* $d > 0$ tel que *pour tout* $x \in D$,
si $a < x < a + d$, alors $|f(x) - b| < c$.

VI.3. Limites par continuité

Théorème. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in D$. Alors f est continue en a si et seulement si*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a).$$

Il y a des théorèmes analogiques pour la continuité à droite et à gauche.

VI.3.1. Prolongement par continuité

Proposition. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction et $a \in \mathbf{R} \setminus D$ un point adhérent à D. Soit $g\colon D \cup \{a\} \to \mathbf{R}$ un prolongement de f en a. Alors g est continue en a si et seulement si*

$$g(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, $D \subset \mathbf{R}$, et $a \in \mathbf{R} \setminus D$ un point adhérent à D. Le *prolongement de f en a par continuité* est l'unique prolongement $g\colon D \cup \{a\} \to \mathbf{R}$ de f en a qui est continu en a, si un tel prolongement g existe.

VI.4. Limite de la fonction composée, « changement de variable »

Théorème (Limite de la fonction composée). *Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles, $A, B \subset \mathbf{R}$. Supposons que $a, b, L \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$,*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} L.$$

Alors,

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L.$$

VI.5. Propriétés des limites par rapport à des opérations « point par point »

VI.5.1. Limite d'une somme

Proposition. *Soient $f, g\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, et supposons que*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L, \qquad g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M, \qquad L, M \in \mathbf{R}.$$

Alors

$$f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L + M.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.
Soit $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_1, \text{ alors } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_1, \text{ alors } |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Des tels δ_1 et δ_2 existent d'après les hypothèses que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} M$.

Soit $\delta > 0$ tel que $\delta \leqslant \delta_1$ et $\delta \leqslant \delta_2$ (par exemple : $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$). Alors, pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$, on a :

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Conclusion : $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L + M$. □

Considérons le cas $f, g\colon D \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M, \qquad L, M \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Alors la valeur de $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$ est donnée dans le tableau :

	$M = -\infty$	$M \in \mathbf{R}$	$M = \infty$
$L = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$L \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$L + M$	∞
$L = \infty$	?	∞	∞

Dans les cas marqués par le point d'interrogation, le tableau ne donne aucune valeur de $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x))$ et ne dit pas si cette limite existe, finie ou infinie.

VI.5.2. Limite d'un produit

Proposition. *Soient $f, g\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, et supposons que*

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L, \qquad g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} M, \qquad L, M \in \mathbf{R}.$$

Alors

$$f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} LM.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |(f(x) - L)(g(x) - M) + (f(x) - L)M + L(g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L|\,|g(x) - M| + |f(x) - L|\,|M| + |L|\,|g(x) - M|\,. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.
Soit $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_1, \text{ alors } |f(x) - L| < \min\Big\{1, \frac{\varepsilon}{3\,|M| + 1}\Big\}.$$

Soit $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } |x - a| < \delta_2, \text{ alors } |g(x) - M| < \min\Big\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3\,|L| + 1}\Big\}.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alors $\delta > 0$, et pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leqslant |f(x) - L|\,|g(x) - M| + |f(x) - L|\,|M| + |L|\,|g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon\,|M|}{3\,|M| + 1} + \frac{\varepsilon\,|L|}{3\,|L| + 1} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} LM$. □

Considérons le cas $f, g\colon D \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M, \qquad L, M \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Alors la valeur de $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ est donnée dans le tableau :

	$M = 0$	$0 < M < \infty$	$M = \infty$
$L = 0$	0	0	$?$
$0 < L < \infty$	0	LM	∞
$L = \infty$	$?$	∞	∞

Dans les cas marqués par le point d'interrogation, le tableau ne donne aucune valeur de $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ et ne dit pas si cette limite existe, finie ou infinie.

VI.5.3. Limite d'un quotient

Proposition. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, et supposons que*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L, \qquad L \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Alors

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{L}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in D$ tel que $|f(x) - L| < |L|$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| &= \left|\frac{f(x) - L}{Lf(x)}\right| = \frac{|f(x) - L|}{|L|\,|f(x)|} = \frac{|f(x) - L|}{|L|\,|L + (f(x) - L)|} \\ &\leqslant \frac{|f(x) - L|}{|L|\,(|L| - |f(x) - L|)}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.
Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } |x - a| < \delta, \text{ alors } |f(x) - L| < \min\left\{\frac{|L|}{2}, \frac{\varepsilon\,|L|^2}{2}\right\}.$$

Alors, pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$, on a :

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| \leqslant \frac{|f(x) - L|}{|L|\,(|L| - |f(x) - L|)} < \frac{\varepsilon\,|L|^2/2}{|L|\,(|L| - |L|/2)} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{L}$. $\square$

Considérons le cas $f\colon D \to \mathbf{R}$, $g\colon D \to]0,\infty[$, $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, avec

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M, \qquad L, M \in \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Alors la valeur de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est donnée dans le tableau :

	$M = 0$	$0 < M < \infty$	$M = \infty$
$L = 0$	?	0	0
$0 < L < \infty$	∞	$\dfrac{L}{M}$	0
$L = \infty$	∞	∞	?

Dans les cas marqués par le point d'interrogation, le tableau ne donne aucune valeur de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et ne dit pas si cette limite existe, finie ou infinie.

