Bases du langage mathématique

Série pour L1 / bac + 1

Notes rédigées par Alexey Muranov

23 janvier 2025

Table des matières

1 « Formules » et « énoncés »

1.1 Énoncés mathématiques en exemples

Exemples.
Un énoncé peut être vrai ou faux.

1.2 Quantificateurs

Supposons qu'on parle de nombres réels.

(1) Est-il vrai que $x^2 - 1 = 0$?

(2) Est-il vrai que $x^2 + 1 = 0$?

(3) Est-il vrai que $x^2 + 1 > 0$?

Ces questions n'ont vraiment pas de sens, car la variable « x » ne dénote aucun nombre. Ne pouvant pas répondre par « oui » ou « non », on peut essayer de répondre à (1), que la question n'a pas de sens, à (2), que c'est *jamais* vrai, et à (3), que c'est *toujours* vrai.

Par contre, toujours dans le contexte de nombres réels, on peut répondre aux questions suivantes :

(1) est-il vrai qu'il existe un x tel que $x^2 - 1 = 0$?

(2) est-il vrai qu'il existe un x tel que $x^2 + 1 = 0$?

(3) est-il vrai que pour tout x, $x^2 + 1 > 0$?

Les réponses sont « oui », « non », « oui ». (Par ailleurs, dans le contexte de nombres complexes, les réponses sont « oui », « oui », « non ».)

Notation (Quantification universelle). « $\forall x(\dots)$ » signifie « pour tout x, … ».

Notation (Quantification existentielle). « $\exists x(\dots)$ » signifie « il existe un x tel que … ».

Exemple. L'énoncé

$$\forall m \exists n (m + n = 0)$$

est vrai pour les entiers mais faux pour les entiers positifs. L'énoncé

$$\exists n \forall m (m + n = 0)$$

est faux pour les entiers (ainsi que pour les entiers positifs).

Lorsque on utilise la quantification « pour tout » ou « il existe », on peut avoir besoin de préciser de quels éléments on parle. Par exemple, l'énoncé

> Il existe un nombre qui au carré fait -1.

est faux si on parle des entiers ou des réels, mais vrai si on parle des nombres complexes. Pour être clair, on peut soit donner le contexte séparément, soit être plus précis dans l'énoncé. Par exemple :

Il existe un nombre réel qui au carré fait -1.

Cet énoncé est sans ambiguïté, et il est clairement faux. L'énoncé suivant est vrai :

Il existe un nombre complexe qui au carré fait -1.

Ces deux énoncés peuvent être écrits en symboles comme « $\exists n \in \mathbf{R}\,(n^2 = -1)$ » (le faux) et « $\exists n \in \mathbf{C}\,(n^2 = -1)$ » (le vrai).

L'expression « $\forall x \in A\,(\dots)$ » se lit comme « pour tout x dans A, … » ou « quelque soit x dans A, … ». La phrase « pour tout x dans A, … » peut être comprise comme une forme abrégée de « pour tout élément de A, si on l'appelle "x", alors … ».

L'expression « $\exists x \in A\,(\dots)$ » se lit comme « il existe un x dans A tel que … ». Cette phrase peut être comprise comme une forme abrégée de « il existe un élément de A tel que si on l'appelle "x", alors … ».

2 Ensembles

2.1 Notion d'un ensemble

Propriété importants : si A et B sont ensembles, alors

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Notation

Voici quelque exemples de la notation courante pour présenter des certains ensembles.

L'ensemble $\varnothing$ est l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément. On pourrait dire que $\varnothing$ est l'ensemble « nul ».

Si a, b, c sont des objets quelconques et

$$A = \{a, b, c\},$$

alors A est l'ensemble dont a, b, c sont des éléments, et qui ne contient aucun autre élément. Ainsi, si a, b, et c sont 3 objets différents, alors A contient 3 élément. Une autre façon d'écrire l'ensemble vide $\varnothing$ est $\{\}$.

Si D est un ensemble, f et g sont deux fonctions, et

$$B = \{\, x \in D \mid f(x) = g(x) \,\},$$

alors B est l'ensemble de tous les éléments x de D qui satisfont l'équation $f(x) = g(x)$.

Si D est un ensemble, f est une fonction, et

$$C = \{\, f(x) \mid x \in D \,\},$$

alors C est l'ensemble de tous les valeurs $f(x)$ pour $x \in D$.

Ensembles usuels de nombres

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – les nombres naturels,[1]
$\mathbf{Z}$ – les entiers relatifs,
$\mathbf{Q}$ – les rationnels,
$\mathbf{R}$ – les réels,
$\mathbf{R}^* \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{R} \setminus \{0\}$ – les réels non nuls,
$\mathbf{R}_+ \overset{\text{déf}}{=} [0, +\infty[$ – les réels positifs,
$\mathbf{R}_+^* \overset{\text{déf}}{=}]0, +\infty[$ – les réels strictement positifs,
$\mathbf{C}$ – les complexes,
$\mathbf{C}^* \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{C} \setminus \{0\}$ – les complexes non nuls.

2.2 Éléments et parties

Un ensemble A est une *partie* d'un ensemble B, noté $A \subset B$ ou $B \supset A$, si et seulement si chaque élément de A est un élément de B. Ainsi,

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

et

$$A \supset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftarrow x \in B).$$

2.3 Opérations

L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, composé des éléments communs de A et de B.

L'*union* des ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, composé des éléments de A et de B.

La *différence* de l'ensemble A et de l'ensemble B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, composé des éléments de A qui ne sont pas éléments de B.

Ainsi,

(1) $A \cap B \overset{\text{déf}}{=} \{\, x \mid x \in A \text{ et } x \in B \,\}$,

(2) $A \cup B \overset{\text{déf}}{=} \{\, x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \,\}$,

(3) $A \setminus B \overset{\text{déf}}{=} \{\, x \mid x \in A \text{ et } x \notin B \,\}$.

[1] Dans la littérature anglaise, $\mathbf{N}$ (les « naturels ») signifie l'ensemble des entiers strictement positifs $\{1, 2, 3, \dots\}$.