Équations différentielles ordinaires

Série pour L2 / bac + 2

Notes rédigées par Alexey Muranov

15 avril 2025

Table des matières

I. 🚧 Introduction et généralités

I.1. 🚧 Exemples

[. . .]

I.2. 🚧 Équations différentielles ordinaires

Équations différentielles, équations différentielles sous la forme résolue par rapport à la dérivée n-ième de l'inconnue.

On cherche solutions sur des intervalles.

Solutions maximales.

I.3. 🚧 Signification du terme « solution »

[. . .]

I.4. Notation classique (traditionnelle)

Une grande partie des notations utilisées en analyse sont apparues en XVII–XVIII siècles. À l'époque, les termes « variable » et « fonction » voulaient dire autre chose que ce qu'ils signifient maintenant en mathématique « moderne ». Malheureusement, l'ancien et le nouveau sens de ces termes sont souvent entremêlés ou confondus. Dans les domaines appliquées, comme dans la mécanique et dans la physique, on utilise couramment ces termes dans leurs sens original, qui n'est pas formalisé en mathématique moderne.

Pour donner une idée de ces deux sens différents, considérons la formule suivante qu'on peut rencontrer dans des textes sur l'analyse mathématique :

$$y = f(x).$$

En utilisant l'interprétation et la terminologie modernes, on dirait qu'ici f qui est une *fonction* (une *fonction* tout court, pas une fonction *de quelque chose*), et que x et y sont deux *objets mathématiques* (par exemple, deux nombres) tels que y est l'*image* de x par f, et que x est un *antécédent* de y par f. Les symboles « x », « y », « f » eux-mêmes sont dits *variables*. La valeur de la variable « f » ici est la fonction f, et les valeurs des variables « x » et « y » sont les objets mathématiques x et y, connus ou inconnus.

En utilisant l'interprétation et la terminologie des XVII–XVIII siècles, on dirait plutôt qu'ici x et y sont deux *quantités variables*, et que y est une *fonction* de x. Quant à « f », Lagrange l'appelait une *caractéristique*.[1] Il faut souligner que le fait que la quantité y soit une fonction de la quantité x n'empêche pas que x puisse au même temps être une fonction de y, ainsi que d'autres quantités variables.

Même si la signification des terms comme « fonction », « variable », « fonction dérivée » est changée, une notation classique (« à l'ancienne ») peut toujours être utilisée pour simplifier l'écriture d'équations et de formules. Par exemple, considérons l'équation différentielle

$$f'(x) = xf(x) - 2x + 3, \tag{E_f}$$

où f est l'inconnue. Introduisons deux nouvelles variables « y » et « y' », et posons

$$y = f(x), \qquad y' = f'(x). \tag{Y}$$

Alors, compte tenu des relations (Y), l'équation (E_f) est équivalente à l'équation

$$y' = xy - 2x + 3. \tag{E_y}$$

Si on souhaite imposer une condition initiale pour (E_f), par exemple :

$$f(0) = 1,$$

on peut l'écrire à « à l'ancienne » ainsi :

$$y = 1 \quad \text{si} \quad x = 0,$$

ou, encore :

$$y|_{x=0} = 1.$$

Ainsi, résoudre l'équation

$$y' = xy - 2x + 3 \tag{E_y}$$

sur $\mathbf{R}$ avec la condition $y|_{x=0} = 1$ signifie de trouver la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que l'équation (E_y) soit satisfaite pour toutes valeurs x, y, y' qui satisfont les égalités (Y), et qu'en plus $f(0) = 1$.

I.5. 🚧 Signification du terme « intégrale »

[...]

D'après Cauchy[2] :

[1] Le symbole « d » qui apparaît dans la notation de Leibniz pour les différentielles totales et pour les dérivées totales, ainsi que le symbole « ∂ » qui apparaît dans la notation de Legendre et de Jacobi pour les dérivées partielles, étaient aussi dits *caractéristiques*.

[2] Augustin-Louis Cauchy. "Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique. Suite du calcul infinitésimal". In : *Équations différentielles ordinaires. Cours inédit. Fragment.* Avec une introd. de Christian Gilain. Avec une préf. de Jean Dieudonné. Paris et New York : Études Vivantes et Johnson Reprint Corporation, 1981, p. 1-146. URL : `https://archive.org/details/EquationsDifferentiellesOrdinaires`, pp. 1–2.

> *Intégrer* des équations différentielles, c'est trouver les fonctions qu'elles déterminent, ou du moins des équations nouvelles qui ne renferment que la variable et les fonctions dont il s'agit. Ces équations nouvelles se nomment *intégrales* ou *équations primitives*. L'intégrale d'une équation différentielle entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, ne peut contenir que les deux quantités variables x et y.

[. . .]

I.6. Passage d'une équation d'ordre quelconque à un système d'ordre 1

[. . .]

I.7. Équations autonomes

[. . .]

II. 🚧 Équations du premier ordre

II.1. Intégration immédiate

Considérons une équation de la forme

$$p(t, f(t)) + q(t, f(t))f'(t) = 0, \tag{E}$$

où f est l'inconnue, et p et q sont connues. Supposons que H est une fonction totalement dérivable $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que $D_1 H = p$ et $D_2 H = q$, ou, écrit « à l'ancienne »,

$$\frac{\partial\, H(t, y)}{\partial t} = p(t, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\, H(t, y)}{\partial y} = q(t, y).$$

Alors, l'identité suivante est satisfaite pour toute fonction f :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t, f(t)) &= \left.\frac{\partial\, H(t, y)}{\partial t}\right|_{y=f(t)} \frac{dt}{dt} + \left.\frac{\partial\, H(t, y)}{\partial y}\right|_{y=f(t)} \frac{d\, f(t)}{dt} \\ &= p(t, f(t)) + q(t, f(t))f'(t). \end{aligned}$$

D'où, l'équation (E) équivaut à l'équation

$$\frac{d}{dt} H(t, f(t)) = 0,$$

laquelle équivaut à la condition que $H(t, f(t))$ soit constante. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est obtenu en trouvant les solutions des équations

$$\frac{d}{dt} H(t, f(t)) = C$$

pour toutes valeurs de la constante C.