VI.6. Comparaison de limites

Théorème (Comparaison de limites)**.** *Soient $f, g\colon D \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in D$,*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Supposons que $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existent. Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

VI.7. Théorème des gendarmes (d'encadrement)

Théorème (« Encadrement vers l'infini »)**.** *Soient $f, g\colon D \to \mathbf{R}$ deux fonctions telles que pour tout $x \in D$,*

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

(1) *si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$;*

(2) *si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.*

Théorème (Théorème d'encadrement, théorème des gendarmes)**.** *Soient $f, g, h\colon D \to \mathbf{R}$ trois fonctions telles que pour tout $x \in D$,*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

et soit $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. *Supposons que*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L, \qquad h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L, \qquad L \in \mathbf{R}.$$

Alors

$$g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} L.$$

Exemple. Si $0 < x < \pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2}$, alors $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Par la continuité de la fonction cos, $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

VI.8. Quelques limites remarquables

On admet les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice. Essayer de trouver des justifications plus ou moins formelles des valeurs de ces limites. (Cet exercice est assez difficile.)

VI.9. Croissances comparées

Théorème. *Si* $a > 0$, $a \neq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta \neq 0$, *alors*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha a^{\beta x} = \lim_{x\to\infty} a^{\beta x}, \qquad \lim_{x\to-\infty} (-x)^\alpha a^{\beta x} = \lim_{x\to-\infty} a^{\beta x},$$
$$\lim_{x\to\infty} |\log_a x|^\alpha x^\beta = \lim_{x\to\infty} x^\beta, \qquad \lim_{x\to 0^+} |\log_a x|^\alpha x^\beta = \lim_{x\to 0^+} x^\beta.$$

La valeur de chacune de ces limites est 0 *ou* ∞.

Une façon de démontrer ce théorème est en utilisant les *règles de L'Hôpital* et la récurrence. Il est aussi possible de le démontrer plus directement, sans utiliser les règles de L'Hôpital.

VI.10. Étude de branches infinies

SECTION-BROUILLON

VI.10.1. Asymptotes

Définition. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. Une *asymptote verticale* au graphe de f est une droite d'équation $x = a$ telle que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Une *asymptote horizontale* au graphe de f est une droite d'équation $y = b$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Une *asymptote oblique* au graphe de f est une droite d'équation $y = ax + b$ avec $a \neq 0$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - ax - b\big) = 0.$$

Proposition. *La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$ si et seulement si*

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big),$$

et dans ce cas,

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

VI.10.2. Position du graphe d'une fonction par rapport à une asymptote

Pour placer le graphe de f par rapport à une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = bx + c$, il faut déterminer si la différence $f(x) - bx - c$ est positive ou négative au voisinage de $+\infty$.

VI.11. Développements limités

SECTION-BROUILLON

Définition. Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ (mais peut-être ailleurs aussi). Un *développement limité* de f en x_0 d'ordre n est une écriture de f sur $I \setminus \{x_0\}$ sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \epsilon(x)(x - x_0)^n,$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ et $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$. La fonction polynomiale p définie par

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

s'appelle la *partie régulière* de ce développement limité, et la fonction r définie par $r(x) = \epsilon(x)(x - x_0)^n$ s'appelle le *reste*.

Théorème. *Si un développement limité de f en x_0 d'ordre n existe, il est unique dans le sens que les coefficients auprès de $(x - x_0)^k$ sont déterminés uniquement.*

VI.12. Notation de Landau

SECTION-BROUILLON

Edmund Georg Hermann Landau (1877 – 1938) fut un mathématicien allemand, il travailla en grande partie sur la théorie des nombres.

Définition (Notation de Landau)**.** Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$, et f et g deux fonctions réelles définies sur $I \setminus \{a\}$ (mais peut-être ailleurs aussi).

(1) On écrit
$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to a$$
si il existe $\kappa \colon I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ telle que
 (a) $f(x) = \kappa(x)g(x)$ pour $x \in I \setminus \{a\}$ et
 (b) $\lim_{x\to a} \kappa(x) = 0$.

(2) On écrit
$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to a$$
si il existe $\kappa \colon I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ telle que
 (a) $f(x) = \kappa(x)g(x)$ pour $x \in I \setminus \{a\}$ et
 (b) il existe $\delta > 0$ tel que κ est bornée sur $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$.

(3) On écrit
$$f(x) \sim g(x), \quad x \to a$$
si il existe $\kappa \colon I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ telle que
 (a) $f(x) = \kappa(x)g(x)$ pour $x \in I \setminus \{a\}$ et
 (b) $\lim_{x\to a} \kappa(x) = 1$.

Exemples.

$$\begin{aligned}
&x = \underset{x\to 0}{o}(1) = \underset{x\to 0}{O}(1), \qquad \frac{1}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}(1) = \underset{x\to+\infty}{O}(1),\\
&x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x) = \underset{x\to 0}{O}(x), \qquad x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2) = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2),\\
&x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x) = \underset{x\to+\infty}{O}(e^x),\\
&\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(\sqrt{x}) = \underset{x\to+\infty}{O}(\sqrt{x}),\\
&\sin x = \underset{x\to 0}{O}(x), \qquad \sin x = \underset{x\to+\infty}{O}(1).
\end{aligned}$$

Une écriture de la forme

$$f(x) = o(g(x)),\ x \to a$$

est lue comme « $f(x)$ *est* petit 'o' de $g(x)$ lorsque x tend vers a », et l'écriture de la forme

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to a$$

est lue comme « $f(x)$ *est* grand 'o' de $g(x)$ lorsque x tend vers a », mais il vaut mieux en penser comme « $f(x)$ est *de la forme* petit 'o' de $g(x)$… », « $f(x)$ est *de la forme* grand 'o' de $g(x)$… ».

Les notations « $o(f(x))$ » et « $O(f(x))$ » ne servent pas à « nommer » ou à « identifier » un terme d'une formule (comme le font les expressions comme « $\sin x$ » ou « $f'(x)$ »). Au lieu de cela, « $o(f(x))$ » et « $O(f(x))$ » sont écrits *à la place* de termes qui ont une certaine forme ou satisfont une certain propriété (voir la définition de o et O).

