Nombres complexes

Série pour L1 / bac + 1

Notes rédigées par Alexey Muranov

14 février 2025

Table des matières

1 Qu'est-ce que c'est, un nombre complexe ?

`SECTION-BROUILLON`

Les *nombres complexes* sont les « nombres » de la forme

$$a + b\boldsymbol{i},$$

où $a, b \in \mathbf{R}$, et $\boldsymbol{i}$ est un certain nombre complexe « distingué »[1] tel que

$$1 + \boldsymbol{i}^2 = 0.$$

Les opérations d'addition et de multiplication des nombres complexes sont définies de manière naturelle, compte tenu de l'égalité $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

Note historique. Autrefois on doutait de l'existence des « nombres » tels que $\boldsymbol{i}$, et on disait qu'ils étaient *imaginaires*, ou encore *impossibles*.[2] D'ailleurs, les nombres strictement négatifs pouvaient aussi raisonnablement être considérés impossible et imaginaires.[3] Dans l'usage contemporain, le mot « imaginaire » apparaît dans différents termes mathématiques, et il a perdu son sens original. En plus, les sens des termes comme « purement imaginaire » et « partie imaginaire » ont été altérés au cours de l'histoire.

À notre époque, il est courant de définir les nombres *purement imaginaires*, ou *imaginaires purs*, comme les nombres complexes de la forme $b\boldsymbol{i}$ avec $b \in \mathbf{R}$. Dans ce cas, le nombre zéro est à la fois réel et purement imaginaire, ce qui a l'air absurde.

Note historique. Historiquement, parfois on appelait *imaginaires* tous les nombres complexes qui ne sont pas réels, et parfois on appelait ainsi uniquement les nombres complexes de la forme $b\boldsymbol{i}$ avec $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; dans le premier cas, les nombres imaginaires de la forme $b\boldsymbol{i}$ avec $b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pouvaient être appelés *purement imaginaires*.[4]

On admet que quels que soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, si $a + b\boldsymbol{i} = c + d\boldsymbol{i}$, alors $a = c$ et $b = d$. Ainsi tout nombre complexe x s'écrit d'une façon unique comme $x = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

On admet que $0\boldsymbol{i} = 0$, et donc tout nombre réel a s'écrit comme $a = a + 0\boldsymbol{i}$. Ainsi l'ensemble $\mathbf{R}$ est identifié avec une partie de l'ensemble $\mathbf{C}$.

Si $x = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, on appelle a la *partie réelle* et b la *partie imaginaire* de x. (Attention : la partie imaginaire est réelle !) On note la partie réelle de x par $\operatorname{Re} x$, et la partie imaginaire par $\operatorname{Im} x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{C}$,

$$x = \operatorname{Re} x + \boldsymbol{i} \operatorname{Im} x.$$

[1] Il y a deux nombres complexes qui au carré font -1. Pour les distinguer, on note « $\boldsymbol{i}$ » un des deux (n'importe lequel). L'autre est alors $-\boldsymbol{i}$.

[2] Eduard Study et Élie Cartan. *Nombres complexes*. In : *Arithmétique et algèbre*. T. 1.fascicule 3 : *Arithmétique*. Sous la dir. de Jules Molk. 4 t. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées Tome I. Paris : Gauthier-Villars, 2 avr. 1908, p. 329-468. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2440f/f173.item`.

[3] Jean-Robert Argand. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. 2e éd. Paris : Gauthier-Villars, 1874. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110283x`, p. 2.

[4] Study et Cartan, *Nombres complexes*, p. 341, p. 346, note 64 de bas de page.

Note historique. Les définitions des parties réelle et imaginaire données ci-dessus sont courantes dans l'usage contemporain. Cependant, il peut paraître absurde que la partie imaginaire soit réelle, et que en plus elle puisse difficilement être appelé une « partie ».[5] En effet, encore au début du 20e siècle[6], la *partie imaginaire* du nombres complexe $a + b\boldsymbol{i}$, avec $a, b \in \mathbf{R}$, était définie comme $b\boldsymbol{i}$.

Les « définitions » données ci-dessus des nombres complexes et des opérations sur eux ne sont pas très précises, mais elles suffisent pour des applications.

Réalisations concrètes des nombres complexes

Deux façons de définir les nombres complexes en fournissant un *modèle* concret de $\mathbf{C}$ nécessitent un peu de l'*algèbre commutatif* ou de l'*algèbre linéaire*.

Par exemple, on peut définir les nombres complexes comme les *polynômes* réels de la forme $a + bX$ et définir les résultats d'additions et de multiplications comme les *restes* de la *division euclidienne* par $1 + X^2$ des résultats des opérations respectives sur les polynômes. Dans ce cas, le polynôme X peut être utilisé comme l'unité imaginaire $\boldsymbol{i}$, et alors la partie réelle de $a + bX$ sera a, et la partie imaginaire sera b.

Autrement, on peut définir les nombres complexes comme les *matrices* réelles de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ et utiliser les opérations d'addition et de multiplication usuelles pour les matrices. Dans ce cas, la matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ peut être utilisée comme l'unité imaginaire $\boldsymbol{i}$.

Dans tous les cas, il y aura des propriétés à vérifier.

`[...]`

2 Le corps commutatif $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes muni de ses opérations satisfait les propriétés suivantes, qui sont également satisfaites par l'ensemble des nombres réels et par l'ensemble des nombres rationnels :

(1) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(2) $x + 0 = x = 0 + x$,

(3) $x + (y - x) = y = (y - x) + x$,

(4) $y + x = x + y$,

(5) $x(yz) = (xy)z$,

(6) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(7) $x(y/x) = y = (y/x)x \quad \text{si } x \neq 0$,

(8) $yx = xy$,

(9) $x(y + z) = xy + xz$,

(10) $1 \neq 0$.

Comme en arithmétique, on utilise la notation abrégée suivante :

[5] Si b est une *partie* de $a + b\boldsymbol{i}$, alors qu'est-ce le *reste* ? Si, par exemple, on dit que 2 est une *partie* du polynôme $2X + 1$, on dirait que le *reste* est $2X + 1 - 2 = 2X - 1$.

