Calcul vectoriel et géométrie analytique

Série pour L1 / bac + 1

Notes rédigées par Alexey Muranov

31 mars 2025

Table des matières

I. Introduction aux vecteurs

I.1. Exemples

Voici quelques exemples de *vecteurs* :

(1) Grandeurs vectorielles en physique ou en mécanique : force, vitesse, etc.

(2) Vecteurs libres de la forme $\overrightarrow{AB}$ en géométrie classique.

(3) Nombres réels, couples de nombres réels, triples de nombres réels, quadruples de nombres réels, etc.

(4) Diverses objets mathématiques qu'on peut additionner et multiplier par de scalaires (cela généralise les cas précédents).

Remarque. On ne peut additionner deux vecteurs que s'ils sont membres d'un même *espace vectoriel*. En particulier, on ne peut pas additionner un vecteur force avec un vecteur vitesse, ou un couple de réels avec un triple de réels.

I.2. Grandeurs vectorielles en physique

Certaines grandeurs physiques sont dites *scalaires*. Une grandeur scalaire est caractérisée par un unique nombre (qui peut varier dans l'espace et dans le temps), muni d'une unité.

Par exemple, la *pression* est une grandeur scalaire, elle peut être exprimée numériquement en *pascals* (Pa).

Si une grandeur physique est caractérisée non seulement par sa valeur numérique, mais aussi par son *direction* et son *sens*, alors elle est dite *vectorielle*.

Par exemple, une *force* exercée sur un *point matériel* est caractérisée par son intensité, sa direction, et son sens, et donc elle est une grandeur vectorielle.

Lorsque deux ou plusieurs forces sont exercées sur un même point matériel au même temps, elles peuvent être toutes remplacées par une seule force *résultante* sans changer l'effet sur le mouvement du point matériel. Ainsi, les forces peuvent être additionnées.

Pour calculer la force résultante de deux forces, et même seulement pour trouver son intensité, il ne suffit pas de connaître les intensités des forces données, mais il faut aussi connaître leurs directions et leurs sens.

En plus d'être additionnées, les forces peuvent être multipliées par des réels. Par exemple, pour une force donnée, on peut concevoir une force de la même direction et du même sens, mais 2 ou 3 fois plus intense. Si on multiplie une force par un nombre négatif, on obtient une force du sens opposé.

I.3. Vecteurs libres en géométrie classique

Quelques soient deux points A et B, ils déterminent un *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ de A vers B.

Parfois on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un *vecteur libre*[1] car il n'est pas spécialement lié aux points A et B. En effet, si A, B, C, et D sont quatre points tels qu'une même *translation* t « ramène » A sur B et C sur D (c'est-à-dire, $t(A) = B$ et $t(C) = D$), alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Ainsi, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

Deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux (coincident) si et seulement si les points A et B coincident.

Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le *vecteur nul*, noté « $\vec{\mathbf{0}}$ » : $\overrightarrow{AA} = \vec{\mathbf{0}}$.

Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ peuvent être additionnés pour donner un vecteur noté « $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ». Si $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$.

Tout vecteur $\boldsymbol{u}$ peut être multiplié par tout nombre réel α (dit un *scalaire*) pour donner un vecteur noté « $\alpha\boldsymbol{u}$ ».

I.4. n-uplets de réels comme vecteurs

Pour tout entier positif n, l'ensemble $\mathbf{R}^n$ des *n-uplets* de réels est un *espace vectoriel*, où les opérations vectorielles sont définies par les formules :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

[1] On parle de *vecteurs libres* lorsque on veut les distinguer de deux autre espèces de « vecteurs » qui apparaissent parfois en géométrie affine : les *vecteur liés* et les *vecteurs glissants*. Pour ces derniers on utilise des notations différentes : le vecteur lié de A vers B est noté « $[\overrightarrow{AB}]$ », et le vecteur glissant de A vers B est noté « $(\overrightarrow{AB})$ ». Les vecteurs liés et les vecteurs glissants ne sont pas des vecteurs dans le sens usuel du mot, et ils ne seront pas utilisés dans ce cours.

II. Espaces vectoriels et espaces affines

II.1. Espaces vectoriels

Les vecteurs libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace tridimensionnel en géométrie classique forment ce qui s'appelle un *espace vectoriel réel*, si on prend en compte les opérations définies sur les vecteurs libres.

De manière informelle, on peut dire qu'un *espace vectoriel réel* est un ensemble non vide de vecteurs où tous deux vecteurs peuvent être *additionnés*, et tout vecteur peut être *multiplié* par tout réel. Une définition précise est la suivante.

Définition. Un *espace vectoriel réel*[1] est un ensemble V muni :

(1) d'une opération d'*addition*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur somme $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathsf{V}$,

(2) d'un élément *nul* $\vec{\mathbf{0}}\in\mathsf{V}$ (il peut être noté « $\mathbf{0}$ » aussi),

(3) d'une opération de *soustraction*, qui à deux éléments $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de V associe leur différence $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in\mathsf{V}$,

(4) d'une operation de *multiplication* par des nombres réel, qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un nombre réel α associe un élément $\alpha\boldsymbol{x}\in\mathsf{V}$ (aussi noté « $\boldsymbol{x}\alpha$ »),

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathsf{V}$ et $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$:

(1) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$,

(2) $\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}=\boldsymbol{x}=\vec{\mathbf{0}}+\boldsymbol{x}$,

(3) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}$,

(4) $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$,

(5) $(\beta\alpha)\boldsymbol{x}=\beta(\alpha\boldsymbol{x})$,

(6) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$,

(7) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$,

(8) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont dits *vecteurs*.

Notation. Le vecteur nul d'un espace vectoriel V peut être noté « $\vec{\mathbf{0}}_{\mathsf{V}}$ » ou « $\mathbf{0}_{\mathsf{V}}$ ».

Définition. Deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ d'un même espace vectoriel sont dits *opposés* l'un de l'autre si et seulement si $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\vec{\mathbf{0}}$.

[1] De la même manière on peut définir les espaces vectoriels *rationnels* ou les espaces vectoriels *complexes*. En fait, pour le faire, il suffit de remplacer dans cette définition toute mention des nombres réels par une mention appropriée des rationnels ou des complexes (remplacer « $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ » par « $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$ » ou « $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ »).

Proposition. *Si $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{z}$ sont deux vecteurs opposés d'un même vecteur $\boldsymbol{y}$, alors $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$.*

Démonstration.

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\vec{\mathbf{0}}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}.$$ □

Ainsi, tout vecteur $\boldsymbol{x}$ admet un unique vecteur opposé, qui est $\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x}$.

Comme en arithmétique, on utilise la notation abrégée suivante :

Notation. Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur (d'un espace vectoriel), l'expression « $+\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}}+\boldsymbol{x}$ $(=\boldsymbol{x})$, et l'expression « $-\boldsymbol{x}$ » veut dire $\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x}$.

Ainsi, $-\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $\boldsymbol{x}$ (et $\boldsymbol{x}$ est le vecteur opposé de $-\boldsymbol{x}$).

Les 8 propriétés qui font partie de la définition d'un espace vectoriel réel (abstrait) sont dites *axiomes*.[2] Lorsque on considère un espace vectoriel réel abstrait, on *admet* que les axiomes soient satisfaits, car ils font partie de la définition.

Les vecteurs libres d'une droite, d'un plan ou d'un espace tridimensionnel en géométrie classique forment un exemple « concret » d'un espace vectoriel réel abstrait. (Pour le montrer, on doit vérifier que les 8 axiomes sont satisfaits.)

Exercice. Essayer de faire de dessins pour vérifier les 8 axiomes pour les vecteurs d'un plan.

À partir des 8 axiomes d'un espace vectoriel, on peut déduire d'autres propriétés, dont les suivantes :

(1) $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\vec{\mathbf{0}}$,

(2) $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$,

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$,

(4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$,

(5) $0\boldsymbol{x}=\vec{\mathbf{0}}$,

(6) $(\alpha-\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x}$,

(7) $\alpha\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$,

(8) $\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}$.

En effet :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}&\overset{(2)}{=}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})+\vec{\mathbf{0}}\\&\overset{(3)}{=}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x}))\\&\overset{(1)}{=}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x})\overset{(3)}{=}\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{x})\overset{(3)}{=}\vec{\mathbf{0}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}&\overset{(2)}{=}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\vec{\mathbf{0}}\\&\overset{(3)}{=}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y}))\\&\overset{(1)}{=}((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y})\overset{(3)}{=}\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

[2] En général, lorsque on définit une *structure algébrique* abstraite, les propriétés qui font partie de sa définition sont dites *axiomes*.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y} &\overset{(2)}{=} ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y}))\\ &\overset{(1)}{=} (((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y})\\ &\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y})\\ &\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{y})) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}} \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z} &\overset{(2)}{=} ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z})+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} ((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z}))\\ &\overset{(1)}{=} (((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{z})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z})\\ &\overset{(3)}{=} (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z})\\ &\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z}))\\ &\overset{(3)}{=} \boldsymbol{x}+(((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{z})+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z}))\\ &\overset{(1)}{=} \boldsymbol{x}+((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}+(\vec{\mathbf{0}}-\boldsymbol{z}))) \overset{(3)}{=} \boldsymbol{x}+((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})+\vec{\mathbf{0}}) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0\boldsymbol{x} &\overset{(2)}{=} 0\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} 0\boldsymbol{x}+(0\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-0\boldsymbol{x}))\\ &\overset{(1)}{=} (0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x})+(\vec{\mathbf{0}}-0\boldsymbol{x})\\ &\overset{(7)}{=} (0+0)\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-0\boldsymbol{x}) = 0\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-0\boldsymbol{x}) \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)\boldsymbol{x} &\overset{(2)}{=} (\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} (\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+(\beta\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}))\\ &\overset{(1)}{=} ((\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x})+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x})\\ &\overset{(7)}{=} ((\alpha-\beta)+\beta)\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\beta\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\vec{\mathbf{0}} &\overset{(2)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+(\alpha\vec{\mathbf{0}}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}))\\ &\overset{(1)}{=} (\alpha\vec{\mathbf{0}}+\alpha\vec{\mathbf{0}})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}})\\ &\overset{(8)}{=} \alpha(\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{0}})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}) \overset{(2)}{=} \alpha\vec{\mathbf{0}}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\vec{\mathbf{0}}) \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &\overset{(2)}{=} \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\vec{\mathbf{0}}\\ &\overset{(3)}{=} \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+(\alpha\boldsymbol{y}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}))\\ &\overset{(1)}{=} (\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\alpha\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y})\\ &\overset{(8)}{=} \alpha((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y})+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}) \overset{(3)}{=} \alpha\boldsymbol{x}+(\vec{\mathbf{0}}-\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

L'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ est un exemple très simple d'un espace vectoriel réel. Il est en effet facile de vérifier que l'ensemble $\mathbf{R}$ muni de ses opérations d'addition et de soustraction, de son élément 0, et de l'opération de multiplication des réels par des réels, satisfait les 8 axiomes.

Parmi d'autres exemples courants des espaces vectoriels réels il y a :

(1) l'ensemble $\mathbf{R}^2$ des couples de réels, l'ensemble $\mathbf{R}^3$ des triples de réels, ainsi que les ensembles $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^5$, $\mathbf{R}^6$, etc,

(2) l'ensemble $\{0\}$,

(3) l'ensemble $\mathbf{C}$ des *nombres complexes*,

(4) l'ensemble $\mathbf{R}[X]$ des *polynômes* à coefficients réels en une *indéterminée* X,

(5) l'ensemble $C(I,\mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur un interval I donnée.

Plus précisément, pour chacun de ces ensembles, si on le munira des opérations d'addition et de soustraction, de l'élément nul, et de l'opération de multiplication par des réels d'une manière « naturelle », on pourra montrer que les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel seront satisfaits.

II.2. Espaces vectoriels R^n

Rappelons nous qu'on note « $\mathbf{R}$ » l'ensemble des nombres réels.