Théorème. *Soit U une partie ouverte et convexe de l'espace affine $\mathbf{R}^2$, et soient $p, q \colon U \to \mathbf{R}$ deux fonctions de classe de régularité C^1 (continûment dérivables) dans U. Supposons que l'identité*

$$\frac{\partial\, p(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial\, q(t, y)}{\partial t}$$

est satisfaite pour $(t, y) \in U$. Soit $X_0 = (t_0, y_0)$ un point dans U. Définissons une fonction $H \colon U \to \mathbf{R}$ ainsi : pour tout point $X = (t, y)$ dans U, posons

$$H(t, y) = \int_{(s,z)=X_0}^{X} \big(p(s, z)ds + q(s, z)dz\big),$$

où le symbole « $\int_{(s,z)=X_0}^{X}$ » désigne l'intégrale curviligne du seconde type le long du segment $[X_0X]$ dans le sens de X_0 vers X.[1] *Alors les identités*

$$\frac{\partial H(t,y)}{\partial t} = p(t,y) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial H(t,y)}{\partial y} = q(t,y)$$

sont satisfaites pour $(t,y) \in U$. (Avec une notation « moderne » : $D_1H = p$ et $D_2H = q$.)

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que $(t_0, y_0) = (0,0)$ (cela va simplifier les formules).

Pour tout $(t,y) \in U$, posons

$$P(t,y) = \int_{(s,z)=(0,0)}^{(t,y)} p(s,z)ds \qquad \text{et} \qquad Q(t,y) = \int_{(s,z)=(0,0)}^{(t,y)} q(s,z)dz,$$

où l'intégration est la même que dans l'énoncé. Alors

$$H(t,y) = P(t,y) + Q(t,y) \qquad \text{pour tout } (t,y) \in U.$$

Pour $X_0 = (0,0)$ et $X = (t,y)$, le segment $[X_0X]$ admet la paramétrisation

$$s = rt, \qquad z = ry, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

où (s,z) est un point arbitraire de $[X_0X]$ et r est un paramètre. Ainsi,

$$P(t,y) = \int_{(s,z)=(0,0)}^{(t,y)} p(s,z)ds = \int_{r=0}^{1} p(rt,\, ry)d(rt) = t\int_{r=0}^{1} p(rt,\, ry)dr.$$

Par un calcul analogique,

$$Q(t,y) = y\int_{r=0}^{1} q(rt,\, ry)dr.$$

Pour montrer les identités souhaitées, on va utiliser une dérivation « sous le signe de l'intégrale ».

D'abord, en regardant r comme un paramètre et t et y comme deux variables indépendantes, et s et z comme deux autres variables indépendantes (mais dépendantes de t et y), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(rt,\, ry)}{\partial t} &= \left.\frac{\partial p(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} \frac{\partial\, rt}{\partial t} + \left.\frac{\partial p(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} \frac{\partial\, ry}{\partial t}\\ &= \left.\frac{\partial p(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} r.\end{aligned}$$

[1] En fait, on peut remplacer le segment $[X_0X]$ dans cette intégrale par une n'importe quelle courbe géométrique Γ qui relie X_0 à X dans U, à la condition que Γ admet une paramétrisation de classe C^1 par morceaux : la valeur de l'intégrale de X_0 à X le long d'une telle courbe Γ ne dépend pas du choix de Γ sous les conditions données. Ce fait n'est pas démontré ici.

De la même manière,

$$\frac{\partial\, p(rt,\, ry)}{\partial y} = \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} r,$$

$$\frac{\partial\, q(rt,\, ry)}{\partial t} = \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} r,$$

$$\frac{\partial\, q(rt,\, ry)}{\partial y} = \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} r.$$

Par dérivation sous le signe de l'intégrale, on obtient :

$$\frac{\partial\, P(t,y)}{\partial t} = \int_{r=0}^{1} p(rt,\, ry)dr + t\int_{r=0}^{1} \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} rdr,$$

$$\frac{\partial\, P(t,y)}{\partial y} = t\int_{r=0}^{1} \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} rdr.$$

De la même manière,

$$\frac{\partial\, Q(t,y)}{\partial t} = y\int_{r=0}^{1} \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} rdr,$$

$$\frac{\partial\, Q(t,y)}{\partial y} = \int_{r=0}^{1} q(rt,\, ry)dr + y\int_{r=0}^{1} \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} rdr.$$

Observons que

$$\begin{aligned}\frac{d\, p(rt,\, ry)}{dr} &= \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} \frac{d\, rt}{dr} + \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} \frac{d\, ry}{dr}\\ &= \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} t + \left.\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} y,\end{aligned}$$

et, par un calcul analogique,

$$\frac{d\, q(rt,\, ry)}{dr} = \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial s}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} t + \left.\frac{\partial\, q(s,z)}{\partial z}\right|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} y.$$

Il ne reste qu'à utiliser l'identité $\dfrac{\partial\, p(s,z)}{\partial z} = \dfrac{\partial\, q(s,z)}{\partial s}$ et une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, H(t,y)}{\partial t} &= \frac{\partial\, P(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial\, Q(t,y)}{\partial t} \\
&= \int_{r=0}^{1} \left(p(rt,\, ry) + \left(\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial s}\bigg|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} t + \frac{\partial\, q(s,z)}{\partial s}\bigg|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} y \right) r \right) dr \\
&= \int_{r=0}^{1} \left(p(rt,\, ry) + \left(\frac{\partial\, p(s,z)}{\partial s}\bigg|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} t + \frac{\partial\, p(s,z)}{\partial z}\bigg|_{\substack{s=rt\\ z=ry}} y \right) r \right) dr \\
&= \int_{r=0}^{1} \left(p(rt,\, ry) + \frac{d\, p(rt,\, ry)}{dr} r \right) dr \\
&= \int_{r=0}^{1} \left(p(rt,\, ry) dr + r \frac{d\, p(rt,\, ry)}{dr} dr \right) \\
&= \int_{r=0}^{1} \big(dr\, p(rt,\, ry) + r d\big(p(rt,\, ry)\big) \big) \\
&= \int_{r=0}^{1} d\big(rp(rt,\, ry)\big) = [rp(rt,\, ry)]_{r=0}^{1} = p(t,y).
\end{aligned}$$

Par un calcul analogique,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\, H(t,y)}{\partial y} &= \frac{\partial\, P(t,y)}{\partial y} + \frac{\partial\, Q(t,y)}{\partial y} \\
&= \int_{r=0}^{1} d\big(rq(rt,\, ry)\big) = [rq(rt,\, ry)]_{r=0}^{1} = q(t,y).
\end{aligned}$$

□

II.2. Séparation des variables

Considérons une équation de la forme

$$p(f(t))f'(t) = q(t), \tag{E}$$

où f est l'inconnue, et p et q sont connues. Soient P et Q deux fonctions primitives de p et q : $P' = p$ et $Q' = q$. Alors, l'équation (E) équivaut à l'équation

$$\frac{d}{dt}(P(f(t)) - Q(t)) = 0,$$

laquelle équivaut à la condition que $P(f(t)) - Q(t)$ soit constante.