[6] Study et Cartan, *Nombres complexes*, p. 351.

Notation. Si x est un nombre complexe, l'expression « $+x$ » veut dire $0 + x$ ($= x$), et l'expression « $-x$ » veut dire $0 - x$.

Définition. Un ensemble muni d'opérations d'addition, de soustraction, et de multiplication, ainsi que de constantes 0 et 1, est dit un *corps commutatif*[7] si pour lui les propriétés (les axiomes) 1–10 sont satisfaites.

Dans cette définition on sous-entend que les résultats des opérations en question sont définies pour tous les éléments de l'ensemble et appartiennent au même ensemble.

À partir de ces 10 propriétés on peut en déduire d'autres, en particulier la suivante :

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

En effet : $0x = 0x + 0 = 0x + (0x - 0x) = (0x + 0x) - 0x = (0 + 0)x - 0x = 0x - 0x = 0$.

Les ensembles de rationnels, des réels, et des complexes, munis de leurs opérations, forment les trois corps commutatifs bien connus : $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, et $\mathbf{C}$. Par contre, l'ensemble des entiers $\mathbf{Z}$ n'est pas un corps commutatif, car la propriété (7) n'est pas satisfaite. Dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres naturels, il manque même d'éléments opposés, ou, autrement dit, la soustraction n'est pas toujours définie.

Si on admet qu'on connaît les propriétés du corps commutatif $\mathbf{R}$, pour obtenir une description complète des propriétés du corps commutatif $\mathbf{C}$ il suffit de dire que :

- $\mathbf{C}$ est une *extension* de $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire, $\mathbf{R}$ est un « sous-corps » de $\mathbf{C}$), et que
- $\mathbf{C}$ contient un élément noté $\boldsymbol{i}$ tel que $1 + \boldsymbol{i}^2 = 0$, et que tout élément x de $\mathbf{C}$ s'écrit comme $x = a + b\boldsymbol{i}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$.

Le choix de la constant $\boldsymbol{i}$ dans $\mathbf{C}$ permet de définir les fonctions *partie réelle* $\operatorname{Re}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ et *partie imaginaire* $\operatorname{Im}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ par l'identité

$$x = \operatorname{Re} x + \boldsymbol{i} \operatorname{Im} x.$$

Pour $\mathbf{C}$, la propriété (7) – l'existence de l'inverse multiplicatif – peut être déduite du reste : si $x = a + b\boldsymbol{i} \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, alors

$$(a + b\boldsymbol{i})\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\boldsymbol{i}\right) = 1.$$

Si $\mathbf{K}$ est un corps commutatif et $x \in \mathbf{K}$, $x \neq 0$, alors on définit x^{-1} par l'identité

$$xx^{-1} = 1.$$

[7] Un *corps commutatif* est une espèce d'une *structure algébrique*. Parmi d'autres structures algébriques courantes en mathématique il y a les *corps non commutatifs* (par exemple, l'ensemble des *quaternions* $\mathbf{H}$), les *anneaux* (tout corps est un anneau, un exemple d'anneau qui n'est pas un corps est l'ensemble de entiers $\mathbf{Z}$ avec ses opérations d'addition et de multiplication), les *groupes* (par exemple, l'ensemble $\mathbf{Z}$ avec l'opération d'addition, ou l'ensemble des symétries d'un objet géométrique avec l'opération de composition), les *monoïdes* (tout groupe est un monoïde, comme un exemples de monoïde qui ne sont pas un groupe on peut prendre l'ensemble $\mathbf{Z}$ avec son opération de multiplication).

Cette définition est correcte car si $xy = 1$ et $xz = 1$, alors $y = y(xz) = (yx)z = z$.

On définit la division par la formule

$$\frac{x}{y} \overset{\text{déf}}{=} xy^{-1}.$$

Autrement, on peut définir la division directement, par l'équivalence suivante :

$$\frac{x}{y} = z \quad \Leftrightarrow \quad x = zy \qquad (\text{pour } y \neq 0).$$

Proposition. *Si* $\mathbf{K}$ *est un corps commutatif,* $x, y \in \mathbf{K}$*, et* $xy = 0$*, alors* $x = 0$ *ou* $y = 0$.

Démonstration. Supposons que $xy = 0$ et $x \neq 0$. Alors $y = 1 \cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0$. □

Exercice. Considérons l'ensemble $\mathbf{D}$ des *nombres complexes fendus*, qui sont les « nombres » de la forme $a + b\boldsymbol{j}$ avec $a, b \in \mathbf{R}$, où l'on impose l'égalité $\boldsymbol{j}^2 = 1$. On définit les opérations d'addition, de soustraction, et de multiplication dans $\mathbf{D}$ de façon naturelle, compte tenu de l'égalité $\boldsymbol{j}^2 = 1$. Montrer que $\mathbf{D}$ n'est pas un corps commutatif. (Indication : calculer le produit $(1 - \boldsymbol{j})(1 + \boldsymbol{j})$.)

Écriture cartésienne

La forme

$$a + b\boldsymbol{i}, \quad \text{où } a, b \in \mathbf{R},$$

d'écriture d'un nombre complexe z s'appelle la *forme cartésienne*, ou encore la *forme algébrique*, de z.

3 Conjugaison

Si $x \in \mathbf{C}$, le *conjugué* de x est

$$\overline{x} \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Re} x - \boldsymbol{i} \operatorname{Im} x.$$

Ainsi, pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$\overline{a + b\boldsymbol{i}} = a - b\boldsymbol{i}.$$

On a les propriétés suivantes pour $x, y \in \mathbf{C}$:

(1) $\overline{\overline{x}} = x$,

(2) $\overline{x} = x$ si et seulement si $x \in \mathbf{R}$,

(3) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ et $\overline{x - y} = \overline{x} - \overline{y}$,

(4) $\overline{xy} = (\overline{x})(\overline{y})$,

(5) si $y \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$,

(6) $x + \overline{x} = 2 \operatorname{Re} x$ et $x - \overline{x} = 2\boldsymbol{i} \operatorname{Im} x$,

(7) $\overline{x}x = (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2$.