Notation. Soit n un nombre naturel. On note « $\mathbf{R}^n$ » l'ensemble des *n-uples* d'éléments de $\mathbf{R}$. (De la même manière, « $\mathbf{Z}^n$ » dénote l'ensemble des n-uples d'entiers, « $\mathbf{Q}^n$ » dénote l'ensemble des n-uples de rationnels, etc.)

Ainsi, $\mathbf{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels, $\mathbf{R}^3$ est l'ensemble des triples de réels, $\mathbf{R}^4$ est l'ensemble des quadruples de réels, et ainsi de suite. L'ensemble $\mathbf{R}^0$ ne contient qu'un seul élément – le 0-uple (). On va éviter de parler de $\mathbf{R}^0$ pour des raisons pédagogiques, car à première vue ce cas peut paraître peu intuitif et différent des autres.

Pour tout nombre naturel non nul n, on va doter $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'un espace vectoriel réel. Pour cela il suffit de définir les opérations d'addition et de soustraction, l'élément nul, et l'opération de multiplication par de réels de manière qu'ils satisfassent les 8 axiomes. On les définit ainsi :

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\dots,\beta_n)\overset{\text{déf}}{=}(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n),$$
$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)-(\beta_1,\dots,\beta_n)\overset{\text{déf}}{=}(\alpha_1-\beta_1,\dots,\alpha_n-\beta_n),$$
$$\vec{\mathbf{0}}\overset{\text{déf}}{=}(0,\dots,0),$$
$$\beta(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\overset{\text{déf}}{=}(\beta\alpha_1,\dots,\beta\alpha_n).$$

(Ici α_i, β_i, β sont des réels.)

Exemple. $(1,2)+(3,4)=(4,6)$, $3(1,2)=(3,6)$, $(1,2)-(3,4)=(-2,-2)=-2(1,1)$.

Exercice. Vérifier que les opérations définies ci-dessus satisfont les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel.

Parfois les n-uples de réels sont écrits en colonne, par exemple :

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix},\quad \beta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\alpha_1\\ \vdots\\ \beta\alpha_n\end{pmatrix}.$$

En fait, en *calcul matriciel*, suivant les conventions établies, il est souvent pratique d'identifier les éléments de $\mathbf{R}^n$ avec des *matrices-colonnes*.

II.3. Espaces affines

Les points d'une droite, d'un plan ou d'un espace tridimensionnel en géométrie classique forment ce qui s'appelle un *espace affine réel*, si on prend en compte les opérations de translation par tous les vecteurs libres.

Définition. Soit V un espace vectoriel. Un *espace affine* de *direction* V est un ensemble E muni :

(1) d'une opération qui à deux éléments A et B de E associe un élément $\overrightarrow{AB}$ de V,

(2) d'une opération qui à un élément $\boldsymbol{x}$ de V et à un élément A de E associe un élément $A+\boldsymbol{x}$ de E,

tel que les identités suivantes soient satisfaites, pour tous $A,B\in\mathsf{E}$ et $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathsf{V}$:

(1) $A+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(A+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}$,

(2) $A+\overrightarrow{AB}=B$,

(3) $\overrightarrow{A(A+\boldsymbol{x})}=\boldsymbol{x}$.

Les éléments d'un espace affine sont dits *points*. La direction d'un espace affine est aussi dite l'espace vectoriel *associé* à cet espace affine.

On peut interpréter « $A+\boldsymbol{x}$ » comme le résultat de *translation* du point A par le vecteur $\boldsymbol{x}$, et on peut interpréter « $\overrightarrow{AB}$ » comme le vecteur par lequel il faut *translater* le point A pour obtenir le point B.

Notation. Pour deux points A et B d'un espace affine, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être noté « $B-A$ » et peut être dit la *différence* de B et A :

$$B-A\overset{\text{déf}}{=}\overrightarrow{AB}.$$

Notation. Lorsque un ensemble E est traité comme un espace affine, son espace vectoriel associé (sa direction) est parfois noté $\vec{\mathsf{E}}$.

L'ensemble des poins d'une droite, d'un plan ou d'un espace tridimensionnel en géométrie classique est un exemple d'un espace affine, si comme son espace vectoriel associé on prend l'ensemble des vecteurs géométriques libres de cette droite, ce plan, ou cet espace tridimensionnel.

Voici d'autres exemples d'espaces affines.

(1) Tout ensemble d'un seul point $\mathsf{E}=\{P\}$ est un espace affine si on prend $\vec{\mathsf{E}}=\{\vec{\mathbf{0}}\}$ comme l'espace vectoriel associé.

(2) Tout espace vectoriel E est aussi un espace affine et son propre espace vectoriel associé : $\vec{\mathsf{E}}=\mathsf{E}$. Si $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathsf{E}$, on définit $\overrightarrow{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}\overset{\text{déf}}{=}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$.

(3) Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et $\boldsymbol{v}\in\mathsf{E}$, alors $\mathsf{G}=\mathsf{F}+\boldsymbol{v}=\{\,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{x}\in\mathsf{F}\,\}$ est un espace affine, et $\vec{\mathsf{G}}=\mathsf{F}$.

(4) L'ensemble

$$\mathsf{F}=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x+y=1\,\}$$

est un espace affine. Son espace vectoriel associé est

$$\vec{\mathsf{F}}=\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x+y=0\,\}.$$

Exercice. Essayer de faire de dessins pour vérifier les 3 axiomes d'un espace affine pour les points et les vecteurs dans un plan.

À partir des 3 axiomes d'un espace affine réel et des 8 axiomes d'un espace vectoriel réel, on peut déduire d'autres propriétés, en particulier les suivantes :

(1) $A+\vec{\mathbf{0}}=A$,

(2) $\overrightarrow{AA}=\vec{\mathbf{0}}$,

(3) $\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{x}=\overrightarrow{A(B+\boldsymbol{x})}$,

(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

En effet :

$$A+\vec{\mathbf{0}}\overset{(2)}{=}(A+\overrightarrow{AA})+\vec{\mathbf{0}}\overset{(1)}{=}A+(\overrightarrow{AA}+\vec{\mathbf{0}})=A+\overrightarrow{AA}\overset{(2)}{=}A,$$

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{A(A+\vec{\mathbf{0}})} \overset{(3)}{=} \vec{\mathbf{0}},\\
&\underbrace{\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{A(A+(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}}))} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{A((A+\overrightarrow{AB})+\boldsymbol{x})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{A(B+\boldsymbol{x})},\\
&\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}} \overset{(3)}{=} \overrightarrow{A(A+(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\boldsymbol{x}}))} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{A((A+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{A(B+\overrightarrow{BC})} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{AC}.
\end{aligned}
$$

II.4. Espaces affines $\mathbf{R}^n$

Tout espace vectoriel E peut être vu comme un espace affine. Pour cela on utilise E comme son propre espace vectoriel associé (donc, $\vec{\mathsf{E}} = \mathsf{E}$), et on définit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{xy}} \overset{\text{déf}}{=} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \quad \text{pour tous} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathsf{E}.$$

Ainsi, les éléments d'un espace vectoriel E peuvent être traités comme vecteurs ou comme points, mais l'addition de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme l'addition de deux vecteurs ou comme l'addition d'un point et d'un vecteur. Pareil, la soustraction de deux éléments de E donne le même résultat indépendamment si on la regarde comme la soustraction entre deux vecteurs ou entre deux points.

Ainsi on munit chaque ensemble $\mathbf{R}^n$ d'une structure d'espace affine, en utilisant son structure d'espace vectoriel.

Exemple. Si $A = (1, 2)$ et $B = (3, 4)$ sont deux point de l'espace affine $\mathbf{R}^2$, alors $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2)$, et c'est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.

II.5. Bases et dimension d'un espace vectoriel

Définition. Une *combinaison linéaire* de vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ d'un espace vectoriel réel est un vecteur de la forme $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$.

Définition. Une famille $\mathcal{F} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E est dite *génératrice* de E si et seulement si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.

Définition. Une famille $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E est dite une *base* de E si et seulement si pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathsf{E}$, il existe un unique n-uple $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n.$$

Clairement, toute base de E est une famille génératrice de E.

Remarque. Ici on ne parle que de familles génératrices finies et bases finies. Il existe cependant des espaces vectoriels qui n'admettent pas de familles génératrices finies. Il est possible de généraliser les définitions et les énoncés des théorèmes pour « autoriser » les familles génératrices infinies et les bases infinies.

Définition. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est une base de E, $\boldsymbol{y}$ est un vecteur de E, et

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n,$$

alors les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ s'appellent les *coordonnées cartésiennes* de $\boldsymbol{y}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Notation. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ est une base de $\vec{\mathsf{E}}$ et $\boldsymbol{y}$ un élément de $\vec{\mathsf{E}}$, alors le n-tuple des coordonnées de $\boldsymbol{y}$ dans $\mathcal{B}$ peut être noté « $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$ » ou « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}]$ » ou « $[\boldsymbol{y}]^{\mathcal{B}}$ » ; ici on va adopter la deuxième notation. Ainsi :

$${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \dots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n.$$

Exemple. Si $\mathcal{B} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base et $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, alors ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{w}] = (-1, 2)$.

Les coordonnées des vecteurs peuvent être écrites en colonne, par exemple :

$$\text{« } {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ »}$$

(au lieu de « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] = (\alpha, \beta)$ »).

Pour toute base $\mathcal{B}$, les coordonnées dans $\mathcal{B}$ *respectent* les opérations vectorielles :

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] + {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}], & {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}] &= {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}] - {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{y}],\\
{}_{\mathcal{B}}[\vec{\mathbf{0}}] &= (0, \dots, 0), & {}_{\mathcal{B}}[\alpha\boldsymbol{x}] &= \alpha {}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{x}].
\end{aligned}
$$

Exemple. Soient les n éléments suivants dans $\mathbf{R}^n$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que la famille $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. Elle s'appelle la *base canonique* de $\mathbf{R}^n$.

Exercice. Vérifier que la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est effectivement une base de $\mathbf{R}^n$.

Théorème. *Toute famille génératrice minimale d'un espace vectoriel est une base de cet espace.*

Autrement dit, si une famille génératrice n'est pas une base, alors on peut enlever un élément de cette famille et obtenir une famille génératrice plus petite. Si on commence avec une famille génératrice finie et on enlève un par un des éléments « redondants », on finira par trouver une base.

Corollaire. *Si* E *est un espace vectoriel et* $\mathcal{F} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ *est une famille génératrice de* E, *alors on peut extraire de* $\mathcal{F}$ *une sous-famille qui est une base de* E.

Théorème. *Toutes les bases d'un espace vectoriel ont la même taille (le même nombre d'éléments).*

Définition. La *dimension* d'un espace vectoriel E, notée $\dim \mathsf{E}$, est le nombre d'éléments dans une n'importe quelle base de E.

Exemple. La dimension de $\mathbf{R}^n$ est n, car la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est composée de n vecteurs.

Proposition. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille génératrice à n éléments est une base de cet espace.*

Exercice. Prouver cette proposition en admettant les théorèmes précédents.

Définition. Un espace vectoriel de dimension 1 s'appelle une *droite vectorielle.* Un espace vectoriel de dimension 2 s'appelle un *plan vectoriel.*

II.6. Repères et dimension d'un espace affine

Définition. Un *repère* d'un espace affine E est composé d'un point de E, qui est appelé son *origine*, et d'une base de l'espace vectoriel associé $\vec{\mathsf{E}}$.

On va identifier le repère composé d'une origine A et d'une base $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ au $(n+1)$-uple $(A, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$.

Notation. Un repère $(A, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ peut être noté « $A\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n$ ».

Un espace affine E muni d'un repère est dit un *espace cartésien.* On dit aussi le repère donné définit dans E un *système de coordonnés cartésiennes.* En effet, un repère $(A, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ dans E permet d'associer à tout point B de E un unique n-uple de ses *coordonnées cartésiennes* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ par l'équation

$$\overrightarrow{AB} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n.$$

Ainsi, si E est un espace affine muni d'un repère $(A, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un n-uple de réels, alors le point de E de coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est le point

$$B = A + \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n.$$

Définition. La *dimension* d'un espace affine E est la dimension de son espace vectoriel associé $\vec{\mathsf{E}}$.