Ainsi, de première vue, le calcul avec o et O ne suit pas les règles usuelles de l'algèbre ou de l'arithmétique. Par exemple, il est vrai que

$$x^2 = O(x^2) = o(x) \quad \text{quand} \quad x \to 0,$$

mais il est *faux* que $o(x) = O(x^2)$ quand $x \to 0$, et également *faux* que $O(x^2) = x^2$ quand $x \to 0$.

La raison de ce comportement étrange de l'égalité est la convention que dès qu'un « o » ou un « O » est écrit à la place d'un terme d'une formule, aucune propriété de ce « terme caché » qui ne découle pas de la définition de o et O ne peut plus être utilisée. Ainsi, la formule « $O(x^2) = x^2$ quand $x \to 0$ » est traitée comme fausse ou injustifiée car le « $O(x^2)$ » pourrait « cacher » $2x^2$ ou x^3 aussi bien que x^2.

Voici quelques règles de calcul avec o et O faciles à démontrer. Dans chacune de ces règles, il faut sous-entendre qu'il y a « $x \to a$ » qui n'est pas écrit pour simplicité.

(1)
$$o(f(x)) = O(f(x)).$$

(2) Pour toute constante α,
$$\alpha \cdot o(f(x)) = o(\alpha f(x)) = o(f(x)),$$
$$\alpha \cdot O(f(x)) = O(\alpha f(x)) = O(f(x)).$$

(3)
$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x)) = f(x) \cdot o(g(x)),$$
$$f(x) \cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x)) = f(x) \cdot O(g(x)).$$

(4)
$$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x)),$$
$$O(f(x)) - O(f(x)) = O(f(x)).$$

(5)

$$o(f(x)) \cdot O(g(x)) = o(f(x)g(x)),$$
$$O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x)g(x)).$$

(6)

$$o(o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$o(O(f(x)) = o(f(x)),$$
$$O(o(f(x)) = o(f(x)),$$
$$O(O(f(x)) = O(f(x)).$$

(7)

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1).$$

Lorsque un o apparaît dans le dénominateur d'un quotient, on peut parfois appliquer la proposition suivante.

Proposition. *Soient f, g, h trois fonctions réelles d'une variable réelle définies au voisinage de a, sauf peut-être en a. Supposons que*

$$f(x) = O(g(x)), \quad \frac{1}{g(x)} = O(1), \quad h(x) = O(g(x)) \quad \textit{quand} \quad x \to a.$$

Alors

$$\frac{f(x)g(x) + o(h(x))}{g(x) + o(h(x))} = f(x) + o(h(x)) \quad \textit{quand} \quad x \to a.$$

(On peut aussi démontrer une proposition un peu similaire pour le cas de O.)

Esquisse d'une démonstration. Soit q une fonction telle que

$$q(x) = \frac{f(x)g(x) + o(h(x))}{g(x) + o(h(x))}$$

quand $x \to a$. Il suffit de montrer que

$$q(x) = f(x) + o(h(x))$$

quand $x \to a$.

Soient ϵ_1 et ϵ_2 deux fonctions définies au voisinage de a, sauf peut-être en a, telles que au voisinage de a, sauf peut-être en a,

$$q(x) = \frac{f(x)g(x) + \epsilon_1(x)h(x)}{g(x) + \epsilon_2(x)h(x)},$$

2025-01-23T14 :27

et que

$$\epsilon_1(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \quad \epsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Alors

$$\begin{multline*}\frac{f(x)g(x)+\epsilon_1(x)h(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}\\ = \frac{f(x)g(x)+f(x)\epsilon_2(x)h(x)-f(x)\epsilon_2(x)h(x)+\epsilon_1(x)h(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}\\ = f(x)+\frac{-f(x)\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}h(x).\end{multline*}$$

Posons

$$\epsilon_3(x) = \frac{-f(x)\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}.$$

Alors

$$q(x) = f(x)+\epsilon_3(x)h(x) \quad \text{(au voisinage de } a\text{, sauf peut-être en } a\text{)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\lim_{x\to a}\epsilon_3(x) = 0$.

On calcule :

$$\begin{multline*}\frac{-f(x)\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}\\ = \left(\frac{-f(x)}{g(x)}\cdot\epsilon_2(x)+\epsilon_1(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\cdot\frac{g(x)}{g(x)+\epsilon_2(x)h(x)}\\ = \left(\frac{O(g(x))}{g(x)}\cdot o(1)+o(1)O(1)\right)\cdot\frac{g(x)}{g(x)+o(g(x))}\\ = \big(O(1)o(1)+o(1)O(1)\big)\cdot\frac{1}{1+o(1)} = o(1)\cdot(1+o(1)) = o(1).\end{multline*}$$

□

Corollaire. *Supposons que*

$$f(x) = a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

et

$$g(x) = b_0+b_1(x-x_0)+\cdots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

quand $x\to x_0$, *où* $n\geqslant 0$. *Supposons en plus que* $b_0\neq 0$. *Posons*

$$A = a_0+a_1X+\cdots+a_nX, \quad B = b_0+b_1X+\cdots+b_nX,$$

et Q le quotient de la division selon les puissances croissantes d'ordre n de A par B. Ainsi, pour résumer les hypothèses essentielles,

$$\begin{aligned}
&f(x) = A(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),\\
&g(x) = B(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n), \qquad B(0)\neq 0,\\
&A = BQ + X^{n+1}P\\
&(A,B,Q,P\in \mathbf{R}[X]).
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

quand $x\to x_0$.