L'équation (E) peut être écrite « à l'ancienne » comme

$$p(y)\frac{dy}{dt} = q(t).$$

Il est possible de considerer les symboles « t », « y », « dt » et « dy » dans cette équation comme quatre variables,[2] dans quel cas cette équation équivaut à la suivante, pour $dt \neq 0$:

$$p(y)dy = q(t)dt.$$

Cette écriture explique pourquoi cette méthode est connue sous le nom de la *séparation des variables*. En plus, en utilisant les notions de la *différentielle* d'une variable et de la *différentielle* d'une expression (à ne pas confondre avec la dérivée d'une fonction, aussi connue comme sa *différentielle*), on peut réécrire l'équation précédente comme

$$d(P(y)) = d(Q(t)),$$

ce qui équivaut à

$$d(P(y) - Q(t)) = 0,$$

ce qui équivaut à la condition que $P(y) - Q(t)$ soit constante.

II.2.1. Application aux équations autonomes

Considérons une équation de la forme

$$p(f(t))f'(t) = q(f(t)), \tag{E_1}$$

où f est l'inconnue, et p et q sont connues. Sous la condition supplémentaire que $q(f(t))$ ne s'annule pas, l'équation (E) équivaut à

$$\frac{p(f(t))}{q(f(t))}f'(t) = 1. \tag{E_2}$$

Si H est une fonction primitive de p/q, c'est-à-dire, si

$$H'(y) = \frac{p(y)}{q(y)},$$

alors l'équation (E_2) équivaut à

$$\frac{d}{dt}H(f(t)) = 1,$$

ce qui équivaut à la condition que $H(f(t)) - t$ soit constante.

---

[2] Soit ϕ une solution de cette équation, s'est-à-dire, soit ϕ une fonction définie sur un intervalle I telle que $p(\phi(t))\phi'(t) = q(t)$ pour tout $t \in I$. Dans un plan muni d'un système de coordonnées cartésiennes, considérons la courbe Γ donnée en coordonnées t, y par l'équation $y = \phi(t)$. Soit A un point sur cette courbe de coordonnées t_A, y_A ($y_A = \phi(t_A)$). Soit $\boldsymbol{u}$ un vecteur *tangent* à Γ au point A. Notons $dt_{\boldsymbol{u}}$, $dy_{\boldsymbol{u}}$ les coordonnées de $\boldsymbol{u}$. Alors $p(y_A)\dfrac{dy_{\boldsymbol{u}}}{dt_{\boldsymbol{u}}} = q(t_A)$. Cela donne l'idée de l'équation $p(y)\dfrac{dy}{dt} = q(t)$, où « t », « y », « dt » et « dy » sont considérées comme quatre variables.

II.3. 🚧 Équations linéaires d'ordre 1

[...]

II.3.1. Résolution d'une équation homogène d'ordre 1

Considérons une équation de la forme

$$f'(t) = a(t)f(t), \tag{E}$$

où f est l'inconnue et a est connue. On peut utiliser le changement de variable

$$f(t) = e^{A(t)}g(t),$$

où A est une primitive de a sur l'intervalle en question et g est une nouvelle inconnue.

Après ce changement de variable suivi d'une simplification, on obtient l'équation suivante pour g :

$$g'(t) = 0,$$

d'où la solution générale pour g est

$$g(t) = C,$$

où C est une constante arbitraire, et ainsi la solution générale pour f est

$$f(t) = Ce^{A(t)},$$

avec C une constante arbitraire.

II.3.2. Méthode de variation de la constante

Considérons une équation de la forme

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t). \tag{E}$$

où f est l'inconnue, et a et b sont connues. On peut encore utiliser le changement de variable

$$f(t) = e^{A(t)}g(t),$$

où A est une primitive de a sur l'intervalle en question et g est une nouvelle inconnue.

Après ce changement de variable suivi d'une simplification, on obtient l'équation suivante pour g :

$$g'(t) = b(t)e^{-A(t)}.$$

D'où, la solution générale pour g est l'ensemble des primitives de la partie droite de cette équation, et ainsi on peut déduire la solution générale pour f.

II.4. Équations de Bernoulli

Une équation linéaire de la forme

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t)(f(t))^n, \tag{E}$$

où f est l'inconnue, et a et b sont connues, est dite une *équation de Bernoulli*.

Si $n = 0$, c'est une équation linéaire d'ordre 1.

Si $n = 1$, c'est une équation linéaire homogène équivalente à celle-ci :

$$f'(t) = (a(t) + b(t))f(t).$$

Si $n > 0$, la fonction nulle est une solution de l'équation (E).

Si $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 1$, alors pour trouver les solutions de (E) qui ne s'annulent pas, on peut passer à l'équation

$$(1-n)(f(t))^{-n}f'(t) = (1-n)a(t)(f(t))^{1-n} + (1-n)b(t),$$

effectuer le changement de variable

$$g(t) = (f(t))^{1-n},$$

et essayer de résoudre l'équation linéaire pour g ainsi obtenue :

$$g'(t) = (1-n)a(t)g(t) + (1-n)b(t).$$

III. Équations linéaires

III.1. Opérateurs différentiels linéaires

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $a_0, \dots, a_n \colon I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues ($a_0, \dots, a_n \in C(I, \mathbf{R})$). Définissons une application $L \colon C^n(I, \mathbf{R}) \to C(I, \mathbf{R})$ par la formule :

$$L(f) = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)}.$$

Alors l'application L est linéaire. Une telle application est dite un *opérateur différentiel linéaire d'ordre n*.

On définit de manière analogique les opérateurs différentiels $C^n(I, \mathbf{C}) \to C(I, \mathbf{C})$ et $C^n(I, \mathbf{R}^m) \to C(I, \mathbf{R}^m)$ d'ordre n.

III.2. Équations différentielles linéaires

Une *équation différentielle linéaire* sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ est une équation de la forme

$$a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \dots + a_n(t)f^{(n)}(t) = b(t), \tag{E}$$

où $a_0, \dots, a_n, b \colon I \to \mathbf{R}$ ou $a_0, \dots, a_n, b \colon I \to \mathbf{C}$ sont des fonctions continues ($a_0, \dots, a_n, b \in C(I, \mathbf{R})$ ou $a_0, \dots, a_n, b \in C(I, \mathbf{C})$), et f est l'inconnue.