Définition. Un espace affine de dimension 1 s'appelle une *droite affine.* Un espace affine de dimension 2 s'appelle un *plan affine.*

II.7. Sous-espaces vectoriels

Une partie F d'un espace vectoriel E peut lui-même être un espace vectoriel par rapport aux opérations fournies par E. Dans ce cas cette partie F de E est dite un *sous-espace vectoriel* de E.

Définition. Soit E un espace vectoriel réel. Une partie F de E est dite un *sous-espace vectoriel* si et seulement si

(1) pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathsf{F}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathsf{F}$,

(2) pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathsf{F}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \mathsf{F}$,

(3) $\vec{0}_{\mathsf{E}} \in \mathsf{F}$,

(4) pour tous $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathsf{F}$, $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathsf{F}$.

Ici la condition (2) est en fait redondant, car elle résulte des conditions (1) et (4).

Exercice. Vérifier qu'une partie d'un espace vectoriel satisfait les 4 condition de la définition si et seulement si elle est un espace vectoriel par rapport aux opérations « héritées » de l'espace ambiant.

Exemple. Soient $\mathsf{E} = \mathbf{R}^2$ et $\mathsf{F} = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \,\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Proposition. *Si $\mathcal{F} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ est une famille de vecteurs dans un espace vectoriel E, alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.*

On note $\mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$:

$$\mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \overset{\text{déf}}{=} \{\, \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R} \,\}.$$

Clairement, $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ est une famille génératrice de $\mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$. On dit que le sous-espace $\mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ est *engendré* par $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$.

Vecteurs colinéaire et vecteurs coplanaires

Définition. Soit S un ensemble de vecteurs dans un espace vectoriel E. Alors les vecteurs de S sont dits *colinéaires* entre eux si et seulement si S est inclus dans une droite vectorielle D qui est un sous-espace de E. Les vecteurs de S sont dits *coplanaires* entre eux si et seulement si S est inclus dans un plan vectoriel P qui est un sous-espace de E.

Pour vérifier si les vecteurs d'un ensemble S sont colinéaires il suffit de vérifier s'il existe un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que tout vecteur de S soit un multiple de $\boldsymbol{u}$.

Pour vérifier si les vecteurs d'un ensemble S sont coplanaires il suffit de vérifier s'il existe deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ tels que tout vecteur de S est une combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

Théorème. (1) *Dans une droite vectorielle, tout vecteur non nul forme une base.*

(2) *Dans un plan vectoriel, tout couple de vecteurs non colinéaires forme une base.*

(3) *Dans un espace vectoriel de dimension 3, tout triple de vecteurs non coplanaires forme une base.*

II.8. Sous-espaces affines

Une partie F d'un espace affine E peut lui-même être un espace affine, et dans ce cas elle est dite un *sous-espace affine* de E. Par exemple, une droite affine peut faire partie d'un plan affine, et un plan affine peut faire partie d'un espace affine de dimension 3. Voici une définition formelle.

Définition. Soit E un espace affine réel avec l'espace vectoriel associé $\vec{\mathsf{E}}$. Une partie non vide F de E est dite un *sous-espace affine* de E si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel $\vec{\mathsf{F}}$ de $\vec{\mathsf{E}}$ tel que

(1) pour tous $M, N \in \mathsf{F}$, $\overrightarrow{MN} \in \vec{\mathsf{F}}$,

(2) pour tous $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{F}}$ et $M \in \mathsf{F}$, $M + \boldsymbol{u} \in \mathsf{F}$.

Dans ce cas, $\vec{\mathsf{F}}$ sera l'espace vectoriel associé à F.

Exemples. (1) Les plans et les droites de la géométrie classique sont exemples des espaces affines. Leurs espaces vectoriels associés sont les ensembles de leurs vecteurs libres. Une droite dans un plan est un sous-espace affine de ce plan.

(2) L'ensemble

$$\mathsf{F} = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1 \,\}$$

est un sous-espace affine de l'espace affine $\mathbf{R}^2$. Son espace vectoriel associé

$$\vec{\mathsf{F}} = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \,\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$.

Points alignés et poins coplanaires

Définition. Un ensemble de points est dite *aligné* si et seulement si il fait partie d'une droite affine. Un ensemble de points est dite *coplanaire* si et seulement si il fait partie d'un plan affine.

II.9. Présentation de sous-espaces vectoriels et affines

SECTION-BROUILLON

Présentation de sous-espace vectoriels par bases ou familles génératrices

Exemple. Soient $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ et $\boldsymbol{v} = (3, 2, 1)$ deux éléments de $\mathbf{R}^3$. Alors

$$\mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{\, s(1, 2, 3) + t(3, 2, 1) \mid s, t \in \mathbf{R} \,\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Présentation de sous-espaces affines par un point avec des vecteurs directeurs

Exemple. Soient $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ et $\boldsymbol{v} = (3, 2, 1)$ deux éléments de $\mathbf{R}^3$ vus comme vecteurs et $M = (1, 0, 0)$ un élément de $\mathbf{R}^3$ vu comme un point. Alors L'ensemble

$$\mathsf{F} = M + \mathsf{Vect}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{\, (1, 0, 0) + s(1, 2, 3) + t(3, 2, 1) \mid s, t \in \mathbf{R} \,\}$$

est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$. En plus, $M\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ est un repère de F.

Présentation par paramétrage

Exemple. L'ensemble

$$\mathsf{F} = \{\, (s + 3t, 2s + 2t, 3s + t) \mid s, t \in \mathbf{R} \,\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Exemple. L'ensemble

$$\mathsf{F} = \{\, (1 + s + 3t, 2s + 2t, 3s + t) \mid s, t \in \mathbf{R} \,\}$$

est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$.

Présentation par équations et systèmes d'équations linéaires

Exemple. L'ensemble

$$\mathsf{F} = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \,\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

Exemple. L'ensemble

$$\mathsf{F} = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x - 2y + z = 1 \,\}$$

est un sous-espace affine de $\mathbf{R}^3$.

II.10. Calcul dans un espace affine

SECTION-BROUILLON

Théorème (Un « métathéorème »). *On peut écrire « $(N-M)$ » au lieu de « $\overrightarrow{MN}$ » et utiliser les règles algébriques « usuelles » pour faire calcul avec les points et les vecteurs d'un espace affine.*

Exemple.

$$\begin{aligned} A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = A+\frac{1}{2}(B-A) = A+\frac{B}{2}-\frac{A}{2} = \frac{A}{2}+\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(A+B) \\ = \frac{1}{2}(A-B+2B) = \frac{1}{2}(A-B)+B = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+B = B+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

II.11. Combinaison affines et « vectoriels », barycentre

SECTION-BROUILLON

Théorème. *Soient n points $M_1, \dots, M_n$ dans un espace affine réel et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in$* $\mathbf{R}$.

(1) *Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, alors l'expression*

$$\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n$$

représente un vecteur v. Ce vecteur v peut être calculé par la formule

$$v = \alpha_1\overrightarrow{AM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{AM_n}$$

où A est un point arbitraire.

(2) *Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, alors l'expression*

$$\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n$$

représente un point G. Ce point G est uniquement déterminé par l'équation

$$\alpha_1\overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{\mathbf{0}}.$$

(3) *Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$, alors l'expression*

$$\frac{\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$$

représente un point G. Ce point G est uniquement déterminé par l'équation

$$\alpha_1\overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{\mathbf{0}}.$$

Définition. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, et $M_1, \dots, M_n$ sont n points dans un espace affine réel, alors on va appeler le vecteur

$$v = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n,$$

qui s'exprime aussi comme

$$v = \alpha_1\overrightarrow{AM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{AM_n}$$

avec A arbitraire, la *« combinaison vectorielle »* de $M_1, \dots, M_n$ avec coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (ce terme cependant n'est pas standard).

Définition. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, et $M_1, \dots, M_n$ sont n points dans un espace affine réel, alors le point

$$G = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n,$$

qui peut être déterminé par l'équation

$$\alpha_1\overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{\mathbf{0}},$$

s'appelle la *combinaison affine* de $M_1, \dots, M_n$ avec coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Définition. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$, et $M_1, \dots, M_n$ sont n points dans un espace affine réel, alors le point

$$G = \frac{\alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n},$$

qui peut être déterminé par l'équation

$$\alpha_1\overrightarrow{GM_1} + \dots + \alpha_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{\mathbf{0}},$$

s'appelle le *barycentre* des *points pondérés* $(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)$ (points affectés des coefficients — « poids »).

Théorème. *Soient $A_1, \dots, A_m$, $B_1, \dots, B_n$ des $m+n$ points dans un espace affine et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ des réels tels que*

(1) $\alpha_1 + \dots + \alpha_m \neq 0$,

(2) $\beta_1 + \dots + \beta_n \neq 0$,

(3) $\alpha_1 + \dots + \alpha_m + \beta_1 + \dots + \beta_n \neq 0$.

Soient F le barycentre de (A_1, α_1), ..., (A_m, α_m) et G le barycentre de (B_1, β_1), ..., (B_n, β_n). Alors le barycentre de (A_1, α_1), ..., (A_m, α_m), (B_1, β_1), ..., (B_n, β_n) est aussi le barycentre de $(F, \alpha_1 + \dots + \alpha_m)$ et $(G, \beta_1 + \dots + \beta_n)$.

II.12. Convexité

SECTION-BROUILLON

Définition. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}_+$ sont n réels positifs tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, et $M_1, \dots, M_n$ sont n points dans un espace affine réel, alors le point

$$\alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_n M_n$$

s'appelle la *combinaison convexe* de $M_1, \dots, M_n$ avec coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Ainsi toute combinaison convexe est une combinaison affine.

Proposition. *Si A et B sont deux points d'un espace affine, alors l'ensemble des combinaisons convexes de A et B est le segment $[A, B]$ (de la droit affine qui passe par A et B).*

Définition. L'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points d'une partie S d'un espace affine s'appelle l'*enveloppe convexe* de S.

Par exemple, l'enveloppe convexe de deux point distincts est le segment, l'enveloppe convexe de trois points non alignés est le triangle plein, etc.

Définition. Une partie S d'un espace affine réel est dite *convexe* si et seulement si pour tous n points $M_1, \dots, M_n \in S$, toute combinaison convexe de $M_1, \dots, M_n$ est aussi dans S.

En d'autres termes, une partie d'un espace affine est convexe si et seulement si elle coïncide avec son enveloppe convexe.

Proposition. *Une partie S d'un espace affine réel est convexe si (et seulement si) pour tous $A, B \in S$, le segment $[A, B]$ est inclus dans S.*

II.13. Orientation

Définition. Deux bases $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ et $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ d'un espace vectoriel réel E sont dites avoir la même *orientation* si $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ peut être transformée continûment en $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ (en transformant $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ en $\boldsymbol{f}_2$, et ainsi de suite) de telle façon, qu'en tout moment de sa transformation, la famille reste une base de E.

Exemple. Soit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base dans un plan. Alors $(2\boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{a})$, et $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, -2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$ sont des bases de la même orientation que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, mais $(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b})$ n'ont pas la même orientation que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Cependant, $(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et $(\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b})$ ont la même orientation entre elles. (À voir sur un dessin.)

Théorème. *Tout espace vectoriel réel de dimension finie admet exactement deux orientations différentes.*

Définition. Les deux orientations différentes d'un espace vectoriel de dimension finie sont dites *opposées* l'une de l'autre. *Orienter* un espace vectoriel veut dire déclarer une de ses orientations *positive*, et l'orientation opposée *négative*.

Définition. Dans un espace vectoriel orienté, toute base d'orientation positive est dite *directe*, et toute base d'orientation négative est dite *indirecte*.

Définition. Orienter un espace affine veut dire orienter son espace vectoriel associé.

Définition. Dans un espace affine orienté, un repère est dit *direct* si sa base est directe, et il est dit *indirect* si sa base est indirecte.

L'*orientation canonique* de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est celle où la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est directe.

II.14. Volumes de parallélépipèdes

SECTION-BROUILLON

La notion de *volume* (n-dimensionnel) dans un espace vectoriel ou affine de dimension n est bien définie, même si en général il n'y a pas de l'unité de volume canonique.