Proposition. *Soit P un polynôme à coefficients réels ($P \in \mathbf{R}[X]$). Alors pour tout z complexe, $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. En particulier, si z est une racine de P, alors $\overline{z}$ l'est aussi.*

Démonstration. Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n} = (\overline{a_0}) + (\overline{a_1})(\overline{z}) + \cdots + (\overline{a_n})(\overline{z})^n \\ &= a_0 + a_1\overline{z} + \cdots + a_n\overline{z}^n = P(\overline{z}).\end{aligned}$$

□

4 Géométrie des nombres complexes

Le corps commutatif $\mathbf{C}$ est un espace vectoriel réel[8] (car il satisfait les 8 axiomes d'un espace vectoriel réel). La dimension réelle[9] de $\mathbf{C}$ est 2 : $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$. En effet, $(1, \boldsymbol{i})$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbf{C}$. Ainsi, $\mathbf{C}$ est un plan vectoriel (réel).

Tout plan vectoriel peut être vu comme un plan affine, si on s'autorise à traiter chaque vecteur soit dans son rôle de vecteur, soit dans le rôle d'un point. (Par exemple, les éléments de $\mathbf{R}^2$ peuvent être traités comme des vecteurs ou comme des points.) Ainsi $\mathbf{C}$ est aussi un plan affine (comme $\mathbf{R}^2$).

Un choix naturel d'un repère dans $\mathbf{C}$ est $(0, 1, \boldsymbol{i})$, où 0 est traité comme le point d'origine, et 1 et $\boldsymbol{i}$ sont traités comme deux vecteurs qui forment la base $(1, \boldsymbol{i})$.

On va munir le plan affine $\mathbf{C}$ de l'orientation qui rend la base $(1, \boldsymbol{i})$ directe.

On va aussi munir le plan $\mathbf{C}$ du produit scalaire qui rend la base $(1, \boldsymbol{i})$ orthonormée :

$$\langle x, y\rangle \overset{\text{déf}}{=} (\operatorname{Re} x)(\operatorname{Re} y) + (\operatorname{Im} x)(\operatorname{Im} y) = \operatorname{Re}(\overline{x}y) = \frac{\overline{x}y + x\overline{y}}{2}.$$

Ainsi on va traiter l'ensemble $\mathbf{C}$ comme un plan affine euclidien orienté, où le repère $(0, 1, \boldsymbol{i})$ est orthonormé direct, et dans ce cas on va appeler l'ensemble $\mathbf{C}$ le *plan complexe*.

Dans le plan complexe, l'opération de conjugaison est la réflexion orthogonale par rapport à l'*axe réelle* $\mathbf{R}$.

Toutes les notions de la géométrie euclidienne planaire peuvent être utilisées dans le plan complexe $\mathbf{C}$. En particulier :

- Le *disque ouvert* de centre $z_0 \in \mathbf{C}$ et de rayon $r > 0$ dans $\mathbf{C}$ est l'ensemble
$$\mathring{D}(z_0, r) \overset{\text{déf}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r \,\}.$$
- Le *disque fermé* de centre $z_0 \in \mathbf{C}$ et de rayon $r > 0$ dans $\mathbf{C}$ est l'ensemble
$$\overline{D}(z_0, r) \overset{\text{déf}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leqslant r \,\}.$$
- Le *cercle* de centre $z_0 \in \mathbf{C}$ et de rayon $r > 0$ dans $\mathbf{C}$ est l'ensemble
$$\partial D(z_0, r) \overset{\text{déf}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r \,\}.$$

[8] En fait, tout corps qui contient le corps des réels $\mathbf{R}$ comme un sous-corps est évidemment un espace vectoriel réel. Par exemple, le corps (non commutatif) des quaternions $\mathbf{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension 4.

[9] On pourrait aussi parler de la dimension complexe de $\mathbf{C}$, celle-ci est 1 : $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$. En général, $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^n = n$ et $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^n = 2n$. Mais c'est une autre histoire.

Systèmes de coordonnées usuelles dans $\mathbf{C}$

Lorsque on parle des systèmes de coordonnées cartésienne ou polaire dans $\mathbf{C}$, on va sous-entendre les systèmes déterminées par le repère standard $(0, 1, \boldsymbol{i})$.

Ainsi, le nombre complexe de coordonnées cartésiennes (x, y) est $x + y\boldsymbol{i}$, et le nombre complexe de coordonnées polaires (r, θ) est $r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$.

Le terme « *affixe* » de Cauchy

À l'origine de l'interprétation géométrique des nombres complexes étaient les travaux de Caspar Wessel[10] et de Robert Argand.[11] Ils ont interprété les nombres complexes comme vecteurs géométriques (libres) dans un plan euclidien. Dans leur interprétation, l'opération de multiplication est déterminée par le choix d'un vecteur unité qui représente le nombre 1.

Suivant Argand, Cauchy a aussi interprété les nombres complexes comme vecteurs dans un plan euclidien, qu'il appelait *quantities géométriques*.[12] Cauchy a introduit les termes *argument*[13] et *affixe*.[14]

Peut-être le choix du mot « argument » était lié à la notation utilisée par Cauchy : il notait « r_p » le nombre complexe de module r et d'argument p (par exemple : $1 = 1_0$, $-1 = 1_\pi$, $\boldsymbol{i} = 1_{\frac{\pi}{2}}$).

Si une *origine* O est choisie dans le plan en question, et que A est un point du plan, alors Cauchy appelait le nombre complexe $\overrightarrow{OA}$ l'*affixe* de A. Si dans le repère $(O, 1, \boldsymbol{i})$ les coordonnées cartésiennes de A sont (x, y), alors l'affixe de A, selon Cauchy, est le nombre complexe $\overrightarrow{OA} = x + y\boldsymbol{i}$.

En France contemporaine, parfois on parle de « plans complexes d'Argand-Cauchy », où on définit les *affixes* des vecteurs et des points. Il paraît qu'un « plan complexe d'Argand-Cauchy » est tout simplement un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct. Sinon, peut-être c'est tout simplement un plan affine muni d'un repère : tant qu'il y a un repère, on peut toujours, si on veut, l'utiliser pour définir un produit scalaire et une orientation « compatibles ».