Exemple. Admettons qu'on sait que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

Alors, comme

$$X - \frac{X^3}{6} = \left(1-\frac{X^2}{2}\right)\left(X+\frac{X^3}{3}\right) + \frac{X^5}{6},$$

on obtient que

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

VII. Dérivées

CHAPITRE-BROUILLON

VII.1. Dérivabilité et la fonction dérivée

Définition. Soit $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction d'une variable réelle, $D \subset \mathbf{R}$.

(1) La fonction f est dite *dérivable en* un point $a \in D$ si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

(2) L'ensemble des points où f est dérivable s'appelle le *domaine de dérivabilité* de f.

(3) La fonction f est dite *dérivable* si et seulement si elle est dérivable en tout point de son domaine de définition D.

(4) Pout tout point a dans le domaine de dérivabilité de f, la valeur de la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

s'appelle la *valeur dérivée* de f en a et est notée $f'(a)$.

(5) La *fonction dérivée* de f est la fonction, notée f', qui à tout point x du domaine de dérivabilité de f associe la valeur dérivée de f en x.

Ainsi, la fonction dérivée f' d'une fonction f peut être définie par cette formule-là :

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

ou par celle-ci :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Définition. Une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, est dite *dérivable sur* une partie $A \subset D$ si et seulement si la restriction $f|_A$ est dérivable.

Exercice. Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$x \mapsto 1, \quad x \mapsto x, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Exercice. (1) Prouver que $\sin' 0 = 1$ et $\cos' 0 = 0$ à partir des limites remarquables.

(2) Calculer les dérivées des fonctions sinus et cosinus.

Exercice. (1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Montrer que le domaine de dérivabilité de f est $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt[3]{x \sin^2 x}$. Montrer que le domaine de dérivabilité de g est $\mathbf{R}$ et calculer $g'(0)$.

Proposition. *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Pour $x \neq a$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \qquad \square$$

Remarque. Il existe des fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues partout dans $\mathbf{R}$ mais dérivables nulle part.

Soit $a \in D$. Alors pour tout $x \in D \setminus \{a\}$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Si f est dérivable en a, le facteur $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a. En remplaçant ce facteur par son limite en a, on obtiendra la définition d'une fonction affine $L\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Définition. Si f est dérivable en a, la fonction $L\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par la formule

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est dite la *linéarisation* de f en a.

Proposition. *Une fonction affine $L\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la linéarisation de f en a si et seulement si $L(a) = f(a)$ et $L'(a) = f'(a)$.*

VII.2. Interprétation géométrique

Pour une fonction f réelle d'une variable réelle, $f'(a)$ est la pente de la droite tangente au graphe de f en point des coordonnées $(a, f(a))$. Voici une équation de cette tangente en coordonnées (x, y), où $b = f(a)$ et $c = f'(a)$:

$$y - b = c(x - a).$$

Une autre façon d'écrire une équation de la tangente est en utilisant la linéarisation L de f en a :

$$y = L(x).$$

VII.3. Dérivées itérées

Si on dérive une fonction $f\colon D \to \mathbf{R}$, avec $D \subset \mathbf{R}$, on obtient une fonction f', la fonction dérivée de f. Si on dérive la fonction f', on obtient la fonction $(f')'$, aussi notée f'', qui s'appelle la *dérivée* 2*-ième* de f. Si l'on continue ainsi, on obtiendra, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la *dérivée* n*-ième* de f, qui est notée $f^{(n)}$. Plus précisément, on pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Donc :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \quad \text{etc.}$$

Exercices. (1) Soit $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Trouver f', f'', f'''.

(2) Calculer les dérivées 2000-ièmes de sin et de cos.

VII.4. Notation

Il existe des différentes notations pour les fonctions dérivées.

VII.4.1. Notation de Lagrange

Voici un exemple d'utilisation de la notation de Lagrange :

Si $f(x) = \sin x$, alors

$$\begin{aligned} &f' = \cos, \qquad f'' = -\sin, \\ &f'(x) = \cos(x), \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'(0) = 1. \end{aligned}$$

Si $f(x) = x^2$, alors

$$f'(x) = 2x, \qquad f''(x) = 2, \qquad f'(-1) = -2.$$

Les dérivées itérées sont définies par récurrence :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

VII.4.2. Notation de Newton

Voici un exemple d'utilisation de la notation de Newton :

Si la coordonnée x d'un object mobile au moment t est $x(t) = \sin t$, alors la dérivée et la dérivée seconde de x par rapport à t sont

$$\dot{x}(t) = \cos t, \qquad \ddot{x}(t) = -\sin t.$$

2025-01-23T14 :27

VII.4.3. Notation d'Arbogast

Voici un exemple d'utilisation de la notation d'Arbogast :

Si $f(x) = \sin x$, alors

$$\begin{aligned}&Df = \cos, \qquad D^2 f = -\sin,\\ &(Df)(x) = \cos(x), \qquad (D^2f)(x) = -\sin x, \qquad (Df)(0) = 1.\end{aligned}$$

Si $f(x) = x^2$, alors

$$(Df)(x) = 2x, \qquad (D^2f)(x) = 2, \qquad (Df)(-1) = -2.$$

Les dérivées itérées sont définies par récurrence :

$$D^0 f = f, \quad D^{n+1} f = D(D^n f).$$

VII.4.4. Notation de Leibniz

Voici un exemple d'utilisation de la notation de Leibniz :

Si $f(x) = \sin x$, alors

$$\begin{aligned}&\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,\\ &\frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x,\\ &\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=0}(\sin x) = 1.\end{aligned}$$

Si $f(x) = x^2$, alors

$$\begin{aligned}&\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x,\\ &\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2,\\ &\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=-1}(x^2) = -2.\end{aligned}$$

Les dérivées itérées sont définies par récurrence :

$$\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x), \qquad \frac{d^1 f(x)}{dx^1} = \frac{df(x)}{dx}, \qquad \frac{d^{n+1} f(x)}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right).$$

Par exemple :

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d^2}{dx^2}x^3 = 6x, \quad \frac{d^3}{dx^3}x^3 = 6, \quad \frac{d^n}{dx^n}x^3 = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 4.$$

VII.5. Propriétés et calcul

La dérivée d'une fonction constante définie sur un intervalle I non réduit à un seul point est la fonction zéro sur I.