En particulier, si $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ et $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ sont deux bases d'un espace vectoriel, alors le rapport des volumes des parallélépipèdes n-dimensionnels « portés » par ces bases est un scalaire bien défini.

Si un espace vectoriel est muni d'un *produit scalaire*, il y a un choix canonique pour l'unité de volume : le volume d'un cube unité (d'un cube « porté » par une base orthonormée).

III. Introduction aux déterminants

III.1. Introduction au déterminant d'une famille de vecteurs

Il existe une opération spéciale qui à toute base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension n et à toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs dans E associe un nombre réel qui s'appelle le *déterminant* de $\mathcal{F}$ par rapport à $\mathcal{B}$, et qu'on note $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$. Voici quelques propriétés remarquables de cette opération, où on considère un espace vectoriel E de dimension n :

(1) pour toute famille $\mathcal{F}$ à n éléments dans E, et pour toutes deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E,

$$\Big(\det_{\mathcal{B}} \mathcal{C}\Big)\Big(\det_{\mathcal{C}} \mathcal{F}\Big) = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F},$$

(2) pour toutes deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E,

$$\Big(\det_{\mathcal{C}} \mathcal{B}\Big)\Big(\det_{\mathcal{B}} \mathcal{C}\Big) = 1,$$

(3) pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1,$$

(4) pour toute famille $\mathcal{F}$ à n éléments dans E, et pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0,$$

(5) pour toutes deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E,

$$\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C} \text{ ont la même orientation} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}} \mathcal{C} > 0.$$

III.2. Déterminant d'un couple

Soit P un plan vectoriel.

Définition. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base du plan vectoriel P. À tout couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de P on associe leur *déterminant* par rapport à $\mathcal{B}$, qui est un nombre réel noté $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. L'opération

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

est complètement déterminée par les identités suivantes, où les variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ représentent des vecteurs quelconques de P, et α représente un nombre réel quelconque :

(1) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en premier argument*),

(2) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \alpha\boldsymbol{v}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *linéaire en deuxième argument*),

(3) $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$
(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *alternée*, en tant qu'une opération *bilinéaire*),

(4) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

Proposition. *Cette définition est correcte : pour toute base $\mathcal{B}$ de P, il existe une unique opération $\det_{\mathcal{B}}$ qui à chaque couple de vecteurs de P associe un réel et qui satisfait les quatre propriétés données.*

La propriété suivante découle des propriétés données dans la définition :

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = -\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

(l'opération $\det_{\mathcal{B}}$ est *antisymétrique*, en tant qu'une opération bilinéaire).

Exercice. Démontrer cette identité. Indication : il suffit de vérifier que

$$0 = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ une base. Cherchions une expression concrète pour $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ si les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont données par leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}.$$

Notons d'abord que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -1, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Alors on peut calculer que

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b},\ x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}) = x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} - y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}.$$

Théorème. *Quel que soit une base $\mathcal{B}$ d'un plan vectoriel P, deux vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de P sont colinéaires si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.*

L'idée d'une démonstration. Il est facile de vérifier que si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. En effet, si $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{u}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u},\ \alpha\boldsymbol{u}) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$.

Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors le couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base. On peut utiliser la décomposition des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dans la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ pour exprimer $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ comme un multiple de $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \neq 0$, on en déduit que $\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \neq 0$. □

III.3. Introduction au déterminant d'une matrice

À toute *matrice* réelle carrée A, on associe un nombre réel qui s'appelle son *déterminant* et qui est noté $\det A$ ou $|A|$. Les deux notions du déterminant – celle pour les matrices et celle pour les familles de vecteurs par rapport aux bases – sont liées.

Voici les formules pour les déterminants des matrices 0×0, 1×1, 2×2, et 3×3.

(1) Pour la matrice 0×0, qu'on va noter $\varnothing$:

$$|\varnothing| = 1.$$

(2) Pour une matrice 1×1 :

$$|a| = a$$

(attention à ne pas confondre avec la valeur absolue, malgré la même notation).

(3) Pour une matrice 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(4) Pour une matrice 3×3 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs d'un plan vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}$, et que les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ et de $\boldsymbol{v}$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$[\mathcal{B}]\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_{\boldsymbol{u}} \\ y_{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathcal{B}]\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_{\boldsymbol{v}} \\ y_{\boldsymbol{v}} \end{pmatrix},$$

alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} x_{\boldsymbol{u}} & x_{\boldsymbol{v}} \\ y_{\boldsymbol{u}} & y_{\boldsymbol{v}} \end{vmatrix}.$$

Cette relation entre les déterminants des matrices carrées et les déterminants des familles de vecteurs par rapport à des bases se généralise à toutes dimensions.

IV. Espaces vectoriels euclidiens et espaces affines euclidiens

IV.1. Espaces euclidiens en géométrie classique et en géométrie analytique

Un plan euclidienne au sense classique (comme au collège) est un exemple d'un espace affine de dimension 2 : il y a des points, et il y a un espace vectoriels associé dont les éléments sont les « vecteurs libres ». En plus, on peut mesurer les distances entre les points et les angles entre les vecteurs non nuls. En fait, savoir mesurer les distances entre les points revient à la même chose que savoir mesurer les « longueurs » des vecteurs.

Pour résumer, un plan euclidienne classique est un espace affine de dimension 2, où dans l'espace vectoriel associé chaque vecteur possède une « longueur », qui est un réel positif, entre chaque couple de vecteurs non nuls il y a un angle bien déterminé, qui est un réel dans l'intervalle $[0, \pi]$, et ces « longueurs » et angles satisfont quelques lois, qui traduisent les axiomes de la géométrie classique.

De la même manière, un espace euclidien classique 3-dimensionnel est un espace affine, où on peut mesurer les longueurs et les angles.

En géométrie euclidienne classique, le *produit scalaire* de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est défini comme le nombre

$$\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta,$$

où $\|\boldsymbol{u}\|$ est la « longueur » de $\boldsymbol{u}$, $\|\boldsymbol{v}\|$ est la « longueur » de $\boldsymbol{v}$, et θ est la mesure de l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

En géométrie euclidienne analytique, un produit scalaire est une notion primitive qui doit satisfaire de certaines propriétés (des axiomes du produit scalaire), alors que les longueurs et les angles sont définis à partir d'un produit scalaire donné.

Une notation usuelle en mathématique pour le produit scalaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

Étant donné un produit scalaire, la *norme* (la « longueur ») d'un vecteur $\boldsymbol{u}$, notée $\|\boldsymbol{u}\|$, est définie par :

$$\|\boldsymbol{u}\| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}.$$

La mesure de l'*angle* (non orienté) entre deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est définie comme l'unique nombre $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}.$$

Dans la suite on va confondre la signification géométrique des angles avec leurs mesures, et on va dire qu'un angle est un nombre réel.

IV.2. Produit scalaire

Définition. Soit E un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire* dans E est une opération f qui à tout couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de E associe un nombre réel $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de telle façon que les propriétés suivantes soient satisfaites, où les variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ représentent des vecteurs quelconques de E, et α représente un nombre réel quelconque :

(1) $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ et $f(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération f est *linéaire en premier argument*),

(2) $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ et $f(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération f est *linéaire en deuxième argument*),

(3) $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
(l'opération f est *symétrique*),

(4) si $\boldsymbol{u} \neq \vec{\mathbf{0}}$, alors $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$
(l'opération f est *défini positive*, en tant qu'une opération *bilinéaire*).

Exemple. Voici un exemple d'un produit scalaire p dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$:

$$p((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2).$$

Exercice. Montrer que l'opération donnée dans le dernier exemple est en effet un produit scalaire.

Exemple. Soit $\mathsf{E} = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $[0,1] \to \mathbf{R}$. On peut définir un produit scalaire p dans E par la formule :

$$p(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt, \qquad f, g \in \mathsf{E}.$$

Définition. Un *espace vectoriel euclidien* est un espace vectoriel muni d'une opération produit scalaire. Un *espace affine euclidien* est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est muni d'un produit scalaire.

Notation. Le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans un espace vectoriel euclidien est noté $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

À partir des propriétés du produit scalaire, on peur déduire toutes les propriétés géométriques usuelles des distances, des longueurs, et des angles.

La norme

Définition. La *norme* d'un vecteur $\boldsymbol{u}$ dans un espace vectoriel euclidien, notée $\|\boldsymbol{u}\|$, est le nombre réel défini par les conditions :

$$\|\boldsymbol{u}\| \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle .$$

Dans un espace affine euclidien, la *distance* entre deux points A et B est définie comme la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Voici quelques propriétés remarquables en rapport avec la norme, qui découlent toutes des axiomes du produit scalaire. Ici $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ représentent des vecteurs quelconques, et α représente un réel quelconque.

(1) $\|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|$,

(2) $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$
(l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*),

(3) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$
(l'*inégalité triangulaire*).

L'angle non orienté

Définition. L'*angle non orienté* entre deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans un espace vectoriel euclidien est le nombre réel θ défini par les conditions :

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle .$$

(D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une solution pour θ existe.)

Exercice. Soit P un plan vectoriel euclidien muni d'une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ telle que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = 4$, et $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = -1$. Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs donnés par leurs coordonnés dans la base $\mathcal{B}$:

$$[\mathcal{B}]\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathcal{B}]\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, et $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. En déduire l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Quel est l'angle entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$? Indication : $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$, d'où l'angle entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est $\pi/2$.

Le produit scalaire canonique dans $\mathbf{R}^n$

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, on définit le *produit scalaire canonique* par la formule :

$$\langle (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i.$$

Lorsque on parle d'un produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$, on entend par défaut son produit scalaire canonique.

Exercice. Vérifier que le produit scalaire canonique est en effet un produit scalaire.

Matrice de Gram

Définition. Soit $\mathcal{F} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ une famille de vecteurs dans un espace vectoriel euclidien. La *matrice de Gram* de $\mathcal{F}$ est la matrice

$$\begin{matrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n \rangle \end{matrix}$$

`[...]`

IV.3. Orthogonalité, vecteurs normaux

Définition. Deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans un espace vectoriel euclidien sont dits *orthogonaux*, ce qu'on exprime par la notation $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$, si et seulement si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. On dit que deux ensembles de vecteurs U et V sont *orthogonaux*, et on écrit $U \perp V$, si et seulement si pour tous $\boldsymbol{u} \in U$ et $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Observations :

- le vecteur nul $\vec{\mathbf{0}}$ est orthogonal à tout vecteur,
- l'angle entre deux vecteurs orthogonaux non nuls est $\pi/2$.

La notion de l'orthogonalité de vecteurs est liée à la notion de la *perpendicularité* des objets géométriques dans la géométrie classique (comme les droites, les segments, les plans).

Vecteurs normaux

Définition. Soient E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E. Soient $\vec{\mathsf{E}}$ l'espace vectoriel associé à E (l'ensemble des vecteurs de E) et $\vec{\mathsf{F}}$ le sous-espace vectoriel de $\vec{\mathsf{E}}$ associé à F (l'ensemble des vecteurs de F). Un vecteur $\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{E}}$ est dit *normal* à F si et seulement s'il est orthogonal à $\vec{\mathsf{F}}$.

IV.4. Projetés orthogonaux

Définition. Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Le *projeté orthogonal* d'un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathsf{E}$ sur F est le vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathsf{F}$ tel que $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \perp \mathsf{F}$.

Proposition. *Cette définition est correcte dans le sens que le projeté orthogonal de $\boldsymbol{u}$ sur F est bien défini : si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathsf{F}$, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1 \perp \mathsf{F}$, et $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2 \perp \mathsf{F}$, alors $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$.*

Démonstration. Supposons $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ sont deux projetés orthogonaux de $\boldsymbol{u}$ sur F. Alors

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \perp \mathsf{F}.$$

En particulier,

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,$$

c'est-à-dire,

$$\langle \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0.$$

D'où, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \vec{\mathbf{0}}$ et donc $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. □

Définition. Soient E un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E. Le *projeté orthogonal* d'un point $A \in \mathsf{E}$ sur F est le point $B \in \mathsf{F}$ tel que $\overrightarrow{BA} \perp \vec{\mathsf{F}}$, où $\vec{\mathsf{F}}$ est l'espace vectoriel associé à F.