Soit P un plan affine muni d'un repère $O\boldsymbol{uv}$. Ceux qui appellent P un « plan complexe d'Argand-Cauchy » procèdent à définir les *affixes* des vecteurs et des points de P ainsi : l'affixe d'un vecteur $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$, noté $\operatorname{Aff}(\boldsymbol{a})$, est $x + y\boldsymbol{i}$:

$$\operatorname{Aff}(x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v}) \overset{\text{déf}}{=} x + y\boldsymbol{i} \quad \text{pour} \quad x, y \in \mathbf{R},$$

[10] Caspar Wessel. *Essai sur la représentation analytique de la direction.* Copenhague, 1897. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g`.

[11] Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.*

[12] Augustin-Louis Cauchy. "Mémoire sur les quantities géométriques". In : *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* T. 4. Paris : Bachelier, 1847, p. 157-180.

[13] Cauchy, "Mémoire sur les quantities géométriques", p. 158.

[14] Augustin-Louis Cauchy. "Sur la quantité géométrique $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$, et sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme $x + yi$". In : *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* T. 4. Paris : Bachelier, 1847, p. 213-219, p. 216.

et l'affixe d'un point A, noté $\mathrm{Aff}(A)$, est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$:

$$\mathrm{Aff}(A) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Aff}(\overrightarrow{OA}).$$

En particulier :

$$\mathrm{Aff}(\boldsymbol{u}) = 1, \quad \mathrm{Aff}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{i}, \quad \mathrm{Aff}(O) = 0.$$

5 Norme algébrique et module

Si $x \in \mathbf{C}$, la *norme algébrique* de x est

$$N(x) \overset{\text{déf}}{=} \overline{x}x = (\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2,$$

et le *module* (ou la *valeur absolue*) de x est

$$|x| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{N(x)} = \sqrt{\overline{x}x} = \sqrt{(\operatorname{Re} x)^2 + (\operatorname{Im} x)^2}.$$

Ainsi, pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$N(a + b\boldsymbol{i}) = a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad |a + b\boldsymbol{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si x est réel, alors le module de x coïncide avec la valeurs absolue habituelle de x, et pour cela la notation est la même.

On a les propriétés suivantes pour $x, y \in \mathbf{C}$:

(1) $N(\overline{x}) = N(x)$ et $|\overline{x}| = |x|$,

(2) $\overline{x}x = N(x) = |x|^2$,

(3) $N(xy) = N(x)N(y)$ et $|xy| = |x|\,|y|$,

(4) $|\operatorname{Re}(\overline{x}y)| \leqslant |x|\,|y|$ (l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*),

(5) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (l'*inégalité triangulaire*).

Pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire, on peut remarquer qu'elles sont des cas particuliers des inégalités déjà connues dans le cadre des espaces vectoriels euclidiens. En effet, par rapport au produit scalaire introduit dans le plan complexe,

$$\langle x,\, y\rangle = \operatorname{Re}(\overline{x}y)$$

et

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle} = \sqrt{\operatorname{Re}(\overline{x}x)} = \sqrt{\overline{x}x} = |x|\,.$$

(On peut appeler $\|x\|$ la *norme géométrique* de x, pour la distinguer de la norme algébrique $N(x)$.)

Si z est un nombre complexe de coordonnées cartésiennes (x, y), alors

$$N(z) = x^2 + y^2, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si z est un nombre complexe de coordonnées polaires (r, θ), alors

$$N(z) = r^2, \quad |z| = |r|\,.$$

6 Racines carrées

Définition. Soit z un nombre complexe. Une *racine carrée* de z est un nombre complexe u tel que $u^2 = z$. Une *racine cubique* de z est un nombre complexe u tel que $u^3 = z$. Une *racine n-ième* de z est un nombre complexe u tel que $u^n = z$.

Exemple. Le nombre -1 est une racine carrée de 1, $-\boldsymbol{i}$ est une racine carrée de -1, $1 - \boldsymbol{i}$ est une racine carrée de $-2\boldsymbol{i}$.

Si x est un réel positif, alors la notation $\sqrt{x}$ est utilisée pour la *racine carrée positive* de x. (Dans ce cas, $-\sqrt{x}$ est aussi une racine carrée de x.) Ainsi,

$$\sqrt{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad (y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x = y^2).$$

Proposition. *Soient z un nombre complexe et u une racine carrée de z. Alors $-u$ est aussi une racine carrée de z, et z n'a pas d'autres racines carrées complexes.*

Démonstration. Comme $(-u)^2 = ((-1)u)^2 = (-1)^2u^2 = z$, $-u$ est une racine carrée de z.

Soit w une racine carrée complexe de z. Alors

$$(w - u)(w + u) = w^2 - u^2 = z - z = 0.$$

D'où, soit $w - u = 0$, soit $w + u = 0$. Donc $w \in \{\pm u\}$. □

Remarque. Le raisonnement dans cette démonstration s'applique à tout corps commutatif. On peut montrer qu'en général dans un corps commutatif un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines distinctes, et on peut en déduire qu'un élément d'un corps commutatif ne peut pas avoir plus de n racines n-ièmes distincts.

Proposition. *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes, dont la somme et* 0.

Clairement, la seule racine carrée de 0 est 0.

On va démontrer cette proposition en montrant comment les racines complexes d'un nombre complexe peuvent être trouvées.

Considérons d'abord un nombre réel a.

Pour $a \geqslant 0$, en analyse on montre que a admet une racine carrée positive notée $\sqrt{a}$ et une racine carrée négative égale à $-\sqrt{a}$.

Si $a \leqslant 0$, alors $\pm\boldsymbol{i}\sqrt{-a}$ sont les racines carrée de a.

Soit maintenant $z = a + b\boldsymbol{i}$ un nombre complexe, où $a, b \in \mathbf{R}$. On va supposer que $b \neq 0$, car le cas $b = 0$ a déjà été traité. On va chercher les nombres complexes u tels que $u^2 = z$.