Théorème. (1) *Les combinaisons linéaires des fonctions $f, g\colon D \to \mathbf{R}$ dérivables en a sont dérivables en a, et, quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

(2) *Le produit des fonctions $f, g\colon D \to \mathbf{R}$ dérivables en a est dérivable en a, et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Cette formule s'appelle la règle de Leibniz.

(3) *Le quotient des fonctions $f, g\colon D \to \mathbf{R}$ dérivables en a est dérivable en a s'il y est défini (c'est-à-dire, si $g(a) \neq 0$), et, dans ce cas,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbf{R}$. La dérivée d'une fonction polynomiale est aussi une fonction polynomiale. Si p est une fonction polynomiale définie par un polynôme P de degré n, alors sa dérivée n-ième $p^{(n)}$ est constante, est sa dérivée $(n+1)$-ième $p^{(n+1)}$ est nulle.

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition. La dérivée d'une fonction rationnelle est aussi une fonction rationnelle.

Exercice. Calculer les dérivées des fonctions tan et cot.

Théorème (Dérivée de la fonction composée)**.** *Soient $f\colon A \to B$, $g\colon B \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$. Si f est dérivable en $a \in A$, et que g est dérivable en $b = f(a) \in B$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a, et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a).$$

Démonstration. Posons

$$p(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{et} \quad q(h) = \frac{g(b+h) - g(b)}{h}$$

pour $h \neq 0$. Posons $p(0) = f'(a)$ et $q(0) = g'(b)$. Alors p et q sont continues en 0, et on a les identités :

$$f(a+h) = f(a) + p(h)h, \qquad g(b+h) = g(b) + q(h)h.$$

On cherche à montrer que

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} g'(b)f'(a).$$

En effet,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g\Big(f(a+h)\Big)=g\Big(f(a)+p(h)h\Big)\\ &= g\Big(b+p(h)h\Big)\\ &= g(b)+q\Big(p(h)h\Big)p(h)h,\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h} &= \frac{g\Big(f(a+h)\Big)-g(b)}{h}\\ &= q\Big(p(h)h\Big)p(h)\xrightarrow[h\to 0]{} q(0)f'(a)=g'(b)f'(a). \quad \square\end{aligned}$$

Théorème (Dérivée de la fonction réciproque)**.** *Soit $f\colon D\to \mathbf{R}$ une fonction strictement monotone. Supposons que f est définie au voisinage de $a\in D$, dérivable en a, et que $f'(a)\neq 0$. Alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b=f(a)$, et*

$$(f^{-1})'(b)=(f'(a))^{-1}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

Remarque. Si l'on admet que les fonctions f et f^{-1} sont toutes les deux dérivables, alors on peut déduire la formule pour $(f^{-1})'$ de la règle de dérivation de la fonction composée comme suit :

$$\begin{aligned}f(f^{-1}(y))=y \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\Big(f(f^{-1}(y))\Big)=1 \quad \Leftrightarrow\\ &\quad f'(f^{-1}(y))\cdot(f^{-1})'(y)=1 \quad \Leftrightarrow \quad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.\end{aligned}$$

On admet sans démonstration le lemme suivant.

Lemme. *Si f est strictement monotone sur son domaine de définition et définie au voisinage de a, alors f^{-1} est continue en $f(a)$.*

Esquisse d'une démonstration du théorème. Notons J l'ensemble image de f (noté parfois $f(I)$). Soit $y\in J$ différent de b. Alors $f^{-1}(y)\neq a$ et

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{f^{-1}(y)-a}{f(f^{-1}(y))-f(a)}=\frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a}}.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \underset{y \to b}{\longrightarrow} f'(a).$$

On sait que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a),$$

donc il suffirait de vérifier que $f^{-1}(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} a$. Cela résulte de la continuité de f^{-1} en a, ce qui est affirmé par le lemme admis ci-dessus. □

En admettant toutes les hypothèses nécessaire, on peut résumer :

(1) la valeur dérivée de l'identité est 1 :

$$(\mathrm{id}_I)'(x) = 1,$$

(2) la valeur dérivée de la composée est le produit des valeurs dérivées :

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) f'(x),$$

où $y = f(x)$,

(3) la valeur dérivée de la réciproque est le réciproque de la valeur dérivée :

$$(f^{-1})'(x) = (f'(y))^{-1},$$

où $x = f(y)$.

Exercice. Calculer les dérivées des fonctions ln, arcsin, arccos, arctan.