Proposition. *Cette définition est correcte dans le sens que le projeté orthogonal de A sur F est bien défini : si $B_1, B_2 \in \mathsf{F}$, $\overrightarrow{B_1A} \perp \vec{\mathsf{F}}$, et $\overrightarrow{B_2A} \perp \vec{\mathsf{F}}$, alors $B_1 = B_2$.*

L'opération qui à chaque point d'un espace affine euclidien, ou à chaque vecteur d'un espace vectoriel euclidien, associe son projeté orthogonal sur un sous-espace donné (affine ou vectoriel) s'appelle une *projection orthogonale*.

Définition. Si E est un espace vectoriel euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E, alors la *projection orthogonale* de E sur F est l'application (l'opération, la fonction) qui à tout vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathsf{E}$ associe le projeté orthogonal de $\boldsymbol{u}$ sur F. Si E est un espace affine euclidien et F est un sous-espace affine de E, alors la *projection orthogonale* de E sur F est l'application qui à tout point $A \in \mathsf{E}$ associe le projeté orthogonal de A sur F.

Exemple. Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur non nul. Alors la projection orthogonale sur $\mathsf{F} = \mathsf{Vect}(\boldsymbol{u})$, notée $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}$, est donnée par la formule :

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \boldsymbol{u} = \left\langle \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \boldsymbol{v} \right\rangle \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}.$$

Exercice. Vérifier que la formule donnée pour $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$ est juste.

IV.5. Familles orthonormées

Définition. Soient E un espace vectoriel euclidien et $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ des vecteurs dans E. La famille $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k)$ est dite *orthonormée* (ou *orthonormale*) si et seulement si

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{pour tous} \quad i, j \in \{1, \dots, k\},$$

c'est-à-dire, $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ pour tout i, et $\boldsymbol{e}_i \perp \boldsymbol{e}_j$ pour tous $i \neq j$.

Exemple. Par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est orthonormée.

Si $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ est une base orthonormée d'un plan vectoriel euclidien P, et que $\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}+y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}$ sont deux vecteurs de P, alors

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\rangle &= \langle x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b},\, x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b}\rangle \\ &= x_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}\,\langle \boldsymbol{a},\, \boldsymbol{a}\rangle + x_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}}\,\langle \boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}\rangle + y_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}}\,\langle \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}\rangle + y_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}}\,\langle \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{b}\rangle \\ &= x_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}} + y_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}}.\end{aligned}$$

Si $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien (de dimension 3), et que $\boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b} + z_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{v} = x_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b} + z_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{c}$ sont deux vecteurs de E, alors on peut calculer que

$$\langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\rangle = x_{\boldsymbol{u}}x_{\boldsymbol{v}} + y_{\boldsymbol{u}}y_{\boldsymbol{v}} + z_{\boldsymbol{u}}z_{\boldsymbol{v}}.$$

Exercice. Vérifier la dernière formule pour $\langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\rangle$.

IV.6. Déterminants par rapport aux bases orthonormées directes

Proposition. *Soit* E *un espace vectoriel euclidien orienté de dimension* n. *Si* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *sont deux bases orthonormées directes de* E, *et que* $\mathcal{F}$ *est une famille de* n *vecteurs dans* E, *alors* $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \det_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$.

Définition. Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, et que $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs dans E, alors le *déterminant* de $\mathcal{F}$, noté $\det \mathcal{F}$, est le déterminant de $\mathcal{F}$ par rapport à une n'importe quelle base orthonormée directe de E.

IV.7. Déterminant d'un couple dans un plan euclidien orienté

Soit P un plan vectoriel euclidien orienté.

Le déterminant d'un couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de P, noté $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, est le déterminant de ce couple par rapport à une n'importe quelle base orthonormées directe de P.

En particulier, si $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ est une base orthonormée directe de P, alors

$$\det(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}) = 1 \quad \text{et} \quad \det(\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}}) = -\det(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}) = -1.$$

Interprétation géométrique

Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires d'un plan affine euclidien orienté, la valeur $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ admet une interprétation géométrique assez simple : c'est l'« aire orienté »

d'un parallélogramme $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}$. (L'« aire orienté » d'un parallélogramme $ABCD$ dans un plan euclidien orienté est positive si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est une base directe, et négative si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est une base indirecte.)

En fait, la valeur $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est complètement déterminée par les propriétés suivantes :

(1) si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, alors $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$,

(2) si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base directe, alors $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) > 0$,

(3) si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ est une base indirecte, alors $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) < 0$,

(4) si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $|\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$ est l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}$.

Rapport avec les angles orientés

Dans un plan vectoriel euclidien orienté on peut définir les *angles orientés* entre les vecteurs non nuls. Généralement on les définit à un multiple de 2π près. Par exemple, si $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}})$ est une base orthonormée directe, alors $\pi/2$ et $-3\pi/2$ sont des angles orientés de $\vec{\boldsymbol{i}}$ à $\vec{\boldsymbol{j}}$, et $-\pi/2$ et $3\pi/2$ sont des angles orientés de $\vec{\boldsymbol{j}}$ à $\vec{\boldsymbol{i}}$.

Proposition. *Soient* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs non nuls dans un plan vectoriel euclidien orienté, et soit* θ *un angle orienté de* $\boldsymbol{u}$ *à* $\boldsymbol{v}$. *Alors*

$$\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta = \det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

IV.8. Produit vectoriel

Dans cette section on travail dans un espace vectoriel ou affine euclidien orienté de dimension 3.

Définition. Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, on associe à tout couple $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ de vecteurs de E leur *produit vectoriel*, noté $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$,[1] qui est, lui aussi, un vecteur de E. L'opération

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

est uniquement déterminée par les identités suivantes, où les variables $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ représentent des vecteurs quelconques de E, et α représente un nombre réel quelconque :

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ et $(\alpha\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
(l'opération $\times$ est *linéaire en premier argument*),

(2) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{u} \times (\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$
(l'opération $\times$ est *linéaire en deuxième argument*),

(3) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \vec{\mathbf{0}}$
(l'opération $\times$ est *alternée*, en tant qu'une opération *bilinéaire*),

(4) si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base orthonormée directe de E, alors $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

Proposition. *Cette définition est correcte : il existe une unique opération $\times$ qui satisfait les propriétés décrites.*

Observons que si $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ est une base *orthonormée directe*, alors

$$\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}}, \quad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}}.$$

On peut montrer l'identité suivante :

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

(l'opération $\times$ est *antisymétrique*, en tant qu'une opération bilinéaire).

Exercice. Démontrer cette identité.

On peut démontrer les propriétés géométriques suivantes, qui déterminent complètement le vecteur $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v}$,

(2) si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, alors $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \vec{\mathbf{0}}$,

(3) si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ est une base directe,

(4) si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$ est l'aire d'un parallélogramme $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}$.

Ainsi, si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont non nuls et $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle non orienté entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, alors

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \sin \theta.$$

Calcul

Si $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ est une base orthonormée directe de E et que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= x_1\vec{\boldsymbol{i}} + y_1\vec{\boldsymbol{j}} + z_1\vec{\boldsymbol{k}}, \\ \boldsymbol{v}_2 &= x_2\vec{\boldsymbol{i}} + y_2\vec{\boldsymbol{j}} + z_2\vec{\boldsymbol{k}}, \end{aligned}$$

[1] En France, le symbole « $\wedge$ » est courant pour noter le produit vectoriel. Cependant, dans d'autres pays le symbole « $\times$ » est utilisé pour le produit vectoriel, et le symbole « $\wedge$ » est réservée au *produit extérieur* — une opération plus basique que le produit vectoriel et pas sans rapport avec ce dernier, mais laquelle n'apparaît que dans des chapitres assez avancés de la géométrie ou de l'algèbre.

alors

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & x_1 & x_2 \\ \vec{\boldsymbol{j}} & y_1 & y_2 \\ \vec{\boldsymbol{k}} & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{k}}.$$

On peut trouver cette formule à partir des égalités

$$\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}}, \quad \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}}, \quad \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}}.$$

IV.9. Produit mixte

Dans cette section on travail dans un espace vectoriel ou affine euclidien orienté de dimension 3.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont trois vecteurs dans E, alors*

$$\langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \rangle .$$

Définition. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le *produit mixte* d'une famille $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ de vecteurs de E, noté $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$, est le nombre réel défini par

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \overset{\text{déf}}{=} \langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \rangle .$$

Propriétés :

(1) pour $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \in \mathsf{E}$,

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = -[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}] = -[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] = -[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}],$$

(2) pour $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \in \mathsf{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$,

$$[\alpha\boldsymbol{s} + \beta\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \alpha[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] + \beta[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}].$$

La valeur absolue de $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

Le produit mixte $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ est strictement positif si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base d'orientation positive (base directe), il est strictement négatif si $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ est une base d'orientation négative (base indirecte), il est zéro si les vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont coplanaires.

Calcul

Si $(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ est une base orthonormée directe de E et que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= x_1\vec{\boldsymbol{i}} + y_1\vec{\boldsymbol{j}} + z_1\vec{\boldsymbol{k}},\\ \boldsymbol{v}_2 &= x_2\vec{\boldsymbol{i}} + y_2\vec{\boldsymbol{j}} + z_2\vec{\boldsymbol{k}},\\ \boldsymbol{v}_3 &= x_3\vec{\boldsymbol{i}} + y_3\vec{\boldsymbol{j}} + z_3\vec{\boldsymbol{k}},\end{aligned}$$

alors

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = \det_{(\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3).$$

On peut trouver cette formule à partir de l'égalité

$$[\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}] = 1.$$

Note sur la notation. En France, surtout en matières appliquées, le produit vectoriel de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est souvent écrit comme « $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ ». Pourtant, en géométrie, l'expression « $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ » est la notation standard pour le *produit extérieur* des vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, dont le résultat est un *bivecteur* – une espèce de *tenseur*. Si on garde « $\wedge$ » pour noter le « produit extérieur », et si on utilise une certaine autre opération standard notée « $\star$ » (l'*opérateur de Hodge*), on peut trouver les formules suivantes pour le produit vectoriel et pour le produit mixte :

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = \star(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}), \qquad [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \star(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}).$$

L'expression « $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ » est la notation usuelle anglaise pour le produit vectoriel de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Il existe encore une autre notation, utilisée dans la literature russe : « $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ », et même un mélange de deux : « $[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}]$ ». Peut-être le choix le plus logique serait de noter le produite vectoriel de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ par « $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ » et le produit mixte de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ par « $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ », n'est-ce pas ? Cependant il paraît que cette combinaison des notations n'est pas courante.

V. Description de sous-espaces vectoriels et affines par des équations

V.1. Représentations paramétriques

Une droite donnée par un point et un vecteur directeur

Soient E un espace affine et D une droite affine dans E passant par un point A avec un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. (Ainsi, $A\boldsymbol{u}$ est un repère de D.) Alors, quel que soit un point M de E, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} M \in \mathsf{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{u}\\ &\Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbf{R} \text{ tel que } M = A + t\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

Si O est encore un point quelconque (l'origine d'un repère, par exemple), alors

$$\overrightarrow{AM} = t\boldsymbol{u} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\boldsymbol{u}.$$

On peut en déduire une représentation paramétrique de D dans un repère $\mathcal{R}$ de E si on connaît les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans la base de $\mathcal{R}$.