Posons $u = x + y\boldsymbol{i}$, avec $x, y \in \mathbf{R}$. Comme $u^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\boldsymbol{i}$, on a le système à résoudre :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Pour simplifier la résolution de ce système, on remarque que $|u|^2 = |u^2| = |z|$. On a ainsi une équation qu'on peut ajouter au système sans changer l'ensemble des solutions (car cette équation découle du système initial) :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On commence par résoudre le système de deux équations avec x^2 et y^2 :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

(Les valeurs sous $\sqrt{\ }$ sont des réels positifs.) Dans le cas $b \neq 0$, il y a donc 4 solutions, qui correspondent aux choix des signes $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$, et $(-,-)$.

Maintenant on ajoute l'équation $2xy = b$, et on trouve que dans le cas $b > 0$, où x et y son de même signe, la solution générale pour u est

$$u = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \boldsymbol{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

et que dans le cas $b < 0$, où x et y sont de signes opposés, la solution générale pour u est

$$u = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \boldsymbol{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

D'ailleurs, les deux formules s'appliquent aussi au cas $b = 0$.

Exercice. Calculer les racines carrées de $\pm\boldsymbol{i}$, les racines cubiques de 1.

Équations quadratiques

L'équation du second degré

$$az^2 + bz + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbf{C}$ et $a \neq 0$, se résout à l'aide de l'introduction d'une nouvelle inconnue w par le « changement de variable »

$$2az + b = w,$$

ou, d'une manière similaire, à l'aide de la *forme canonique du trinôme du second degré* :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right),$$

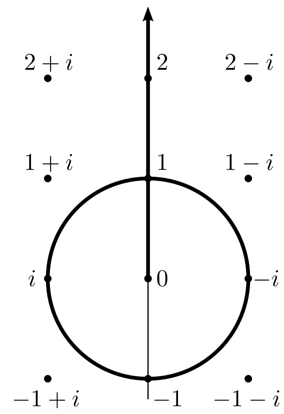

FIG. 1 : Cercle unité.

où Δ est le *discriminant* du trinôme :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit δ une racine carrée de Δ : $\Delta = \delta^2$. (Donc l'autre racine carrée de Δ est $-\delta$.) Alors

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

D'où, l'ensemble des solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est

$$\left\{\frac{-b \pm \delta}{2a}\right\}, \quad \text{où} \quad \delta^2 = b^2 - 4ac.$$

(En particulier, si $\delta = 0$, alors il y a une seule solution : $z = \frac{-b}{2a}$.)

7 Nombres complexes unitaires et cercle unité

Les nombres complexes du module 1 sont dits *unitaires*. Soit $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes unitaires :

$$\mathbf{U} \overset{\text{déf}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \,\}.$$

L'ensemble $\mathbf{U}$ est le cercle de centre $0 = 0 + 0\boldsymbol{i}$ et de rayon 1 dans le plan complexe. On va l'appeler le *cercle unité* tout court.

Observons que $z/|z| \in \mathbf{U}$ pour tout $z \neq 0$.

Le cercle unité $\mathbf{U}$ est *stable* par multiplication, par conjugaison, et par inversion :

(1) si $z, w \in \mathbf{U}$, alors $zw \in \mathbf{U}$ (car $|zw| = |z|\,|w|$).

(2) si $z \in \mathbf{U}$, alors $z^{-1} = \overline{z} \in \mathbf{U}$ (car $|\overline{z}| = |z|$ et $\overline{z}z = |z|^2$).

Exercice. Soit $u \in \mathbf{U}$, et soit $m_u\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $m_u(z) = uz$.

(1) Montrer que pour tous points $z, w \in \mathbf{C}$ du plan complexe,
- la distance entre $m_u(z)$ et $m_u(w)$ est égale à la distance entre z et w.

(2) Montrer que pour tous vecteurs non nuls $z, w \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ du plan complexe,
- l'angle non orienté entre $m_u(z)$ et $m_u(w)$ est égale à l'angle non orienté entre z et w, et que
- l'angle non orienté entre $m_u(z)$ et z est égale à l'angle non orienté entre $m_u(w)$ et w.

Si on avait défini précisément les *rotations* d'un plan euclidien, on pourrait démontrer la proposition suivante.

Proposition. *Si $u \in \mathbf{U}$, alors la fonction (l'application) $m_u\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par*

$$m_u(z) = uz$$

est une rotation du plan complexe de centre 0.

8 Décomposition polaire

Si z est un nombre complexe non nul, alors

$$z = \frac{z}{|z|}|z|, \quad \frac{z}{|z|} \in \mathbf{U}, \quad |z| \in \mathbf{R}_+.$$

En plus, $0 = 1 \cdot 0$, $1 \in \mathbf{U}$, $0 \in \mathbf{R}_+$. Ainsi, tout nombre complexe z peut être décomposé en produit

$$z = ur \quad \text{avec} \quad |u| = 1 \quad \text{et} \quad r \geqslant 0.$$

Une telle décomposition d'un nombre complexe z comme produit ur (ou ru) avec u unitaire ($u \in \mathbf{U}$) et r positif ($r \in \mathbf{R}_+$) s'appelle une *décomposition polaire* de z.

Si $z = ur$ est une décomposition polaire, alors, clairement, $r = |z|$. Dans le cas $z \neq 0$, il en résulte que $u = z/|z|$. Ainsi, tout nombre complexe non nul admet une unique décomposition polaire.

Les ensembles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{U}$ sont stables par multiplication et inversion. En particulier, si $z_1 = r_1u_1$ et $z_2 = r_2u_2$, où $r_1, r_2 \in \mathbf{R}_+^*$ et $u_1, u_2 \in \mathbf{U}$, alors,

$$z_1z_2 = (r_1r_2)(u_1u_2),$$

où $r_1r_2 \in \mathbf{R}_+^*$, $u_1u_2 \in \mathbf{U}$.

9 Écriture trigonométrique et argument

Si on applique à $\mathbf{U}$ la définition géométrique des fonctions sin et cos à partir d'un cercle unité, on découvre que tout $u \in \mathbf{U}$ s'écrit (de façon non unique) comme

$$u = \cos t + \boldsymbol{i}\sin t \quad \text{avec} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Une telle écriture s'appelle une *forme trigonométrique* de $u \in \mathbf{U}$.