Si le second membre de l'équation (E) (la partie droite « $b(t)$ ») est nul, l'équation est dite *homogène*.

L'équation homogène

$$a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \dots + a_n(t)f^{(n)}(t) = 0 \tag{H}$$

est dite *associée* à l'équation (E).

Si on définit l'opérateur différentiel L par la formule

$$L(f) = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)},$$

alors l'équation (E) s'écrit comme

$$L(f) = b. \tag{E}$$

III.3. Principe de la superposition

Soit L un opérateur différentiel linéaire d'ordre n sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, et soient b et c deux fonctions continues sur I et à valeurs réelles ou complexes.

(1) Si ϕ est une solution de l'équation $L(f) = b$ et ψ est une solution de l'équation $L(f) = c$, alors $\phi + \psi$ est une solution de l'équation $L(f) = b + c$.

(2) Si ϕ est une solution de l'équation $L(f) = b$ et α est un nombre réel ou complexe, alors $\alpha\phi$ est une solution de l'équation $L(f) = \alpha b$.

(3) La fonction nulle est une solution de l'équation homogène $L(f) = 0$.

III.4. Espaces des solutions

Espace vectoriel des solutions d'une équation linéaire homogène. Espace affine des solutions d'une équation linéaire quelconque.

III.5. Le cas des coefficients à valeurs réelles

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $a_0, \ldots, a_n \colon I \to \mathbf{R}$ des fonctions continues ($a_0, \ldots, a_n \in C(I, \mathbf{R})$). Définissons l'opérateur différentiel linéaire $L \colon C^n(I, \mathbf{C}) \to C(I, \mathbf{C})$ par la formule :

$$L(f) = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_n f^{(n)}.$$

Soit $b \colon I \to \mathbf{C}$, et considérons les équations :

$$L(f) = b, \tag{E}$$

$$L(f) = \operatorname{Re} b, \tag{E_{Re}}$$

$$L(f) = \operatorname{Im} b. \tag{E_{Im}}$$

Proposition. *Une fonction $\phi \colon J \to \mathbf{C}$, définie sur un intervalle $J \subset I$, est une solution de l'équation (E) si et seulement si $\operatorname{Re}\phi$ est une solution de l'équation (E_{Re}) et $\operatorname{Im}\phi$ est une solution de l'équation (E_{Im}).*

III.6. Unicité de solution d'une équation munie de conditions initiales

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n sous la forme résolue par rapport à $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + b(t), \tag{E}$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}, b\colon I \to \mathbf{C}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. On va démontrer un théorème, dit un *théorème d'unicité*, selon lequel l'équation (E) ne peut pas avoir plus d'une unique solution satisfaisante les conditions initiales

$$f(t_0) = y_0, \quad f'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

où $t_0 \in I$ et $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbf{R}$.

Lemme. *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $t_0 \in I$, et $a_0, \ldots, a_{n-1}\colon I \to \mathbf{C}$ des fonctions continues. Soit $f\colon I \to \mathbf{C}$ une fonction n fois dérivable dans I telle que*

$$f(t_0) = 0, \quad f'(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

et que

$$f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) \qquad \textit{pour tout } t \in I.$$

Alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. Observons tout d'abord que la fonction $f^{(n)}$ est continue, car elle s'écrit comme la somme des produits de fonctions continues.

Considérons un intervalle $[t_0, T] \subset I$, un nombre réel strictement positif α ($\alpha > 0$), et posons

$$M = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \frac{\left|f^{(n)}(t)\right|}{e^{\alpha t}}.$$

Alors, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant Me^{\alpha t}.$$

Montrons qu'en plus, pour tout $t \in [t_0, T]$,

$$\left|f^{(n-1)}(t)\right| \leqslant \frac{Me^{\alpha t}}{\alpha}, \quad \left|f^{(n-2)}(t)\right| \leqslant \frac{Me^{\alpha t}}{\alpha^2}, \quad \ldots, \quad |f(t)| \leqslant \frac{Me^{\alpha t}}{\alpha^n}.$$

En effet, si $t \in [t_0, T]$, alors

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(t_0) = \int_{s=t_0}^{t} f^{(n)}(s)ds,$$

et donc

$$\left|f^{(n-1)}(t)\right| \leqslant \int_{s=t_0}^{t} \left|f^{(n)}(s)\right| ds \leqslant \int_{s=t_0}^{t} Me^{\alpha s} ds = \left[\frac{Me^{\alpha s}}{\alpha}\right]_{s=t_0}^{t} \leqslant \frac{Me^{\alpha t}}{\alpha}.$$

Maintenant, de la même manière, on peut établir l'inégalité $\left|f^{(n-2)}(t)\right| \leqslant Me^{\alpha t}/\alpha^2$, et puis les autres, jusqu'à $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}/\alpha^n$.

Posons

$$A_k = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |a_k(t)| \qquad \text{pour } k \text{ de } 0 \text{ à } n-1$$

et

$$\lambda = \frac{A_0}{\alpha^n} + \frac{A_1}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{\alpha}.$$

Pout tout $t \in [t_0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(t)\right| &= \left|a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)\right| \\
&\leqslant |a_0(t)f(t)| + |a_1(t)f'(t)| + \cdots + \left|a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)\right| \\
&\leqslant \frac{A_0 M e^{\alpha t}}{\alpha^n} + \frac{A_1 M e^{\alpha t}}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1} M e^{\alpha t}}{\alpha} \\
&= \left(\frac{A_0}{\alpha^n} + \frac{A_1}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{\alpha}\right) M e^{\alpha t} \\
&= \lambda M e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

D'où, d'après la définition de M,

$$M \leqslant \lambda M.$$

Si $\lambda < 1$, alors $M = 0$ (car $0 \leqslant M \leqslant \lambda M$). Donc, si $\lambda < 1$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0, T]$.

Or, quel que soit $T \in I$ tel que $t_0 < T$, il suffit que α soit suffisamment grand pour assurer que $\lambda < 1$. D'où, $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$ tel que $t_0 \leqslant t$.