Par exemple, supposons E est un plan affine ($\dim\mathsf{E} = 2$) et $\mathcal{R} = O\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ est un repère de E. Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}.$$

Soient (x_M, y_M) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}$. Alors on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\boldsymbol{u} \quad &\Leftrightarrow \quad x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b} = (x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b}) + t(x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b})\\ &\Leftrightarrow \quad x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b} = (x_A + x_{\boldsymbol{u}}t)\boldsymbol{a} + (y_A + y_{\boldsymbol{u}}t)\boldsymbol{b}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_M = x_A + x_{\boldsymbol{u}}t,\\ y_M = y_A + y_{\boldsymbol{u}}t.\end{cases}\end{aligned}$$

Voici donc une représentation paramétrique de D dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = x_A + x_{\boldsymbol{u}}t,\\ y = y_A + y_{\boldsymbol{u}}t,\end{cases} \quad t\in\mathbf{R}.$$

Si $\vec{\mathsf{D}}$ est la droite vectorielle associée à D, alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{E}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{v}\in\vec{\mathsf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t\in\mathbf{R} \text{ tel que } \boldsymbol{v} = t\boldsymbol{u}.$$

On peut en déduire une représentation paramétrique de $\vec{\mathsf{D}}$ dans une base donnée de $\vec{\mathsf{E}}$.

Un plan donné par un point et deux vecteurs directeurs

Soient E un espace affine et P un plan affine dans E passant par un point A avec deux vecteurs directeurs non colinéaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. (Ainsi, $A\boldsymbol{uv}$ est un repère de P.) Alors, quel que soit un point M de E, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} M \in \mathsf{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists s, t \in \mathbf{R} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists s, t \in \mathbf{R} \text{ tels que } M = A + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

On peut en déduire une représentation paramétrique de P dans un repère $\mathcal{R}$ de E si on connaît les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ et de $\boldsymbol{v}$ dans la base de $\mathcal{R}$.

Si $\vec{\mathsf{P}}$ est le plan vectoriel associé à P, alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{E}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{w} \in \vec{\mathsf{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists s, t \in \mathbf{R} \text{ tels que } \boldsymbol{w} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}.$$

On peut en déduire une représentation paramétrique de $\vec{\mathsf{P}}$ dans une base donnée.

V.2. Équations cartésiennes

Une droite donnée par un point et un vecteur directeur dans un plan

Soient P un plan affine et D une droite affine dans P passant par un point A avec un vecteur directeur $\boldsymbol{u}$. Alors, quels que soient un point M de P et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\ \boldsymbol{u}) = 0.$$

Si O est encore un point quelconque (l'origine d'un repère, par exemple), alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\ \boldsymbol{u}) - \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}).$$

Si $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$ est un repère donné de P, soient (x_M, y_M) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OM},\ \boldsymbol{u}) = \det_{\mathcal{B}}(x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u}) = x_M \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) + y_M \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}).$$

Ainsi on obtient une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})x + \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u})y = \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}).$$

Pour que les coefficients de cette équation soient plus faciles à trouver, il peut être naturel d'utiliser la base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et $(x_{\boldsymbol{u}}, y_{\boldsymbol{u}})$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u} = x_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + y_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}.$$

Posons $\mathcal{B} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = y_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}) = -x_{\boldsymbol{u}}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{u}) = x_A y_{\boldsymbol{u}} - y_A x_{\boldsymbol{u}}.$$

D'où une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$y_{\boldsymbol{u}}x - x_{\boldsymbol{u}}y = y_{\boldsymbol{u}}x_A - x_{\boldsymbol{u}}y_A.$$

Si $\vec{\mathsf{D}}$ est la droite vectorielle associée à D, alors quels que soient un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{P}}$ et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{v} \in \vec{\mathsf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\vec{\mathsf{D}}$ dans une base donnée de $\vec{\mathsf{P}}$ (pour cela il sera naturel d'utiliser cette même base comme la base $\mathcal{B}$ dans la formule).

Un plan donné par un point et deux vecteurs directeurs dans un espace de dimension 3

Soient E un espace affine de dimension 3 et P un plan affine dans E passant par un point A avec deux vecteurs directeurs non colinéaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Alors, quels que soient un point M de E et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{E}}$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{P} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AM},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de P dans un repère donné de E (pour cela il sera naturel d'utiliser la base de ce repère comme la base $\mathcal{B}$ dans la formule).

Si $\vec{\mathsf{P}}$ est le plan vectoriel associé à P, alors quels que soient un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{E}}$ et une base $\mathcal{B}$ de $\vec{\mathsf{E}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{w} \in \vec{\mathsf{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \det_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\vec{\mathsf{P}}$ dans une base donnée de $\vec{\mathsf{E}}$ (pour cela il sera naturel d'utiliser cette même base comme la base $\mathcal{B}$ dans la formule).

Une droite donnée par un point et un vecteur normal dans un plan euclidien

Soient P un plan affine euclidien et D une droite affine dans P passant par un point A avec un vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Alors, quel que soit un point M de P, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{D} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM},\ \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = 0.$$

Si O est encore un point quelconque (l'origine d'un repère, par exemple), alors

$$\left\langle \overrightarrow{AM},\ \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},\ \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OM},\ \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{OA},\ \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle.$$

Si $\mathcal{R} = O\boldsymbol{ab}$ est un repère donné de P, soient (x_M, y_M) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{OM} = x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}$. Alors

$$\left\langle \overrightarrow{OM}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = \langle x_M\boldsymbol{a} + y_M\boldsymbol{b}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = x_M \langle \boldsymbol{a}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle + y_M \langle \boldsymbol{b}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle .$$

Ainsi on obtient une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$\langle \boldsymbol{a}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle x + \langle \boldsymbol{b}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle y = \left\langle \overrightarrow{OA}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle .$$

(Attention au cas des repères non orthonormés pour le calcul des produits scalaires.)

Considérons le cas où *le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé*. Soient (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et $(x_{\vec{\boldsymbol{n}}}, y_{\vec{\boldsymbol{n}}})$ les coordonnées de $\vec{\boldsymbol{n}}$ dans la base $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\overrightarrow{OA} = x_A\boldsymbol{a} + y_A\boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \vec{\boldsymbol{n}} = x_{\vec{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{a} + y_{\vec{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{b}.$$

Alors

$$\langle \boldsymbol{a}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = x_{\vec{\boldsymbol{n}}}, \quad \langle \boldsymbol{b}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = y_{\vec{\boldsymbol{n}}}, \quad \left\langle \overrightarrow{OA}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = x_A x_{\vec{\boldsymbol{n}}} + y_A y_{\vec{\boldsymbol{n}}}.$$

D'où une équation cartésienne de D dans $\mathcal{R}$:

$$x_{\vec{\boldsymbol{n}}}x + y_{\vec{\boldsymbol{u}}}y = x_{\vec{\boldsymbol{n}}}x_A + y_{\vec{\boldsymbol{n}}}y_A.$$

Si $\vec{\mathsf{D}}$ est la droite vectorielle associée à D, alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{P}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{D}} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{u}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\vec{\mathsf{D}}$ dans une base donnée de $\vec{\mathsf{P}}$ (attention au cas des bases non orthonormées).

Un plan donné par un point et un vecteur normal dans un espace euclidien de dimension 3

Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 et P un plan affine dans E passant par un point A avec un vecteur normal $\vec{\boldsymbol{n}} \neq \vec{\boldsymbol{0}}$. Alors, quel que soit un point M de E, on a l'équivalence :

$$M \in \mathsf{P} \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{AM}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de P dans un repère donné de E (attention au cas des repères non orthonormés).

Si $\vec{\mathsf{P}}$ est le plan vectoriel associé à P, alors quel que soit un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\vec{\mathsf{E}}$, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{u} \in \vec{\mathsf{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{u}, \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = 0.$$

On peut en déduire une équation cartésienne de $\vec{\mathsf{P}}$ dans une base donnée de $\vec{\mathsf{E}}$ (attention au cas des bases non orthonormées).

V.3. Passage entre représentations paramétriques et équations cartésiennes

Transformation d'un système d'équations cartésiennes en une représentation paramétrique

Soient E un espace affine muni d'un repère et F une droite, un plan, ou un autre sous-espace dans E donné par un système d'équations cartésiennes (éventuellement réduit à une équation). Alors on peut trouver une représentation paramétrique de F à partir de ce système. Pour cela il suffit de « résoudre » ce système en traitant certaines variables comme des paramètres donnés et les autre comme des inconnues qu'on cherche à exprimer en termes des paramètres.

Transformation d'une représentation paramétrique en un système d'équations cartésiennes

Soient E un espace affine muni d'un repère et F une droite, un plan, ou un autre sous-espace dans E donné par une représentation paramétrique. Alors à partir de cette représentation, on peut trouver un système d'équations cartésiennes (éventuellement réduit à une équation) qui représente F. Pour cela il suffit de « résoudre » les système qui donne la représentation paramétrique pour les paramètres en isolant au même temps des équations sans paramètres qui donnent la condition pour qu'une solution existe.

VI. Systèmes de coordonnées usuels

CHAPITRE-BROUILLON

VI.0.1. Coordonnées cartésiennes

Soit E un espace affine muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Le point de E de *coordonnée cartésiennes* $(x_1, \dots, x_n)$ est le point

$$M = O + x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Chaque point de E ainsi possède un unique n-uple de coordonnées cartésiennes par rapport au repère choisi.

VI.0.2. Coordonnées dans un plan euclidien

Soit P un plan euclidien muni d'un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Coordonnées polaires

Le point de P de *coordonnées polaires* (r, θ) est le point de coordonnées cartésiennes (x, y) où

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Si M est ce point, alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$.

VI.0.3. Coordonnées dans un espace euclidien de dimension 3

Soit E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Coordonnées cylindriques

Le point de E de *coordonnées cylindriques* (r, θ, z) est le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) où

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Si M est ce point, alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2 = r^2 + z^2$.

Coordonnées sphériques

Le point de E de *coordonnées sphériques* (r, θ, ϕ) est le point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) où

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Si M est ce point, alors $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$.

VII. Transformations classiques d'espaces affines et euclidiens

CHAPITRE-BROUILLON

VII.0.1. Transformations classiques d'un espace affine

Soit E un espace affine.

Une *translation* de E par un vecteur $\vec{v} \in \vec{E}$ est l'application $f\colon E \to E$ définie par

$$f(M) = M + \vec{v}.$$

Une *homothétie* de E de centre O et de rapport r est l'application $f\colon E \to E$ définie par

$$\overrightarrow{Of(M)} = r\overrightarrow{OM},$$

ou encore

$$f(M) = O + r\overrightarrow{OM},$$

[Symétries.]

VII.0.2. Transformations classiques d'un plan euclidien

Soit P un plan affine.

Une *rotation* de P de centre O et d'angles θ est l'application $f\colon P \to P$ définie par les règles :

(1) pout tout point M, $\left\|\overrightarrow{Of(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$,

(2) pout tout point $M \neq O$, l'angle de $\overrightarrow{OM}$ à $\overrightarrow{Of(M)}$ mesuré dans le sens direct est θ mod 2π.

Voici une autre façon de trouver l'image M' de M par une rotation de centre O et d'angle θ, en utilisant les fonctions trigonométriques.

(1) Si $M = O$, alors $M' = M = O$.

(2) Si $M \neq O$, alors soit $(\vec{u}, \vec{v})$ la base *directe* de $\vec{P}$ telle que :
   (a) $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$,

   (b) $\vec{v} \perp \vec{u}$,
   (c) $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|$.

   Dans ce cas, $M' = O + (\cos\theta)\vec{u} + (\sin\theta)\vec{v}$.

[Similitudes, symétries orthogonales.]

VII.0.3. Introduction à la notation matricielle

[...]

VIII. Courbes paramétrées planaires

CHAPITRE-BROUILLON

Dans ce chapitre, P est un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

VIII.1. Définitions de base

Définition. Une *courbe paramétrée* dans un plan euclidien (ou affine) P est une application continue $f\colon I \to P$, où $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle.

La *continuité* de l'application $f\colon I \to P$ de l'intervalle I dans le plan euclidien P veut dire que pour tout $t_0 \in I$ et pour tout disque D dans P centré en $f(x_0)$ (de rayon $\epsilon > 0$), il existe un intervalle de $\mathbf{R}$ centré en t_0 de la forme $]t_0-\delta, t_0+\delta[$ tel que l'image de $]t_0-\delta, t_0+\delta[\cap I$ par f est inclue dans D.

Si $f\colon I \to P$ est une courbe paramétrée, on peut définir ses *dérivées itérées* $f', f'', \dots$:

$$f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \qquad f''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(t+h)-f'(t)}{h}, \quad \dots .$$

Ainsi, les valeurs de f sont des points dans P, mais les valeurs de $f', f'', \dots$ sont des vecteurs dans $\vec{P}$.