En général, une *forme trigonométrique* de $z \in \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ est une écriture de z sous la forme :

$$z = r(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) \quad \text{avec} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dans ce cas, $r = |z|$ et $\cos t + \boldsymbol{i}\sin t = z/|z| \in \mathbf{U}$. Tout t qui peut apparaître dans cette formule pour z s'appelle un *argument* de z. On note $\arg z$ l'ensemble des arguments de z.

Tout $z \in \mathbf{C}^*$ a une infinité d'arguments, et si $\theta \in \arg z$ est un argument de z, alors $\arg z = \theta + 2\pi\mathbf{Z} = \{\,\theta + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\,\}$.[15]

L'unique argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi]$ s'appelle l'*argument principal* de z et est noté $\operatorname{Arg} z$. La fonction $\operatorname{Arg}\colon \mathbf{C}^* \to]-\pi, \pi]$ est appelée la *détermination principale de l'argument*.

Exercice. Quels sont les arguments des réels, des imaginaires purs, des réels positifs ?

Si z est un nombre complexe non nul de coordonnées polaires (r, θ), alors θ est un argument de z.

Rapport avec la multiplication

Pour tout $u \in \mathbf{U}$, on va noter m_u la fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par

$$m_u(z) = uz.$$

Proposition. *Quels que soient $u \in \mathbf{U}$ et $t \in \mathbf{R}$, les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $u = \cos t + \boldsymbol{i}\sin t$,

(2) m_u *est la rotation d'angle t et de centre* 0 dans le sens trigonométrique.

Esquisse d'une démonstration. On admet que pour tout $u \in \mathbf{U}$, m_u est une rotation du plan complexe de centre $0 = 0 + 0\boldsymbol{i}$ (comme expliqué précédemment). Il reste la question de l'angle.

Supposons que

$$u = \cos t + \boldsymbol{i}\sin t.$$

[15] On peut dire que $\arg z$ est une « classe d'équivalence modulo 2π ».

On remarque que $m_u(1) = u$. D'où,

$$m_u(\cos 0 + \boldsymbol{i} \sin 0) = m_u(1) = u = \cos t + \boldsymbol{i} \sin t.$$

Donc, m_u est une rotation d'angle t dans le sens trigonométrique.

Supposons maintenant que m_u est une rotation d'angle t dans le sens trigonométrique. Alors,

$$u = m_u(1) = m_u(\cos 0 + \boldsymbol{i} \sin 0) = \cos t + \boldsymbol{i} \sin t. \qquad \square$$

On peut facilement vérifier que pour tous $u, v \in \mathbf{U}$, $m_v \circ m_u = m_{vu}$. En effet :

$$(m_v \circ m_u)(z) = m_v(m_u(z)) = m_v(uz) = vuz = m_{vu}(z).$$

Or, si m_u est une rotation d'angle s et m_v est une rotation d'angle t, alors le composé $m_v \circ m_u$ est une rotation d'angle $s + t$.

Ainsi, si

$$u = \cos s + \boldsymbol{i} \sin s \quad \text{et} \quad v = \cos t + \boldsymbol{i} \sin t.$$

alors

$$uv = vu = \cos(s+t) + \boldsymbol{i} \sin(s+t).$$

En résumé, pour tout $s, t \in \mathbf{R}$,

$$(\cos s + \boldsymbol{i} \sin s)(\cos t + \boldsymbol{i} \sin t) = \cos(s+t) + \boldsymbol{i} \sin(s+t).$$

On en déduit facilement la *formule de Moivre* : pour tout $t \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$(\cos t + \boldsymbol{i} \sin t)^n = \cos nt + \boldsymbol{i} \sin nt.$$

On a ainsi les propriétés suivantes de arg :

(1) si $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $\theta_1 \in \arg z_1$, et $\theta_2 \in \arg z_2$, alors

$$\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 z_2) \quad \text{et} \quad \theta_1 - \theta_2 \in \arg \frac{z_1}{z_2},$$

(2) si $z \in \mathbf{C}^*$ et $\theta \in \arg z$, alors

$$-\theta \in \arg \overline{z} = \arg(z^{-1}),$$

(3) si $z \in \mathbf{C}^*$, $n \in \mathbf{Z}$, et $\theta \in \arg z$, alors

$$n\theta \in \arg(z^n).$$

En particulier, si $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$ et θ est un angle orienté de z_1 à z_2 (où on traite z_1 et z_2 comme vecteurs), alors

$$\theta \in \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Rapport avec des identités trigonométriques

Pour $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \boldsymbol{i} \sin(x+y) &= (\cos x + \boldsymbol{i} \sin x)(\cos y + \boldsymbol{i} \sin y)\\ &= ((\cos x)(\cos y) - (\sin x)(\sin y)) + \boldsymbol{i}((\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y)),\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= (\cos x)(\cos y) - (\sin x)(\sin y),\\ \sin(x+y) &= (\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y).\end{aligned}$$

D'une manière similaire, à partir de la formule de Moivre, on peut trouver des expressions pour $\cos nx$ et $\sin nx$, pour $x \in \mathbf{R}$, comme polynômes en $\cos x$ et $\sin x$. En plus, en utilisant l'identité $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on peut en déduire une expression de $\cos nx$ comme un polynôme en $\cos x$ seul, et une expression de $\sin nx$ comme un produit de $\sin x$ et d'un polynôme en $\cos x$ seul. Par exemple :

$$\begin{aligned}\cos 3x + \boldsymbol{i} \sin 3x &= (\cos x + \boldsymbol{i} \sin x)^3\\ &= \cos^3 x + 3\boldsymbol{i} \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - \boldsymbol{i} \sin^3 x,\\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + \boldsymbol{i}(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x),\end{aligned}$$

d'où, et regardant séparément les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3(\cos x)(1 - \cos^2 x)\\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x,\\ \sin 3x &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = (\sin x)(3 \cos^2 x - \sin^2 x)\\ &= (\sin x)(4 \cos^2 x - 1).\end{aligned}$$

10 Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel non nul. On appelle *racine n^{e} de l'unité* une racine n^{e} de 1. On va noter « $\mathbf{U}_n$ » l'ensemble des racines n^{es} de l'unité :

$$\mathbf{U}_n \overset{\text{déf}}{=} \{\, z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1 \,\}.$$

Si z est une racine n^{e} de l'unité, alors $|z|^n = |z^n| = |1| = 1$, d'où, $|z| = 1$ (car $|z| > 0$). Ainsi, $\mathbf{U}_n \subset \mathbf{U}$.