Considérons maintenant un intervalle $[T, t_0] \subset I$, un nombre réel strictement positif α ($\alpha > 0$), et posons

$$M = \max_{T \leqslant t \leqslant t_0} \frac{\left|f^{(n)}(t)\right|}{e^{-\alpha t}}.$$

Alors, pour tout $t \in [T, t_0]$,

$$\left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant M e^{-\alpha t}.$$

Montrons qu'en plus, pour tout $t \in [T, t_0]$,

$$\left|f^{(n-1)}(t)\right| \leqslant \frac{M e^{-\alpha t}}{\alpha}, \quad \left|f^{(n-2)}(t)\right| \leqslant \frac{M e^{-\alpha t}}{\alpha^2}, \quad \ldots, \quad |f(t)| \leqslant \frac{M e^{-\alpha t}}{\alpha^n}.$$

En effet, si $t \in [T, t_0]$, alors

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(t_0) = \int_{s=t_0}^{t} f^{(n)}(s) ds,$$

et donc

$$\left|f^{(n-1)}(t)\right| \leqslant \int_{s=t}^{t_0} \left|f^{(n)}(s)\right| ds \leqslant \int_{s=t}^{t_0} Me^{-\alpha s} ds = \left[\frac{Me^{-\alpha s}}{-\alpha}\right]_{s=t}^{t_0} \leqslant \frac{Me^{-\alpha t}}{\alpha}.$$

Maintenant, de la même manière, on peut établir l'inégalité $\left|f^{(n-2)}(t)\right| \leqslant Me^{-\alpha t}/\alpha^2$, et puis les autres, jusqu'à $|f(t)| \leqslant Me^{-\alpha t}/\alpha^n$.

Posons

$$A_k = \max_{T \leqslant t \leqslant t_0} |a_k(t)| \qquad \text{pour } k \text{ de } 0 \text{ à } n-1$$

et

$$\lambda = \frac{A_0}{\alpha^n} + \frac{A_1}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{\alpha}.$$

Pout tout $t \in [T, t_0]$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(t)\right| &= \left|a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)\right| \\
&\leqslant |a_0(t)f(t)| + |a_1(t)f'(t)| + \cdots + \left|a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t)\right| \\
&\leqslant \frac{A_0 Me^{-\alpha t}}{\alpha^n} + \frac{A_1 Me^{-\alpha t}}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1} Me^{-\alpha t}}{\alpha} \\
&= \left(\frac{A_0}{\alpha^n} + \frac{A_1}{\alpha^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{\alpha}\right) Me^{-\alpha t} \\
&= \lambda Me^{-\alpha t}.
\end{aligned}$$

D'où, d'après la définition de M,

$$M \leqslant \lambda M.$$

Si $\lambda < 1$, alors $M = 0$ (car $0 \leqslant M \leqslant \lambda M$). Donc, si $\lambda < 1$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [T, t_0]$.

Or, quel que soit $T \in I$ tel que $T < t_0$, il suffit que α soit suffisamment grand pour assurer que $\lambda < 1$. D'où, $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$ tel que $t \leqslant t_0$.

On a montré que $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$. □

Théorème. *Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n sous la forme résolue par rapport la dérivée n-ième de l'inconnue f :*

$$f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + b(t), \tag{E}$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \colon I \to \mathbf{C}$ sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Soient $\phi, \psi \colon J \to \mathbf{C}$ deux solutions particulières de l'équation (E) sur un intervalle ouvert $J \subset I$. Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ tel que

$$\phi(t_0) = \psi(t_0), \qquad \phi'(t_0) = \psi'(t_0), \qquad \ldots, \qquad \phi^{(n-1)}(t_0) = \psi^{(n-1)}(t_0).$$

Alors $\phi = \psi$.

Démonstration. Considérons l'équation homogène associée à (E) :

$$f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t). \tag{H}$$

La fonction $\phi - \psi$ est une solution particulière de (H) sur J, et

$$(\phi - \psi)(t_0) = 0, \qquad (\phi - \psi)'(t_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad (\phi - \psi)^{(n-1)}(t_0) = 0$$

pour un certain $t_0 \in J$. Donc, d'après le dernier lemme, $\phi - \psi$ est la fonction nulle. D'où, $\phi = \psi$. □

III.7. Réduction de l'ordre par factorisation de l'opérateur

Si K et L sont deux opérateurs différentielles linéaire, alors pour résoudre l'équation

$$(LK)(f) = b,$$

on peut faire le changement de variable $g = K(f)$ et essayer de d'abord résoudre

$$L(g) = b.$$

Exemple. Considérons l'équation

$$f'''(t) + t^2 f''(t) - tf'(t) - (1 + t^3)f(t) = t^2.$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} + t^2\frac{d^2}{dt^2} - t\frac{d}{dt} - (1 + t^3)\right)f(t) = t^2,$$

mais aussi sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dt} + t^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} - t\right)f(t) = t^2.$$

Donc, si on effectue le changement de variable

$$g(t) = f''(t) - tf(t),$$

on obtient l'équation suivante pour g :

$$g'(t) + t^2 g(t) = t^2.$$

III.8. Réduction de l'ordre par « variation de la constante »

Soit L un opérateur différentiel linéaire d'ordre n sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$. Considérons l'équation linéaire

$$L(f) = b. \tag{E}$$

Supposons que ϕ est une solution non nulle de l'équation homogène associée

$$L(f) = 0. \tag{H}$$

Alors si on effectue la substitution $f(t) = \phi(t)g(t)$ dans (E), où g est la nouvelle inconnue, suivie de la substitution $g' = g_1$, on trouvera une équation linéaire de la forme

$$K(g_1) = b,$$

où K est un opérateur différentiel linéaire d'ordre $n - 1$ sur I.

Exemple. Considérons l'équation

$$(\sin t)f(t) + (\sin t + 3)f''(t) = t. \tag{E}$$

La fonction $\phi(t) = \sin t + 3$ est une solution particulière de l'équation homogène associée. On peut appliquer la « variation de la constante » pour tenter de résoudre (E).

IV. Équations linéaires à coefficients constants

IV.1. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Une équations différentielle linéaire est dite *à coefficients constants* si elle est de la forme

$$a_0 f(t) + a_1 f'(t) + \cdots + a_n f^{(n)}(t) = b(t), \tag{E}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ et $b\colon I \to \mathbf{R}$, ou $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ et $b\colon I \to \mathbf{C}$, avec I un intervalle de $\mathbf{R}$.

Considérons l'équation (E). Posons

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

Soit D l'opérateur différentiel définie ainsi :

$$D(f) = f'.$$

Alors l'équation (E) peut être écrit ainsi :

$$P(D)(f) = b.$$

Ou avec la notation de Leibniz :

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = b(t).$$

Définition. Le polynôme P est dit le *polynôme caractéristique* de l'équation (E).