On suppose maintenant que P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On peut alors identifier P avec $\mathbf{R}^2$ en identifiant tout point $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ avec le couple de ses coordonnées (x,y), et tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec le couple (x,y).

Pour toute courbe paramétrée $f\colon I \to P$, il existe un unique couple de fonctions $x, y\colon I \to \mathbf{R}$ telles que

$$f(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \qquad t \in I.$$

On peut vérifier que f est continue si et seulement si x et y le sont.

On peut aussi exprimer la fonctions $f\colon I \to P$ comme

$$f(t) = O + \vec{r}(t),$$

où $\vec{r}\colon I \to \vec{P}$, donc $\vec{r}(t)$ est le vecteur « rayon » $\overrightarrow{Of(t)}$.

On peut aussi calculer que

$$f'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \quad f''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j}, \quad \dots .$$

En effet, par exemple, pour f' on trouve :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(O+x(t+h)\vec{i}+y(t+h)\vec{j})-(O+x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j})}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x(t+h)-x(t))\vec{i}+(y(t+h)-y(t))\vec{j}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\vec{i}+\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\vec{j}\right)\\ &= x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}. \end{aligned}$$

Exemples

Paramétrage d'un cercle

Paramétrage du cercle unité d'équation $x^2+y^2=1$ dans $\mathbf{R}^2$ par fonctions trigonométriques :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le paramétrage est donc donné par la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Paramétrage d'un ellipse

Soient $a > 0$, $b > 0$, et considérons l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Cela donne un paramétrage de l'ellipse.

Paramétrage des branches d'une hyperbole

Soient $a > 0$, $b > 0$. Considérons l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Voici les paramétrages de ses deux branches par fonctions hyperboliques :

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

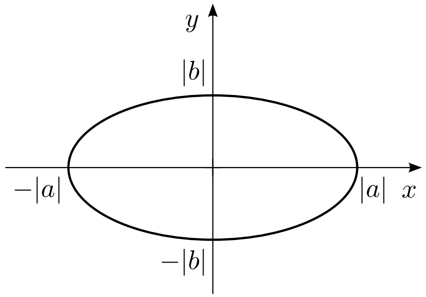

FIG. VIII.1. : Ellipse.

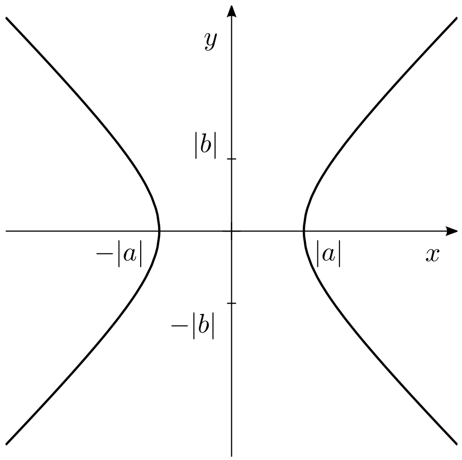

FIG. VIII.2. : Hyperbole.

Les paramétrages sont donc donnés par les fonctions $f_1, f_2 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$,

$$f_1(t) = (a \cosh t,\, b \sinh t), \quad f_2(t) = (-a \cosh t,\, b \sinh t).$$

Chacune des deux branches a deux mêmes asymptotes d'équations

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Paramétrage du folium de Descartes

Le *folium de Descartes* dans le plan $\mathbf{R}^2$ est donné par l'équation :

$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

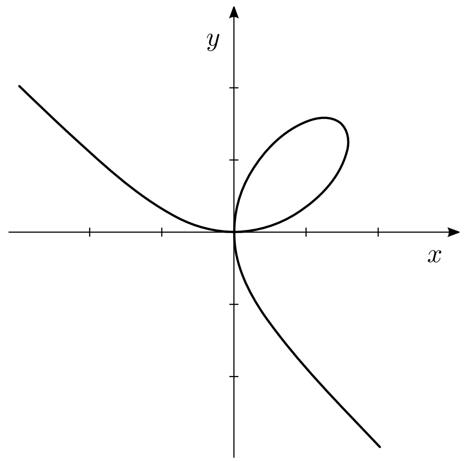

FIG. VIII.3. : Folium de Descartes.

Posons $y = tx$ (si $x = 0$, alors $y = 0$). Alors on trouve :

$$x = \frac{3t}{1+t^3},$$
$$y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Pour $t < -1$ et pour $t > -1$, cela donne deux paramétrages de deux « morceaux » de la courbe.

En étudiant le comportement lorsque $t \to -1^-$ et $t \to -1^+$, on trouve une asymptote d'équation

$$x + y = -1.$$

Paramétrage de la lemniscate de Bernoulli

La *lemniscate de Bernoulli* dans le plan $\mathbf{R}^2$ est donnée par l'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

Observons que $|y| \leqslant |x|$. Posons $y = x \sin t$ (si $x = 0$, alors $y = 0$). Alors on trouve :

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos t}{1 + \sin^2 t},$$
$$y = \frac{\sqrt{2}\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}.$$

Ceci est un paramétrage de la courbe.

Cette courbe est bornée.

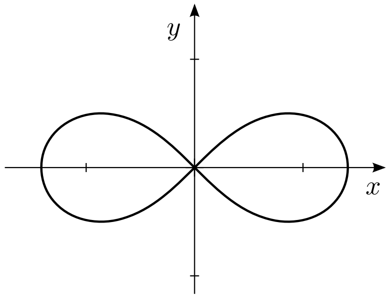

Fig. VIII.4. : Lemniscate de Bernoulli.

VIII.2. Trajectoire, reparamétrage, longueur, paramètre naturel

VIII.2.1. Trajectoire

Avec une courbe paramétrée, comme avec un mouvement d'un objet mobile, on associe souvent sa *trajectoire*. Il semble cependant qu'il n'y a pas de définition mathématique *unique* de la trajectoire d'une courbe. On va en donner ici deux définitions différentes et non équivalentes. La première paraît plus commune et facile à comprendre. La seconde paraît plus raisonnable.

(1) Le plus souvent on définit la *trajectoire* d'une courbe paramétrée $f: I \to P$ comme l'ensemble image $f(I)$ de f dans P.

(2) Une définition alternative (et non équivalente) est de dire que deux courbes paramétrées $f: I \to P$ et $g: J \to P$ ont la même *trajectoire* si et seulement si une peut être obtenue de l'autre par un *reparamétrage* strictement croissante, c'est-à-dire, s'il existe $\phi: I \to J$ continue et strictement croissante telle que

$$f = g \circ \phi \quad \text{et} \quad g = f \circ \phi^{-1}.$$

VIII.2.2. Reparamétrage

Dans ce cours on va utiliser la définition suivante d'un *reparamétrage*.

Définition. Un *reparamétrage* d'une courbe paramétrée $f: I \to P$ est toute application bijective $\phi: J \to I$ d'un intervalle $J \subset \mathbf{R}$ sur l'intervalle I.

Si $\phi: J \to I$ est un reparamétrage de $f: I \to P$, alors

$$g = f \circ \phi: J \to P, \quad g(t) = f(\phi(t)),$$

est une courbe paramétrée. Parfois c'est cette nouvelle courbe paramétrée g qui s'appelle un *reparamétrage* de f. Il faut noter que g et f one la même trajectoire dans le premier sens ; pour qu'elles aient la même trajectoire dans le second sens, il suffit que ϕ soit croissante.

VIII.2.3. Longueur

Définition. La longueur d'une courbe paramétrée $f: I \to P$ (ou de sa trajectoire) est la *borne supérieure* (c'est-à-dire, la plus petite majorante) des longueurs des lignes brisées *inscrites* dans f.

VIII.2.4. Paramétrage naturel et abscisses curvilignes

Définition. Une *arc* d'une courbe paramétrée $f: I \to P$ est la restriction $f|_{[a,b]}$ de f à un sous-intervalle $[a,b] \subset I$.

Définition. Une courbe paramétrée $f: I \to P$ est dite avoir *paramétrage naturel* (on dit aussi *normal*) si et seulement si pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$, la longueur de l'arc $f|_{[a,b]}$ est $b - a$.

Théorème. *Si $f: I \to P$ est une courbe paramétrée dérivable, alors le paramétrage de r est naturel si et seulement si pour tout $t \in I$,*

$$\|f'(t)\| = 1.$$

Il est de coutume d'utiliser la variable « s » au lieu de « t » pour désigner un paramétrage naturel.

Une courbe paramétrée $f: I \to P$ peut représenter le mouvement d'un *objet mobile* (appelé aussi *mobile* tout court) dans le plan P, où le paramètre t représente un moment du temps et la valeur $f(t)$ représente la position en moment t. Cependant il est possible, même quand il s'agit du mouvement d'un objet, que le paramètre t ne représente pas le temps, mais, par exemple, la distance parcourue. Le paramétrage par la distance parcourue est justement le paramétrage naturel.

Définition. Une *abscisse curviligne* de f est une fonction $\sigma: I \to \mathbf{R}$ telle que pour tous $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$, la longueur de l'arc $f|_{[t_1,t_2]}$ est $\sigma(t_2) - \sigma(t_1)$.

Si le paramétrage de f est naturel et qu'on note le paramètre « s », alors les abscisses curvilignes sont toutes les fonctions σ de la forme $\sigma(s) = s + C$, où C est une constante. Ainsi on peut dire d'une façon informelle que « une abscisse curviligne est la même chose qu'un paramètre naturel ».

VIII.3. Élément de longueur curviligne

Rappel : la *longueur* d'une arc d'une courbe paramétrée est la borne supérieure des longueurs des lignes brisées inscrites.

Soit $\gamma\colon I \to P$ une courbe paramétrée continûment dérivable,

$$\gamma(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

On va noter $L(t_1, t_2)$ la longueur de l'arc de γ associée à l'intervalle $[t_1, t_2] \subset I$. On définit $L(t_1, t_2) = -L(t_2, t_1)$ pour $t_1 > t_2$, et $L(t, t) = 0$ pour tout t.

Soit $\sigma\colon I \to \mathbf{R}$ une abscisse curviligne de γ, c'est-à-dire une fonction strictement croissante telle que pour tous $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_2$,

$$L(t_1, t_2) = \sigma(t_2) - \sigma(t_1).$$

En utilisant le théorème des accroissements finis et le théorème de Pythagore, on peut montrer que σ est continûment dérivable et que pour tous $t \in I$ et $h \in \mathbf{R}$,

$$(d\sigma(t; h))^2 = (dx(t; h))^2 + (dy(t; h))^2.$$

(Ici, $d\sigma$, dx, dy sont des *différentielles*, voir le cours d'analyse.) Si le paramétrage de γ est naturel et qu'on note le paramètre « s », alors $\sigma(s) = s + C$, où C est une constante, et donc $d\sigma(s) = ds$ et

$$(ds)^2 = (dx(s))^2 + (dy(s))^2,$$

qu'on écrit aussi comme

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Ainsi, pour $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} L(t_1, t_2) = \sigma(t_2) - \sigma(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} d\sigma(t) &= \int_{t_1}^{t_2} |d\sigma(t)| \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t)\,dt)^2 + (y'(t)\,dt)^2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,|dt| \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,. \end{aligned}$$

En utilisant les formules $L(t_1, t_2) = -L(t_2, t_1)$ et $L(t, t) = 0$, on conclut que pour tous $t_1, t_2 \in I$,

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt\,.$$

En particulier, si γ représente le parcours d'un objet mobile, $\vec{v}(t)$ est le vecteur vitesse et $v(t)$ est la vitesse scalaire de l'objet au moment $t \in I$, alors

$$\vec{v}(t) = \gamma'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \qquad v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2},$$

et donc la distance parcourue par l'objet entre deux moments t_1 et t_2 est

$$L(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\,.$$

VIII.4. Vitesse et accélération

Si une courbe paramétrée $\gamma\colon I \to P$ décrit le mouvement d'un objet par rapport au temps, alors le *vecteur vitesse* $\vec{v}$ est la dérivée de la position par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \gamma'(t).$$

Le *vecteur accélération* $\vec{a}$ est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, donc la dérivée seconde de la position :

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \gamma''(t).$$

La *vitesse* est la norme du vecteur vitesse, et l'*accélération* est la norme du vecteur accélération :

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\|\,, \quad a(t) = \|\vec{a}(t)\|\,.$$

VIII.5. Vecteurs tangent et normal, repère de Frenet

Jean Frédéric Frenet (1816–1900) fut un mathématicien, astronome et météorologue français (selon Wikipédia). Dans sa thèse « Sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure », il présenta en 1847 à Toulouse quelques formules pour la géométrie différentielle des courbes dans l'espace. Dans ce chapitre on va voir la *relation de Frenet*, qui est la version planaire d'une de ces formules.