Dérivées des quelques fonctions élémentaires usuelles

La dérivée d'un fonction constante $x \mapsto a$ est la fonction nulle : $\frac{da}{dx} = 0$.
La dérivée de la fonction identité $x \mapsto x$ est la fonctions constante $x \mapsto 1$: $\frac{dx}{dx} = 1$.
Voici des formules pour les dérivées des fonctions puissances :

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \qquad \text{si } n \in \mathbf{Z} \text{ et } n \neq 0,$$
$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \qquad \text{si } n \in \mathbf{Z} \text{ et } n \geqslant 2,$$
$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \text{pour } x > 0 \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

Voici des formules pour les dérivées de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme naturel :

$$\frac{d}{dx}\exp x = \exp x, \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Voici des formules pour les dérivées des fonctions trigonométriques et des fonctions trigonométriques inverses :

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x,$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = \frac{-1}{\sin^2 x},$$
$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Voici des formules pour les dérivées des fonctions hyperboliques :

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x.$$

VII.6. Primitives

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonction, $D \subset \mathbf{R}$, et I un intervalle dans D ($I \subset D$). Une *primitive* de f sur I est une fonction $F\colon I \to \mathbf{R}$ telle que

$$F'(t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Proposition. *Si F est une primitive de f sur I, alors pour toute constante C, la fonction $G\colon I \to \mathbf{R}$ définie par $G(t) = F(t) + C$ est aussi une primitive de f sur I.*

Démonstration. Pour tout $t \in I$, $G'(t) = F'(t) + 0 = f(t)$. □

Théorème. *Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle I, alors la fonction $F - G$ est constante.*

Démonstration. Posons $H = F - G$. Alors, pour tout $t \in I$, $H'(t) = F'(t) - G'(t) = f(t) - f(t) = 0$. D'où, par un corollaire du théorème des accroissements finis, H est constante sur I. □

Exemples. (1) Une primitive de sin est $-$cos.

(2) Une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction donnée par l'expression x^2 est donnée par l'expression $\frac{x^3}{3}$.

(3) Une primitive sur $]0,\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est le logarithme naturel ln. Une primitive sur $]-\infty,0[$ de la même fonction est $x \mapsto \ln(-x)$.

(4) Trouvons une primitive (sur $\mathbf{R}$) de la fonction donnée par l'expression xe^{x^2} :

$$xe^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2}\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}\frac{e^{x^2}}{2}.$$

(5) Trouvons une primitive (sur $\mathbf{R}$) de la fonction donnée par l'expression xe^{x} :

$$\begin{aligned} xe^x &= x\frac{d}{dx}e^x = x\frac{d}{dx}e^x + \Big(\frac{d}{dx}x\Big)e^x - \Big(\frac{d}{dx}x\Big)e^x \\ &= \frac{d}{dx}xe^x - \Big(\frac{d}{dx}x\Big)e^x = \frac{d}{dx}xe^x - e^x = \frac{d}{dx}xe^x - \frac{d}{dx}e^x \\ &= \frac{d}{dx}(xe^x - e^x). \end{aligned}$$

Théorème. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonctions, $D \subset \mathbf{R}$, et I un intervalle dans D ($I \subset D$) qui n'est pas réduit à un seul point. Si f est continue sur I, alors f admet une primitive sur I.*

On va admettre ce théorème sans démonstration. Une démonstration usuelle de ce fait utilise la notion et les propriétés de l'*intégrale de Riemann*. En fait, en utilisant la notion de l'intégrale de Riemann, on peut énoncer un théorème plus précis.

Théorème. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonctions, $D \subset \mathbf{R}$, et I un intervalle dans D ($I \subset D$) qui n'est pas réduit à un seul point. Supposons que f est continue sur I. Soit $a \in I$, et soit la fonction $F\colon I \to \mathbf{R}$ définie par la formule :*

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,ds \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Alors $F'(t) = f(t)$ pour tout $t \in I$.

VII.7. Dérivées directionnelles et dérivées partielles

Définition. Soit f une fonction réelle de n variables réelles :

$$f\colon D \to \mathbf{R}, \quad D \subset \mathbf{R}^n.$$

Si $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur, alors la *dérivée directionnelle* de f suivant le vecteur $\boldsymbol{v}$ au point $\boldsymbol{x} \in D$, notée $(\nabla_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{x})$, est définie par la formule :

$$(\nabla_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h}.$$

La valeur $(\nabla_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{x})$ de la dérivée directionnelle de f suivant $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{x}$ peut être définie en utilisant la dérivée ordinaire d'une fonction réelle d'une variable réelle. Pour cela, posons $\phi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$. Alors $(\nabla_{\boldsymbol{v}} f)(\boldsymbol{x}) = \phi'(0)$.

Les propriétés des dérivées ordinaires peuvent être appliquées pour déduire des propriétés analogiques des dérivées directionnelles. En particulier, on peut retrouver les propriété habituelles par rapport à des opérations algébriques et une règle pour dériver de certaines fonctions composées :

(1) la dérivée d'une somme :

$$(\nabla_{\boldsymbol{v}}(f+g))(\boldsymbol{x}) = (\nabla_{\boldsymbol{v}}f)(\boldsymbol{x}) + (\nabla_{\boldsymbol{v}}g)(\boldsymbol{x}),$$

(2) la dérivée d'un produit (la règle de Leibniz) :

$$(\nabla_{\boldsymbol{v}}(fg))(\boldsymbol{x}) = (\nabla_{\boldsymbol{v}}f)(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})(\nabla_{\boldsymbol{v}}g)(\boldsymbol{x}),$$

(3) la dérivée d'une fonction composée, où f est une fonction réelle de n variables réelles, et g est une fonction réelle d'une variable réelle :

$$(\nabla_{\boldsymbol{v}}(g\circ f))(\boldsymbol{x}) = g'(f(\boldsymbol{x}))(\nabla_{\boldsymbol{v}}f)(\boldsymbol{x}).$$

Un cas particulier d'une dérivée directionnelle est une *dérivée partielle.*

Définition. Soit $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction réelle de n variables réelles. Alors la k-ième *dérivée partielle* de f, notée $\nabla_k f$, est la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur $\boldsymbol{e}_k$:

$$\nabla_k f \overset{\text{déf}}{=} \nabla_{\boldsymbol{e}_k} f.$$

En particulier, si $f\colon D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}^2$, est une fonction de deux variables réelles, alors

$$(\nabla_1 f)(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},$$
$$(\nabla_2 f)(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

En plus des notations formelles, comme celles avec « ∇_k », les dérivées partielles sont souvent écrites en utilisant des expressions avec « $\frac{\partial}{\partial x}$ », dans l'esprit de la notation de Leibniz pour les dérivées ordinaires. On écrit, par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z),$$

au lieu de $(\nabla_3 f)(x,y,z)$.