Supposons que le polynôme caractéristique de (E) est factorisé ainsi :

$$P = P_1 P_2.$$

Alors, pour résoudre l'équation (E), on peut tenter le changement de variable

$$g(t) = P_2\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t).$$

On obtient ainsi l'équation

$$P_1\Big(\frac{d}{dt}\Big) g(t) = b(t).$$

IV.2. Formules utiles

Lemme. *Si P est un polynôme à coefficients complexes ($P \in \mathbf{C}[X]$) et ζ est un nombre complexe ($\zeta \in \mathbf{C}$), alors*

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{\zeta t} = P(\zeta)e^{\zeta t}.$$

Corollaire. *Soit P un polynôme à coefficients complexes ($P \in \mathbf{C}[X]$). Alors $\zeta \in \mathbf{C}$ est une racine de P si et seulement si*

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{\zeta t} = 0.$$

Lemme. *Si m est un nombre naturel ($m \in \mathbf{N}$), ζ est un nombre complexe ($\zeta \in \mathbf{C}$), I est un intervalle de $\mathbf{R}$, et f est une fonction $I \to \mathbf{C}$ qui est m fois continûment dérivable ($f \in C^m(I, \mathbf{C})$), alors*

$$\Big(\frac{d}{dt} - \zeta\Big)^m e^{\zeta t} f(t) = e^{\zeta t} f^{(m)}(t).$$

Corollaire. *Si P est un polynôme à coefficients complexes ($P \in \mathbf{C}[X]$) et $\zeta \in \mathbf{C}$ est une racine de P de multiplicité m, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $k < m$, on a :*

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)t^k e^{\zeta t} = 0.$$

Exemple. (1) Soit $P = X^3 - 2X^2 + X = (X - 0)(X - 1)^2$. Alors

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{0t} = P\Big(\frac{d}{dt}\Big)1 = 0,$$
$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{t} = 0, \qquad P\Big(\frac{d}{dt}\Big)te^{t} = 0.$$

(2) Soit $P = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 = (X + 2)^3$. Alors

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{-2t} = 0, \qquad P\Big(\frac{d}{dt}\Big)te^{-2t} = 0, \qquad P\Big(\frac{d}{dt}\Big)t^2e^{-2t} = 0.$$

Les deux lemmes précédents sont des cas particuliers du théorème suivant.

Théorème (Théorème de décalage exponentiel)**.** *Si P est un polynôme à coefficients complexes ($P \in \mathbf{C}[X]$), ζ est un nombre complexe ($\zeta \in \mathbf{C}$), I est un intervalle de $\mathbf{R}$, et f est une fonction $I \to \mathbf{C}$ qui est n fois continûment dérivable ($f \in C^n(I, \mathbf{C})$), où $n = \deg P$, alors*

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)e^{\zeta t} f(t) = e^{\zeta t} P\Big(\frac{d}{dt} + \zeta\Big) f(t).$$

IV.3. Le cas des coefficients réels

Soient $P \in \mathbf{R}[X]$, I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $b\colon I \to \mathbf{C}$. Considérons les équations :

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = b(t), \tag{E}$$

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = \operatorname{Re} b(t), \tag{E_{Re}}$$

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = \operatorname{Im} b(t). \tag{E_{Im}}$$

Proposition. *Une fonction ϕ à valeurs complexes est une solution de l'équation (E) si et seulement si $\operatorname{Re}\phi$ est une solution de l'équation (E_{Re}) et $\operatorname{Im}\phi$ est une solution de l'équation (E_{Im}).*

IV.4. Équations homogènes

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, et considérons l'équation homogène

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = 0. \tag{H}$$

Proposition. *Si $\zeta \in \mathbf{C}$ est une racine de P de multiplicité m, et k est un nombre naturel $(k \in \mathbf{N})$ tel que $k < m$, alors la fonction ϕ donnée par*

$$\phi(t) = t^k e^{\zeta t}$$

satisfait l'équation (H).

Théorème. *Toute solution complexe de (H) est une combinaison linéaire à coefficients complexes des solutions décrites par la proposition précédente.*

Corollaire. *Si tous les coefficients de P sont réels $(P \in \mathbf{R}[X])$ et que toutes les racines complexes de P sont réelles, alors toute solution réelle de (H) est une combinaison linéaire à coefficients réels des solutions décrites par la proposition précédente.*

Proposition. *Si tous les coefficients de P sont réels $(P \in \mathbf{R}[X])$, $\alpha + \beta\boldsymbol{i} \in \mathbf{C}$ est une racine de P de multiplicité m, où α et β sont deux nombres réels $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$, et k est un nombre naturel $(k \in \mathbf{N})$ tel que $k < m$, alors les fonctions ϕ et ψ données par*

$$\phi(t) = t^k e^{\alpha t} \cos \beta t, \qquad \psi(t) = t^k e^{\alpha t} \sin \beta t$$

satisfont l'équation (H).

Théorème. *Si tous les coefficients de P sont réels $(P \in \mathbf{R}[X])$, alors toute solution réelle de (H) est une combinaison linéaire à coefficients réels des solutions décrites par la proposition précédente.*

IV.5. Seconds membres de certaines formes particulières

Proposition. *Soient $m, k \in \mathbf{N}$ et $\zeta \in \mathbf{C}$. Considérons l'équation différentielle*

$$\left(\frac{d}{dt} - \zeta\right)^m f(t) = t^k e^{\zeta t}.$$

Cette équation est satisfaite par la fonction $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ donnée ainsi :

$$\phi(t) = \frac{m!\, t^{m+k} e^{\zeta t}}{(m+k)!}.$$

Proposition. *Soient $P \in \mathbf{C}[X]$, $\zeta \in \mathbf{C}$ et $k \in \mathbf{N}$. Considérons l'équation différentielle*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = t^k e^{\zeta t}. \tag{E}$$

Soit m la multiplicité de ζ comme racine de P. Alors l'équation (E) admet une unique solution $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de la forme

$$\phi(t) = t^m C(t) e^{\zeta t} \tag{S}$$

avec $C \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\deg C = k$. Par contre, si $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est de la forme (S) avec $C \in \mathbf{C}[X]$ et $\deg C < k$, alors ϕ ne satisfait pas (E).

En plus, si $P \in \mathbf{R}[X]$ et que $\zeta \in \mathbf{R}$, alors l'équation (E) admet une solution $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la forme (S) avec $C \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\deg C = k$.