Soit $\gamma\colon I \to P$ une courbe paramétrée dérivable telle que γ' (ou $\vec{v}$, ou v) ne s'annule pas.

Le *vecteur tangent* $\vec{T}$ de γ est la fonction $I \to \vec{P}$ définie par

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Le vecteur $\vec{T}(t)$ est un vecteur de longueur 1 *tangent* à la trajectoire de γ en point $\gamma(t)$. Observons aussi que

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t).$$

Le *vecteur normal* $\vec{N}$ de γ est la fonction $I \to \vec{P}$ définie par la propriété suivante : pour tout $t \in I$, $(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ est une base orthonormée directe de $\vec{P}$.

Le repère mobile $(\gamma(t), \vec{T}(t), \vec{N}(t))$ s'appelle le *repère de Frenet* de γ.

Pour mieux comprendre la dynamique du repère de Frenet, introduisons son *angle* par rapport au repère fix $(O, \vec{i}, \vec{j})$ comme une fonction continue $\theta \colon I \to \mathbf{R}$ telle que

$$\begin{cases} \vec{T}(t) = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \sin\theta(t)\,\vec{j} \\ \vec{N}(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{i} + \cos\theta(t)\,\vec{j} \end{cases}$$

On peut montrer qu'une telle θ existe car γ' ne s'annule pas. On peut alors déduire les identités suivantes :

$$\vec{T}'(t) = \theta'(t)\vec{N}(t), \qquad \vec{N}'(t) = -\theta'(t)\vec{T}(t).$$

Si on pose $\omega(t) = \theta'(t)$ la *vitesse angulaire orientée* du repère de Frenet, on a :

$$\vec{T}'(t) = \omega(t)\vec{N}(t), \qquad \vec{N}'(t) = -\omega(t)\vec{T}(t).$$

VIII.6. Courbure et la relation de Frenet

La courbure d'une droite est 0. La courbure d'un cercle de rayon R est $\dfrac{1}{R}$.

Considérons maintenant une courbe paramétrée $\gamma \colon I \to P$ deux fois continûment dérivable (c'est-à-dire, $\vec{a} \colon I \to \vec{P}$ est continue) et paramétrée par un paramètre naturel ($v(s) = 1$).

Définissons le repère de Frenet et la fonction θ comme avant. Ainsi,

$$\vec{T}'(s) = \theta'(s)\vec{N}(s), \qquad \vec{N}'(s) = -\theta'(s)\vec{T}(s).$$

La *courbure orientée* $k(s)$ et la *courbure* $\kappa(s)$ dans ce cas sont définies par

$$k(s) = \theta'(s), \qquad \kappa(s) = |k(s)|\,.$$

C'est-à-dire, dans le cas où le paramétrage est naturel (la courbe est traversée à la vitesse constante 1), la courbure orientée est égale à la vitesse angulaire orientée du repère de Frenet. On observe que

$$\vec{a}(s) = \vec{v}'(s) = \vec{T}'(s) = \theta'(s)\vec{N}(s), \qquad a(s) = |\theta'(s)|\,.$$

Donc, dans ce cas,

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = a(s).$$

Considérons enfin le cas général où $\gamma \colon I \to P$ est deux fois continûment dérivable et γ' ne s'annule pas.

Pour $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 < t_2$, définissons $L(t_1, t_2)$ comme la longueur de l'arc $\gamma|_{[t_1,t_2]}$. Pour $t_1, t_2 \in I$ avec $t_1 > t_2$, posons $L(t_1, t_2) = -L(t_2, t_1)$. Posons $L(t, t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Soit $t_0 \in I$. Définissons $\sigma \colon I \to R$ par la formule

$$\sigma(t) = L(t_0, t).$$

Alors σ et σ^{-1} sont strictement croissantes et deux fois dérivables (moi, je l'espère, je n'ai pas vérifié). On peut aussi monter que

$$\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| = v(t).$$

Prenons σ^{-1} comme un reparamétrage de γ : posons

$$\bar{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1} \colon \sigma(I) \to P.$$

Alors $\bar{\gamma}$ est deux fois dérivable et paramétrée par un paramètre naturel.

On veut que la courbure et la courbure orientée soient invariantes par reparamétrages croissants. Donc on veut définir la courbure de γ en t égale à la courbure de $\bar{\gamma}$ en $s = \sigma(t)$, et de même pour la courbure orientée. La courbure orientée de $\bar{\gamma}$ en s est égale à

$$\frac{d}{ds}\big(\theta(\sigma^{-1}(s))\big) = \frac{\theta'(\sigma^{-1}(s))}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}.$$

D'où, la courbure orienté de γ en $t = \sigma^{-1}(s)$ est

$$k(t) = \frac{\theta'(t)}{\sigma'(t)} = \frac{\theta'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\omega(t)}{v(t)},$$

où $\omega(t) = \theta'(t)$ est la vitesse angulaire orientée du repère de Frenet. Donc

$$\omega(t) = k(t)v(t), \qquad \vec{T}'(t) = k(t)v(t)\vec{N}(t), \qquad \vec{N}'(t) = -k(t)v(t)\vec{T}(t).$$

En utilisant la relation $\vec{T}'(t) = k(t)v(t)\vec{N}(t)$, on trouve que

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}\Big(v(t)\vec{T}(t)\Big) &= v'(t)\vec{T}(t) + v(t)\vec{T}'(t) \\ &= v'(t)\vec{T}(t) + k(t)(v(t))^2\vec{N}(t). \end{aligned}$$

Cette relation

$$\vec{a}(t) = v'(t)\vec{T}(t) + k(t)(v(t))^2\vec{N}(t)$$

s'appelle la *relation de Frenet*.

À partir de la relation $\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$ et de la relation de Frenet, on trouve facilement encore une formule pour la courbure orientée :

$$\det{}_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{v}(t), \vec{a}(t)) = k(t)(v(t))^3,$$

et donc

$$k(t) = \frac{\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(\vec{v}(t), \vec{a}(t))}{(v(t))^3}.$$

La courbure κ est comme avant définie comme la valeur absolue de la courbure orientée k :

$$\kappa(t) = |k(t)|\,.$$

VIII.7. Intégrale curviligne

Considérons un objet mobile qui se déplace dans un espace euclidien, ou dans un plan, ou sur une droit E sur un intervalle du temps I. (On présuppose avoir fixé un *référentiel* au sens de la mécanique newtonienne.) Dans chaque moment t, soit $\boldsymbol{v}(t)$ la vitesse de l'objet, et soit $\boldsymbol{F}(t)$ la force exercée sur l'objet. Pour simplifier le modèle, on va oublier ici que les unités de mesure des distances, des vitesses, et des forces sont toutes différentes, et on va traiter les mêmes vecteurs de E au choix comme vecteurs de déplacement, ou comme vecteurs de vitesse, ou comme vecteurs d'accélération, ou comme vecteurs de force. Dans ce cas, le travail de la force pendant un intervalle du temps $[t_1, t_2] \subset I$ est donnée par l'intégrale

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{F}(t),\, \boldsymbol{v}(t)\rangle\, dt\,.$$

Il faut cependant distinguer une intégrale de cette forme d'une *intégrale curviligne du second type* définie ci-dessous, qui sert à exprimer le travaille accompli par un *champ de force* sur un déplacement d'un objet mobile.

Supposons maintenant que la force est une fonction de la position et pas du temps : $\boldsymbol{F}\colon E \to \vec{E}$. Ainsi $\boldsymbol{F}$ est un *champ vectoriel* dans E. Soit $\gamma(t)$ la position de l'objet au moment t. Alors $\gamma\colon I \to E$ est une courbe paramétrée dans E, et $\boldsymbol{v}(t) = \gamma'(t)$. Dans ce cas, le travail de la force pendant $[t_1, t_2]$ est

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\, \boldsymbol{v}(t)\rangle\, dt = \int_{t=t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\, \gamma'(t)\rangle\, dt\,.$$

On peut aussi utiliser une espèce d'une *intégrale de Stieltjes* pour exprimer ce travail ainsi :

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \langle \boldsymbol{F}(\gamma(t)),\, d\gamma(t)\rangle\,.$$

Une intégrale de cette forme s'appelle l'*intégrale curviligne* du champ $\boldsymbol{F}$ le long de γ entre t_1 et t_2.

On peut montrer que la valeur d'une intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage autant que la trajectoire et le sens dans lequel elle est traversée sont donnés.

Une autre propriété remarquable de l'intégrale curviligne apparaît lorsque la force $\vec{F}$ admet un *potentiel* $f\colon P \to \mathbf{R}$, c'est-à-dire quand

$$\vec{F} = -\nabla f = -\left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\right) f = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath}.$$

Dans ce cas, l'intégrale curviligne de $\vec{F}$ le long de γ entre t_1 et t_2 est la différence des valeurs du potentiel f entre $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \vec{F}(\gamma(t)),\, d\gamma(t)\right\rangle = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_2)).$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \vec{F}(\gamma(t)),\, d\gamma(t)\right\rangle &= -\int_{t_1}^{t_2} \langle (\nabla f)(\gamma(t)),\, d\gamma(t)\rangle \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, dx(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, dy(t)\right) \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} d(f(\gamma(t))) \\ &= -[f(\gamma(t))]_{t_1}^{t_2} = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_2)).\end{aligned}$$

On peut aussi exprimer une intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F}\colon P \to \vec{P}$ en termes de *formes différentielles*. Posons

$$\omega(M; \vec{h}) = \left\langle \vec{F}(M),\, \vec{h}\right\rangle \quad \text{pour} \quad M \in P,\ \vec{h} \in \vec{P}.$$

Alors ω est une 1-*forme différentielle* dans P, et on a l'égalité :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \vec{F}(\gamma(t)),\, d\gamma(t)\right\rangle = \int_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} \omega,$$

où $\int_{\gamma|_{[t_1,t_2]}}\omega$ est l'*intégrale* de ω sur l'arc $\gamma|_{[t_1,t_2]}$, qui est définie comme la limite des sommes intégrales, de manière similaire à celle de la définition de l'intégrale de Riemann usuelle.

Le champ vectoriel $\vec{F}\colon P \to \vec{P}$ admet un potentiel $f\colon P \to \mathbf{R}$ si et seulement si la forme différentielle $\omega(M; \vec{h}) = \left\langle \vec{F}(M),\, \vec{h}\right\rangle$ est la *différentielle* de $-f$. C'est-à-dire, $\vec{F}$ s'écrit comme

$$\vec{F} = -\nabla f$$

si et seulement si ω s'écrit comme

$$\omega = -\,df,$$

où

$$\begin{aligned} df(M) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\,dy, \\ df\big(M; h_x\vec{i} + h_y\vec{j}\big) &= \frac{\partial f}{\partial x}(M)h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(M)h_y. \end{aligned}$$

(Ici dx et dy dénotent les différentielles des fonctions x et y qui à chaque point de P associent ces coordonnées x et y, et donc pas les même fonctions x et y qui représentent les coordonnées des points de γ paramétrées par $t \in I$.) Il y a un théorème général (le *théorème de Stokes*) selon lequel, en particulier,

$$\int\limits_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} df = f(\gamma(t_2)) - f(\gamma(t_1)),$$

et donc

$$\int\limits_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} \omega = -\int\limits_{\gamma|_{[t_1,t_2]}} df = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_2)).$$