Le choix entre les usages de « $\frac{\partial}{\partial x}$ » et de « $\frac{d}{dx}$ » est basé sur le contexte : est-ce qu'il s'agit de la dérivée ordinaire d'une fonction d'une variable réelle, ou est-ce qu'il s'agit de la dérivée partielle d'une fonctions de plusieurs variables réelles ?

Considérons, par exemple, l'expression « $x\sin z$ ». Si, dans le contexte actuel, cette expression définit la fonction $z\mapsto x\sin z$ d'une variable réelle, où x est un paramètre, alors on peut donner une expression pour la dérivée de cette fonction ainsi :

$$\frac{d}{dz}(x\sin z) = x\cos z.$$

Si, dans le contexte actuel, cette expression définit la fonction $(x,y,z)\mapsto x\sin z$ de trois variables réelles, alors on peut donner des expressions pour les dérivées partielles de cette fonction ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\sin z) = \sin z,\qquad \frac{\partial}{\partial y}(x\sin z) = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial z}(x\sin z) = x\cos z.$$

Exemples.

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2+z) = y^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(xy^2+z) = 2xy, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(xy^2+z) = 1,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(xy^2+z) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(xy^2+z) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y.$$

VII.8. Étude des extrema et des variations d'une fonction

Calcul des dérivées peut être appliqué à l'étude des extrema et des variations.

Théorème. *Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, une fonction et $a \in D$ un point où f atteint un extremum local. Supposons qu'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I \subset D$. Dans ce cas, si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Théorème (Théorème de Rolle)**.** *Soient $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, et $f\colon D \to \mathbf{R}$, $[a,b] \subset D \subset \mathbf{R}$, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Ce théorème porte le nome de Michel Rolle (1652–1719), un mathématicien français, qui publia un cas spécial de ce théorème pour les polynômes réels.

Esquisse d'une démonstration. Si f est constante sur $[a,b]$, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in [a,b]$. Il reste à considérer le cas où f n'est pas constante sur $[a,b]$.

D'après le théorème des bornes, $f|_{[a,b]}$ atteint son maximum global et son minimum global. Comme $f(a) = f(b)$, le maximum ou le minimum global de f sur $[a,b]$ est atteint à l'intérieur de $[a,b]$, c'est-à-dire dans $]a,b[$. Soit donc $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ ou $f(c) = \max_{[a,b]} f$. Alors $f'(c) = 0$ d'après le théorème précédent. □

Théorème (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, et $f\colon D \to \mathbf{R}$, $[a,b] \subset D \subset \mathbf{R}$, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

(*voir Fig. VII.1*).

Démonstration. Posons

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \qquad h(x) = f(x) - g(x).$$

Ainsi, g est la fonction affine telle que $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$, et $h(a) = h(b) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à h sur $[a,b]$, on conclut qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire que

$$f'(c) = g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

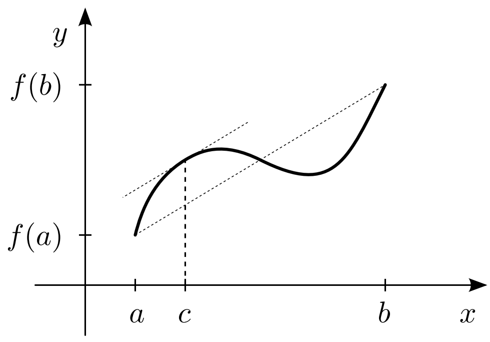

FIG. VII.1. : La pente d'une tangente est égale à la pente de la sécante.

Corollaire. *Si $f' = 0$ sur un intervalle I, alors f est constante sur I.*

Démonstration. Soient $x, y \in I$ arbitraires avec $x < y$. Montrons que $f(x) = f(y)$.

Soit $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Un tel c existe par le théorème des accroissements finis. Or, $f'(c) = 0$, car $c \in I$. Donc, $f(y) - f(x) = 0$. □

Corollaire. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors*

(1) *f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I,*

(2) *f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I,*

(3) *si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I,*

(4) *si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration. Il est assez facile de montrer que la dérivée d'une fonction croissante est positive (là où elle existe) et que la dérivée d'une fonction décroissante est négative (là où elle existe). Montrons seulement les implications dans l'autre sens, qui reposent sur le théorème des accroissements finis.

Soient $x, y \in I$ arbitraires avec $x < y$. Soit $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

(il existe par le théorème des accroissements finis).

(1) Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors $f'(c) \geqslant 0$, et donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$.

(2) Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors $f'(c) \leqslant 0$, et donc $f(y) - f(x) \leqslant 0$.

(3) Si $f' > 0$ sur I, alors $f'(c) > 0$, et donc $f(y) - f(x) > 0$.

(4) Si $f' < 0$ sur I, alors $f'(c) < 0$, et donc $f(y) - f(x) < 0$. □

VII.9. Règles de L'Hôpital

SECTION-BROUILLON

Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital (1661–1704), fut un mathématicien français. En 1696, il publia un livre sur le calcul différentiel « Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes » ; dans ce livre se trouve une proposition qui est à l'origine de différentes *règles de L'Hôpital.* Cependant, il paraît que l'auteur de la règle et d'autre résultats de ce livre fut Jean Bernoulli (1667–1748), un mathématicien et physicien suisse, avec qui Guillaume de L'Hôpital eut conclu un contrat.