Corollaire. *Soient $P \in \mathbf{R}[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$. Considérons les équations différentielles*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = t^k e^{\alpha t} \cos \beta t \tag{E_1}$$

et

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = t^k e^{\alpha t} \sin \beta t. \tag{E_2}$$

Soit m la multiplicité de $\alpha + \beta \boldsymbol{i}$ comme racine de P. Alors chacune des équations (E_1) et (E_2) admet une unique solution $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de la forme

$$\phi(t) = t^m e^{\alpha t}(A(t) \cos \beta t + B(t) \sin \beta t) \tag{S}$$

avec $A, B \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\max(\deg A, \deg B) = k$. Par contre, si $\phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est de la forme (S) avec $A, B \in \mathbf{C}[X]$, $\deg A < k$ et $\deg B < k$, alors ϕ ne satisfait ni (E_1), ni (E_2).

Démonstration. Considérons l'équation

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = t^k e^{(\alpha + \beta \boldsymbol{i})t}. \tag{E}$$

On a :

$$t^k e^{(\alpha+\beta \boldsymbol{i})t} = t^k e^{\alpha t}(\cos\beta t + \boldsymbol{i}\sin\beta t) = t^k e^{\alpha t}\cos\beta t + \boldsymbol{i} t^k e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Ainsi, si ϕ est une solution particulière de (E), alors $\operatorname{Re}\phi$ est une solution particulière de (E_1) et $\operatorname{Im}\phi$ est une solution particulière de (E_2).

Soit $C \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\deg C \leqslant k$ et que la fonction ϕ définie par

$$\phi(t) = t^m C(t)\exp((\alpha+\beta\boldsymbol{i})t)$$

soit une solution de (E). (D'après la dernière proposition, un tel C existe et est unique.)

Posons $A = \operatorname{Re} C$, $B = \operatorname{Im} C$. Alors

$$C = A + \boldsymbol{i}B, \qquad A, B \in \mathbf{R}[X],$$

et donc

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= t^m(A(t) + \boldsymbol{i}B(t))e^{\alpha t}(\cos\beta t + \boldsymbol{i}\sin\beta t)\\
&= t^m e^{\alpha t}(A(t)\cos\beta t - B(t)\sin\beta t) + \boldsymbol{i}t^m e^{\alpha t}(B(t)\cos\beta t + A(t)\sin\beta t),\\
\operatorname{Re}\phi(t) &= t^m e^{\alpha t}(A(t)\cos\beta t - B(t)\sin\beta t),\\
\operatorname{Im}\phi(t) &= t^m e^{\alpha t}(B(t)\cos\beta t + A(t)\sin\beta t).
\end{aligned}$$

[...] □

IV.6. Équations de Cauchy-Euler

Une équation de la forme

$$a_0 f(t) + a_1 t f'(t) + \cdots + a_n t^n f^{(n)}(t) = b(t) \tag{E}$$

est dite une *équation de Cauchy-Euler*.

Pour chercher les solutions de (E) sur $]0,\infty[$, on peut la transformer en une équation linéaire à coefficients constants par le changement de variable

$$g = f\circ\exp, \quad f = g\circ\ln.$$

Pour chercher les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$, on peut la transformer en une équation linéaire à coefficients constants par le changement de variable

$$g(s) = f(-e^s), \quad f(t) = g(\ln(-t)).$$

V. 🚧 Systèmes linéaires à coefficients constants

CHAPITRE-BROUILLON

V.1. Généralités

Parfois on va confondre une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de n fonctions $D \to \mathbf{R}$ avec une seule fonction $F\colon D \to \mathbf{R}^n$ définie par :

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in D.$$

On définit la *dérivée* d'une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de n fonctions par :

$$(f_1, \dots, f_n)' \overset{\text{déf}}{=} (f_1', \dots, f_n').$$

Pour une fonction $F\colon D \to \mathbf{R}^n$ où

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in D,$$

on définit sa *dérivée* par la formule

$$F'(t) \overset{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix}, \quad t \in D.$$

Proposition. *Si $f_1, \dots, f_n\colon D \to \mathbf{R}$ sont des fonctions dérivables, et $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, alors*

$$\left(A \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \right)' = A \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}'.$$

Remarque. Si $F\colon D \to \mathbf{R}^n$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et $A\colon D \to \mathbf{R}^{m\times n}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}^{m\times n}$ (« une matrice variable »), alors on a la *règle de Leibniz* :

$$(AF)' = A'F + AF'.$$

Pareil pour le produit de matrices : si $A\colon D \to \mathbf{R}^{p\times q}$ et $B\colon D \to \mathbf{R}^{q\times r}$, alors

$$(AB)' = A'B + AB'.$$

V.2. Résolution d'un système d'ordre 1 par diagonalisation ou par triangularisation

On va étudier seulement le cas de systèmes avec le même nombre d'équations que de fonctions inconnues.

Considérons un système d'équations différentielle linéaires d'ordre 1 à coefficients constants :

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{1,1}x_1(t) + \cdots + a_{1,n}x_n(t) + f_1(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n,1}x_1(t) + \cdots + a_{n,n}x_n(t) + f_n(t), \end{cases} \quad t \in I. \tag{S}$$

Posons

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I.$$

La matrice A s'appelle la *matrice* du système (S).

Alors résoudre (S) revient à la même chose que résoudre l'équation différentielle « vectorielle »

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \quad t \in I, \tag{E}$$

où X est une fonction inconnue $I \to \mathbf{R}^n$, parce que on peut poser

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad t \in I.$$

Le système (S) est d'habitude facile à résoudre si la matrice A est diagonale, car dans ce case les n équations sont toutes indépendantes les unes des autres, donc il suffit de les résoudre indépendamment.

Si la matrice A n'est pas diagonale mais est triangulaire, on peut résoudre le système en résolvant les équations une par une, en utilisant à chaque étape les solutions des équations résolues précédemment.

Si la matrice A n'est pas diagonale mais est diagonalisable, on peut obtenir un système dont la matrice est diagonale par un « changement des variables ».

Supposons $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale. Alors l'équation (E) s'écrit

$$X' = PDP^{-1}X + F.$$

Faisons le « changement des variables »

$$X(t) = PY(t), \quad Y(t) = P^{-1}X(t).$$

Posons en plus, pour simplifier l'écriture,

$$F(t) = PG(t), \quad G(t) = P^{-1}F(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} & X' = PDP^{-1}X + F \\ \Leftrightarrow \quad & PY' = PDP^{-1}PY + PG \\ \Leftrightarrow \quad & Y' = DY + G. \end{aligned}$$

On peut maintenant trouver Y et ensuite X.