Pour déterminer les racines n^{es} de l'unité « explicitement », on peut les chercher donc sous la forme $\cos\theta + \boldsymbol{i} \sin\theta$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \boldsymbol{i} \sin\theta)^n = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos n\theta + \boldsymbol{i} \sin n\theta = 1\\ &\Leftrightarrow \quad n\theta \equiv 0 \mod 2\pi\mathbf{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbf{Z} \colon n\theta = 2\pi k.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \cos\frac{2\pi k}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi k}{n} \,\middle|\, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

On peut voir géométriquement que pour $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi k_1}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi k_1}{n} = \cos\frac{2\pi k_2}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi k_2}{n} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\pi k_1}{n} \equiv \frac{2\pi k_2}{n} \mod 2\pi\mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad k_1 \equiv k_2 \mod n. \end{aligned}$$

Ainsi, il y a exactement n racines n^{es} de l'unité distinctes, et

$$\mathbf{U}_n = \left\{ \cos\frac{2\pi k}{n} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi k}{n} \,\middle|\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

Géométriquement, dans le plan complexe $\mathbf{C}$, $\mathbf{U}_n$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier (à n côtés) centré en 0. En particulier, $\mathbf{U}_n$ est invariant par la rotation de centre 0 et d'angle $2\pi/n$.

Exercice. Calculer « à la main » $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, $\mathbf{U}_4$, $\mathbf{U}_5$. Dessiner les polygones réguliers correspondants.

L'étude des racines de l'unité s'appelle *cyclotomie* parce que les racines n^{es} coupent le cercle unité en n arcs « égales ».

11 Exponentielle complexe

Si $z \in \mathbf{C}$, l'*exponentielle* de z est[16]

$$\exp(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} + \cdots .$$

Cette définition de la fonction exp est due à Leonhard Euler.

Voici quelques propriétés remarquables de la fonction exponentielle, qui peuvent être démontrées en utilisant de l'analyse. Ici z et w sont des nombres complexes arbitraires.

(1) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$,

(2) $\exp(z-w) = \dfrac{\exp(z)}{\exp(w)}$,

(3) $\exp(0) = 1$,

(4) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$,

(5) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$,

(6) $\arg\exp(z) = \operatorname{Im} z + 2\pi\mathbf{Z}$.

[16] Bien entendu, il faut donner un sens à la « somme infinie », ce qui revient à définir le passage à la limite dans $\mathbf{C}$ à partir des sommes finies. Cela repose sur la notion de « série ».

En plus, quel que soit z complexe, $\exp(z) \neq 0$.

Le *nombre d'Euler e*, aussi connu comme la *constante de Néper*, est défini ainsi :

$$e \overset{\text{déf}}{=} \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \cdots \approx 2{,}7182818285.$$

Si $a > 0$ et $z \in \mathbf{C}$, on définit a^z comme

$$a^z \overset{\text{déf}}{=} \exp(\ln(a)z),$$

où ln est le *logarithme naturel* (aussi connu comme le *logarithme népérien*), qui peut être défini comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle réel.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$e^z = \exp(\ln(e)z) = \exp(1z) = \exp z$$

(car $\ln e = \ln(\exp 1) = 1$), et on peut donc écrire e^z au lieu de $\exp(z)$.

On ne va utiliser la notation « a^z » avec $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ que dans le cas où $a > 0$, car on ne peut pas définir, par exemple, $(-1)^{\boldsymbol{i}}$ comme un nombre complexe (unique) de façon suffisamment naturelle.[17]

Formule d'Euler

Si t est un réel, alors, d'après les propriétés de la fonction exp décrites ci-dessus,

$$\begin{aligned} \overline{\exp(t\boldsymbol{i})}\exp(t\boldsymbol{i}) &= \exp(\overline{t\boldsymbol{i}})\exp(t\boldsymbol{i}) = \exp(-t\boldsymbol{i})\exp(t\boldsymbol{i}) \\ &= \exp(-t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{i}) = \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $|\exp(t\boldsymbol{i})| = 1$. Autrement dit, $\exp(t\boldsymbol{i}) \in \mathbf{U}$. En utilisant de l'analyse, on peut affiner ce résultat et prouver la fameuse *formule d'Euler* :

$$\exp(t\boldsymbol{i}) = \cos t + \boldsymbol{i}\sin t.$$

En particulier,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi\boldsymbol{i})^n}{n!} = \exp(\pi\boldsymbol{i}) = \cos\pi + \boldsymbol{i}\sin\pi = -1.$$

Comme une consequence de la formule d'Euler, on a les identités pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\cos t = \frac{e^{t\boldsymbol{i}} + e^{-t\boldsymbol{i}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{t\boldsymbol{i}} - e^{-t\boldsymbol{i}}}{2\boldsymbol{i}}.$$

Exercice. Démontrer l'identité

$$e^{t\boldsymbol{i}} - 1 = e^{t\boldsymbol{i}/2}\,(2\boldsymbol{i}\sin t/2)\,.$$

Donner une formule analogue pour $e^{t\boldsymbol{i}} + 1$.

[17] Si on veut définir la valeur de $(-1)^{\boldsymbol{i}}$, est-ce que $(-1)^{\boldsymbol{i}} = (e^{\pi\boldsymbol{i}})^{\boldsymbol{i}} = e^{-\pi} = 1/e^{\pi}$, ou est-ce que $(-1)^{\boldsymbol{i}} = (e^{-\pi\boldsymbol{i}})^{\boldsymbol{i}} = e^{\pi}$? Un autre exemple : est-ce que $(-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$?