Théorème (Règle de L'Hôpital simple pour « $\frac{0}{0}$ »)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbf{R}$ telles que :*

(1) $f(a) = g(a) = 0$,

(2) *f et g sont dérivables en a et $g'(a) \neq 0$,*

Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Démonstration.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$ □

Théorème (Théorème des accroissements finis généralisé)**.** *Soient $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, et f et g deux fonction à valeurs réelles continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Démonstration. Posons

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Alors

$$h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) \quad \text{et} \quad h(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a).$$

Donc $h(a) = h(b)$ et h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire,

$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0.$$

On peur récrire cette équation comme

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$ □

Théorème (Règle de L'Hôpital pour « $\frac{0}{0}$ »). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que :*

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,

(2) *g' ne s'annule pas sur $]a, b[$,*

(3)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $f(a) = g(a) = 0$ (on peut prolonger f et g en a par continuité et trouver la limite du quotient des prolongements).

Si $x \in]a, b[$, alors, par le théorème des accroissement finis généralisé, il existe c entre a et x tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Le reste est claire. □

Théorème (Règle de L'Hôpital pour « $\frac{\infty}{\infty}$ »). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que :*

(1) $\lim_{x\to a^+} g(x)$ *est infinie* $(\pm\infty)$,

(2) *g' ne s'annule pas sur $]a, b[$,*

(3)

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

VII.10. Rapport entre développements limités et dérivées itérées

SECTION-BROUILLON

VII.10.1. Développements limités d'ordre 1

Proposition. *Une fonction $f : D \to \mathbf{R}$ est dérivable en $x_0 \in D$ si et seulement si f est continue en x_0 et admet un développement limité en x_0 d'ordre 1, et dans ce cas*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est dérivable en x_0. Alors f est continue en x_0. Définissons une fonction ϵ par

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0, \\ 0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0).$$

On va vérifier que cela est le DL de f en x_0 d'ordre 1. Pour cela il suffit de montrer que $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$. Ce qui est effectivement vrai :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Supposons maintenant que f est continue en x_0 et y admet un DL d'ordre 1 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0,$$

D'où, par la continuité de f en x_0, $a_0 = f(x_0)$. On en déduit :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a_0 + a_1(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0) - a_0}{x - x_0}$$
$$= a_1 + \epsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a_1.$$

Ainsi f est dérivable en x_0 et $a_1 = f'(x_0)$. □

Remarque. Il existe des fonctions qui admettent en x_0 les développements limitées de tous les ordres mais qui ne sont même pas deux fois dérivables en x_0.

VII.10.2. Théorème de Taylor-Young, polynôme de Taylor

Lemme. *Si* $n \geqslant 1$ *et*

$$f^{(n)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = \cdots = f'(x_0) = f(x_0) = 0,$$

alors

$$f(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Démonstration. Pour montrer que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, on peut, par exemple, appliquer les règles de L'Hôpital n fois, ou on peut utiliser directement le théorème des accroissements finis $n-1$ fois, plus le fait que

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f^n(x_0) = 0.$$

(Cela est peut être le plus facile à faire par récurrence sur n.) □

Définition. Soient $f\colon D \to \mathbf{R}$ une fonctions réelle d'une variable réelle et $x_0 \in D$. Le *polynôme de Taylor* de f en x_0 de degré n est le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(X - x_0)^k.$$

Voici la propriété fondamentale du polynôme de Taylor. Si P est le polynôme de Taylor de f en x_0 de degré n, alors

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f(x_0), \quad P''(x_0) = f(x_0), \quad \ldots \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Clairement, $P^{(n+1)} = 0$ si $\deg P \leqslant n$.

Théorème (Théorème de Taylor-Young)**.** *Si* $f^{(n)}(x_0)$ *existe pour* $n \geqslant 1$, *alors* f *admet en* x_0 *un développement limité d'ordre* n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Démonstration. Posons

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad r(x) = f(x) - p(x).$$

Ainsi, si p est vu comme un polynôme (pas comme une fonction), alors c'est le polynôme de Taylor de f en x_0 d'ordre n. La fonction r représente le *reste* :

$$f(x) = p(x) + r(x).$$

2025-01-23T14 :27

Il suffit de montrer que $r(x) = o((x - x_0)^n)$, $n \to x_0$, c'est-à-dire, que

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^n} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Il est facile à calculer que

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p''(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots \quad p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

D'où,

$$r^{(n)}(x_0) = r^{(n-1)}(x_0) = \cdots = r'(x_0) = r(x_0) = 0,$$

Par le lemme précédent,

$$r(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

□

Remarque. Le théorème de Taylor-Young ne donne pas d'*estimation* explicite du reste du développement limité, il affirme seulement que le reste tend vers 0 « assez rapidement ». Si on a besoin d'une estimation plus pratique, on peut essayer d'utiliser d'autres théorèmes « de Taylor ». Par exemple, le *théorème de Taylor-Lagrange* affirme : si $f^{(n)}$ est continue en x_0, $f^{(n+1)}$ existe sur $]x_0, x[$, et f est continue en x, alors il existe $\xi \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

VII.10.3. Position du graphe d'une fonction par rapport à une tangente

Pour placer le graphe de f par rapport à une tangente au point a d'équation $y = bx + c$ ($b = f'(a)$, $c = f(a) - f'(a)a$), il faut déterminer si la différence $f(x) - bx - c$ est positive ou négative au voisinage de a.