Si la matrice A dans (S) n'est pas diagonalisable mais est triangularisable, on peut obtenir un système dont la matrice est triangulaire par un « changement des variables » comme dans le cas avec une matrice diagonalisable.

Remarque. Si F est nulle, alors la solution de (E) avec la condition initiale $X(0) = X_0$ s'écrit comme

$$X(t) = \exp(tA)X_0.$$

Exemple. Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & -6y_1 & & & + & 6y_3 & - & t, \\ y_2' & = & 2y_1 & - & 2y_2 & - & 3y_3 & + & t, \\ y_3' & = & -2y_1 & & & + & y_3. & & \end{array} \right. \tag{S}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

Alors le système (S) est équivalent à

$$Y' = AY + F.$$

Voici le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = -12 - 16\lambda - 7\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda+2)^2(\lambda+3).$$

Comme un vecteur propre pour la valeur propre -3, on peut prendre $(2, -1, 1)$. Pour la valeur propre -2, on peut prendre 2 vecteurs propres linéairement indépendants : $(3, 0, 2)$ et $(0, 1, 0)$. Les trois vecteurs choisis sont linéairement indépendants, donc

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Posons

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = PDP^{-1}$. Ainsi le système (S) est équivalent à

$$Y' = PDP^{-1}Y + F \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}Y)' = DP^{-1}Y + P^{-1}F.$$

Posons

$$X(t) = P^{-1}Y(t), \quad G(t) = P^{-1}F(t).$$

Alors le système (S) est équivalent à

$$X' = DX + G.$$

On calcule P^{-1} et l'on trouve :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$G(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système (S) pour Y est équivalent au système suivant pour X :

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 &+ & t, \\ x_2' &= -2x_2 &- & t, \\ x_3' &= -3x_3 &- & 2t. \end{cases}$$

La solution générale pour x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1(t) &= \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4} &+ C_1 e^{-2t}, \\[2ex] x_2(t) &= -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4} &+ C_2 e^{-2t}, \\[2ex] x_3(t) &= -\dfrac{2t}{3} + \dfrac{2}{9} &+ C_3 e^{-3t}, \end{cases} \qquad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

En utilisant le changement des variables

$$Y(t) = PX(t),$$

on trouve la solution générale pour y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} y_1(t) &= \dfrac{t}{6} - \dfrac{11}{36} &+ 3C_1 e^{-2t} + 2C_3 e^{-3t}, \\[2ex] y_2(t) &= \dfrac{t}{6} + \dfrac{1}{36} &+ C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-3t}, \\[2ex] y_3(t) &= \dfrac{t}{3} - \dfrac{5}{18} &+ 2C_1 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}, \end{cases} \qquad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

V.3. Transformation d'une équation d'ordre n à une inconnue en un système d'ordre 1 à n inconnues

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants :

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t), \quad t \in I. \tag{E}$$

Pour résoudre cette équation, on peut poser

$$\begin{cases} y_0 &= x, \\ y_1 &= x', \\ & \vdots \\ y_{n-1} &= x^{(n-1)}, \end{cases}$$

et résoudre le système :

$$\begin{cases} y_0' &= y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ & \vdots \\ y_{n-1}' &= -a_0 y_0 - a_1 y_1 - \cdots - a_{n-1} y_{n-1} + f. \end{cases} \tag{S}$$

Cependant, cette méthode n'est pas la plus directe.
Soit A la matrice du système (S) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour diagonaliser ou triangulariser A, il faudrait d'abord calculer son polynôme caractéristique χ_A et trouver ses racines. Il se trouve que

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n),$$

ce qui ressemble beaucoup au *polynôme caractéristique* de l'équation (E) défini dans un cours d'analyse ou dans un cours d'équations différentielles :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

En fait,

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n P(\lambda).$$

(D'ailleurs, la matrice A s'appelle parfois la *matrice compagnon* du polynôme P.)

L'équation (E) s'écrit autrement comme

$$\left(\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d}{dt}+a_0\right)x(t)=f(t),$$

ou, en utilisant le polynôme P, comme

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x(t)=f(t).$$

Supposons qu'on a trouvé toutes les racines $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de χ_A et de P et a factorisé ces deux polynômes :

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda), \qquad P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

En utilisant cette factorisation de P, on peut réécrire l'équation (E) comme

$$\left(\left(\frac{d}{dt}-\lambda_n\right)\cdots\left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)\right)x(t)=f(t).$$

Posons

$$\begin{cases} y_0(t) & = & x(t), & & \\ y_1(t) & = & \left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)y_0(t) & = & y_0'(t)-\lambda_1 y_0(t), \\ y_2(t) & = & \left(\frac{d}{dt}-\lambda_2\right)y_1(t) & = & y_1'(t)-\lambda_2 y_1(t), \\ & \vdots & & & \\ y_{n-1}(t) & = & \left(\frac{d}{dt}-\lambda_{n-1}\right)y_{n-2}(t) & = & y_{n-2}'(t)-\lambda_{n-1}y_{n-2}(t). \end{cases}$$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}-\lambda_1\right)y_0(t) & = & y_1(t) \\ & \vdots & \\ \left(\frac{d}{dt}-\lambda_{n-1}\right)y_{n-2}(t) & = & y_{n-1}(t) \\ \left(\frac{d}{dt}-\lambda_n\right)y_{n-1}(t) & = & f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0' & = & \lambda_1 y_0+y_1 \\ & \vdots & \\ y_{n-2}' & = & \lambda_{n-1}y_{n-2}+y_{n-1} \\ y_{n-1}' & = & \lambda_n y_{n-1}+f \end{cases}$$

On peut le résoudre en trouvant d'abord y_{n-1}, ensuite y_{n-2}, et ainsi de suite jusqu'à $y_0=x$.

Par ailleurs, si f est nulle, alors il y a une formule assez simple pour la solution générale de (E) en fonction des racines de P (avec des exponentielles et des polynômes).

A. 🚧 « Fonctions » et « variables »

APPENDICE-BROUILLON
[...]

B. 🚧 Dérivation des fonctions d'un argument réel et à valeurs dans R^n ou dans C

APPENDICE-BROUILLON
[...]

C. 🚧 Polynômes

APPENDICE-BROUILLON
[...]

D. 🚧 Intégrales

APPENDICE-BROUILLON
[...]