Écriture exponentielle des nombres complexes

Soit z in nombre complexe non nul. Alors z peut être écrit comme

$$z = \exp(w) \quad \text{avec} \quad w \in \mathbf{C}.$$

On pourrait appeler une telle écriture une *forme exponentielle* de z. Cependant, le plus souvent, une *forme exponentielle* de z signifie une écriture de z comme

$$z = r\exp(it) \quad \text{avec} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dans ce cas, $r = |z|$ et $t \in \arg(z)$.

En particulier, les racines n^{es} de l'unité s'écrivent comme

$$e^{2\pi k\boldsymbol{i}/n}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Linéarisation d'une expression trigonométrique

SOUS-SECTION-BROUILLON

Des formules d'Euler, on déduit que les puissances de cosinus et de sinus et leurs produits peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires d'exponentielles. Voici un exemple de formule générale :

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{\boldsymbol{i}x} + e^{-\boldsymbol{i}x}}{2}\right)^n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\boldsymbol{i}x}\right)^k\left(e^{-\boldsymbol{i}x}\right)^{n-k} = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\boldsymbol{i}(2k-n)x}.$$

Comme on sait d'avance que le résultat est réel, on peut remplacer chaque terme du membre droit par sa partie réelle :

$$\cos^n x = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname{Re}\left(e^{\boldsymbol{i}(2k-n)x}\right) = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2k-n)x.$$

Un exercice célèbre

SOUS-SECTION-BROUILLON

Il s'agit du calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos kx$ et de $\sum_{k=0}^{n}\sin kx$. Notons respectivement $C(x)$ et $S(x)$ ces deux expressions. Alors posons

$$W(x) = C(x) + \boldsymbol{i}S(x) = \sum_{k=0}^{n}(\cos kx + \boldsymbol{i}\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} w^k, \qquad \text{où} \quad w = \cos x + \boldsymbol{i}\sin x = e^{\boldsymbol{i}x}.$$

Si $w = 1$, c'est-à-dire si $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, la somme vaut $n+1$ et l'on en déduit $C(x) = n+1$ et $S(x) = 0$.

Sinon, on reconnaît la somme partielle d'une série géométrique :

$$W(x) = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{e^{\boldsymbol{i}(n+1)x} - 1}{e^{\boldsymbol{i}x} - 1}.$$

Grâce à la « formule utile » rappelée plus haut, on en déduit :

$$W(x) = \frac{e^{\boldsymbol{i}(n+1)x} - 1}{e^{\boldsymbol{i}x} - 1} = \frac{e^{\boldsymbol{i}(n+1)x/2}}{e^{\boldsymbol{i}x/2}}\frac{2\boldsymbol{i}\sin(n+1)x/2}{2\boldsymbol{i}\sin x/2} = e^{\boldsymbol{i}nx/2}\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2}.$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx = \frac{\cos nx/2\ \sin(n+1)x/2}{\sin x/2},$$
$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx = \frac{\sin nx/2\ \sin(n+1)x/2}{\sin x/2}.$$

12 Logarithme complexe

Théorème. *L'application* $\exp\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ *est une surjection de* $\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{C}^*$.

Démonstration. Soit $w \in \mathbf{C}^*$. Écrivons w sous la forme trigonométrique :

$$w = ru = r(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t), \qquad r > 0,\ u \in \mathbf{U},\ t \in \mathbf{R}.$$

(Rappelons nous que $r = |w|$ et $t \in \arg w$.) Posons $s = \ln r = \ln|w|$. Posons $z = s + \boldsymbol{i}t$. Alors

$$e^z = e^s(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) = ru = w.$$

□

Théorème. *Pour* $z \in \mathbf{C}$,

$$e^z = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad z \in 2\pi\boldsymbol{i}\mathbf{Z}.$$

Démonstration.

$$\cos t + \boldsymbol{i}\sin t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\cos t = 1\\ \sin t = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

□

Exercice. À quelle condition a-t-on $e^z = e^w$ avec $z, w \in \mathbf{C}$?

La *forme exponentielle* d'un complexe non nul z est l'écriture de z comme

$$z = \exp(w)$$

avec $w \in \mathbf{C}$. On appelle également la forme exponentielle l'écriture de z comme

$$z = re^{it}$$

avec $r = |z| > 0$ et $t \in \mathbf{R}$.

Définition. Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Tout complexe $w \in \mathbf{C}$ tel que $e^w = z$ s'appelle un *logarithme* de z.

D'après un calcul effectué plus haut, les logarithmes de z sont les complexes $\ln|z| + \boldsymbol{i}\theta$, où $\theta \in \arg z$. Si l'on prend $\theta = \operatorname{Arg} z$ (l'argument principal de z), on obtient le seul logarithme de z dont la partie imaginaire est dans $]-\pi, \pi]$: c'est la *détermination principale du logarithme*, parfois notée $\log z$. On a donc la formule :

$$\log z = \ln|z| + \boldsymbol{i} \operatorname{Arg} z.$$

Exercice. Calculer les logarithmes de $\pm 1 \pm \boldsymbol{i}$.

Exercice. Calculer (avec discussion) $\log z^{-1}$.

13 🚧 Similitudes directes du plan complexe

```
SECTION-BROUILLON
[...]
```


Bibliographie

Argand, Jean-Robert. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* 2e éd. Paris : Gauthier-Villars, 1874. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110283x`.

Cauchy, Augustin-Louis. *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* T. 4. Paris : Bachelier, 1847.

– "Mémoire sur les quantities géométriques". In : *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* T. 4. Paris : Bachelier, 1847, p. 157-180.

– "Sur la quantité géométrique $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$, et sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme $x + yi$". In : *Exercices d'analyse et de physique mathématique.* T. 4. Paris : Bachelier, 1847, p. 213-219.

Study, Eduard et Élie Cartan. *Nombres complexes.* In : *Arithmétique et algèbre.* T. 1.fascicule 3 : *Arithmétique.* Sous la dir. de Jules Molk. 4 t. Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées Tome I. Paris : Gauthier-Villars, 2 avr. 1908, p. 329-468. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2440f/f173.item`.

Wessel, Caspar. *Essai sur la représentation analytique de la direction.* Copenhague, 1897. URL : `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g`.