

Déterminant

Alexey Muranov

8 juillet 2025

1 Applications multilinéaires alternées

Dans cette section, E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$.

Définition. Soient $A_1, \dots, A_n$, et B des ensembles, et

$$\varphi: \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$$

une application. Supposons que A_k et B sont munis de structures d'espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. Alors φ est dite *linéaire* en argument numéro k si et seulement si pour toute famille

$$(a_i)_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \in \prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} A_i = A_1 \times \dots \times A_{k-1} \times A_{k+1} \times \dots \times A_n,$$

l'application $f: A_k \rightarrow B$ donnée par

$$f(\mathbf{a}_k) = \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, \mathbf{a}_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

est linéaire.

En particulier, si $\varphi: E^2 \rightarrow F$, alors :

- (1) φ est linéaire en premier argument si et seulement si pour tout $\mathbf{v} \in E$, l'application $E \rightarrow F$ définie comme

$$\mathbf{u} \mapsto \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

est linéaire,

- (2) φ est linéaire en second argument si et seulement si pour tout $\mathbf{u} \in E$, l'application $E \rightarrow F$ définie comme

$$\mathbf{v} \mapsto \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

est linéaire.

Définition. Soient $E_1, \dots, E_n$, et F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, et

$$\varphi: \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$$

une application. Alors φ est dite *n-linéaire* ou *multilinéaire* si et seulement si elle est linéaire en chaque argument (de numéros de 1 à n).

Exemple. Posons $E_1 = \mathbf{K}^2$ et $E_2 = \mathbf{K}^3$. Soit $\varphi: E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbf{K}$ définie par

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_2 + x_2y_3, \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Alors φ est 2-linéaire (où *bilinéaire*).

Définition. Une application n -linéaire $\varphi: E^n \rightarrow F$ est dite *alternée* si et seulement si

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

pour toute famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ de rang $< n$ (telle que $\text{rk}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \leq n - 1$).

Exemple. Posons $E = \mathbf{K}^3$. Soit $\omega: E^2 \rightarrow \mathbf{K}$ définie par

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_2 - 3x_2y_1, \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Alors ω est bilinéaire alternée.

Proposition. Une application n -linéaire $\varphi: E^n \rightarrow F$ est alternée si et seulement si

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

pour toute famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle que le nombre d'éléments dans l'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ est $< n$ (telle que $\text{card}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \leq n - 1$).

Idée d'une démonstration. Comme pour toute $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$,

$$\text{rk}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \leq \text{card}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\},$$

une des implications dans l'équivalence est triviale. Il reste à démontrer l'autre : que si $\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ pour toute $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle que $\text{card}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \leq n - 1$, alors $\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ pour toute $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle que $\text{rk}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \leq n - 1$.

Supposons que $\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ pour toute $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle que $\text{card}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \leq n - 1$. Soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle que $\text{rk}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \leq n - 1$.

Considérons le cas particulier où

$$\mathbf{v}_n = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}.$$

Alors :

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha_1 \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_1) + \dots + \alpha_{n-1} \varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-1}) = \mathbf{0}.$$

Les autres cas sont analogues. □

Si $\omega: E^2 \rightarrow F$ est bilinéaire alternée, alors, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$,

$$\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \omega(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} + \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mathbf{0} = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

De la même manière on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. Soit $\omega: E^n \rightarrow F$ une application n -linéaire alternée. Soient $1 \leq i < j \leq n$, et $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in E^n$ et $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ deux familles telles que :

- (1) $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i$,
- (2) $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k$ pour $k \notin \{i, j\}$.

Alors

$$\omega(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) + \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}.$$

Proposition. Une application n -linéaire $\varphi: E^n \rightarrow F$ est alternée si et seulement si

$$\varphi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

pour toute famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in E^n$ telle qu'il y a $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1}$.

Exercice. Démontrer cette proposition.

Proposition. Soient $n = \dim E \in \mathbf{N}$, et $\omega: E^n \rightarrow F$ une application n -linéaire alternée. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Supposons que

$$\omega\mathcal{B} = \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbf{0}.$$

Alors ω est nulle.

Idée d'une démonstration. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in E$. Pour montrer que $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$, on peut écrire $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ comme combinaisons linéaires de $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ et utiliser les propriétés des applications multilinéaires alternées. $\square$

Corollaire. Soient $n = \dim E \in \mathbf{N}$, et $\eta, \theta: E^n \rightarrow F$ deux applications n -linéaires alternées. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Supposons que $\eta\mathcal{B} = \theta\mathcal{B}$. Alors $\eta = \theta$.

Démonstration. Posons $\omega = \eta - \theta$. Alors ω est n -linéaire alternée, et $\omega\mathcal{B} = \mathbf{0}$. Donc, ω est nulle, et $\eta = \theta$. $\square$

Notation. L'ensemble des applications n -linéaires alternées $E^n \rightarrow F$ sera noté comme « $\text{Alt}^n(E, F)$ ».^{1, 2}

Proposition. Quel que soit un nombre naturel n , $\text{Alt}^n(E, F)$ est un espace vectoriel :

- (1) si $\omega_1, \omega_2: E^n \rightarrow F$ sont n -linéaires alternées, alors $\omega_1 + \omega_2$ l'est aussi,
- (2) si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\omega: E^n \rightarrow F$ est n -linéaire alternée, alors $\alpha\omega$ l'est aussi,
- (3) l'application nulle $E^n \rightarrow F$ est n -linéaire alternée.

Proposition. Soient E, F, G, H des espaces vectoriels, $f: E \rightarrow F$ et $h: G \rightarrow H$ deux applications linéaires, et $\eta: F^n \rightarrow G$ une application n -linéaire alternée ($\eta \in \text{Alt}^n(F, G)$). Définissons une application $\theta: E^n \rightarrow H$ par la formule :

$$\theta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = h(\eta(f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n))).$$

Alors θ est n -linéaire alternée ($\theta \in \text{Alt}^n(E, H)$).

On peut montrer que pour $n = \dim E$, $\dim \text{Alt}^n(E, F) = \dim F$. Écrit autrement :

$$\dim \text{Alt}^{\dim E}(E, F) = \dim F.$$

Mais pour l'instant on n'a pas tout ce qu'il faut pour cela, et on va se contenter d'un résultat plus faible :

Proposition. Si $n = \dim E \in \mathbf{N}$, alors $\dim \text{Alt}^n(E, F) \leq \dim F$.

Idée d'une démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors l'application $\beta: \text{Alt}^n(E, F) \rightarrow F$ définie par $\beta\omega = \omega\mathcal{B}$ est linéaire et injective, car, d'après une proposition précédente, son noyau est nul. $\square$

Proposition. Soient $n = \dim E \in \mathbf{N}$, et $\eta, \theta: E^n \rightarrow \mathbf{K}$ deux applications n -linéaires alternées. Alors

$$\eta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \cdot \theta(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \eta(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \cdot \theta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

pour tous $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in E$.

Cette proposition résulte immédiatement d'une proposition précédente et du lemme suivant :

¹ Cette notation est utilisée, par exemple, dans [Jän1993; Jän2001]. Cependant, il n'y a peut-être pas de notation standard pour les espaces des applications multilinéaires alternées. Souvent aucune notation spéciale n'est accordée.

² Il ne faut pas confondre cet usage de la notation « Alt^n » avec un certain autre, qui, lui, est assez courant. Selon cet autre usage, $\text{Alt}^n(E)$ est un certain sous-espace de l'espace vectoriel $E^{\otimes n}$ de tenseurs. Lorsque l'espace vectoriel E est de dimension finie, l'espace $E^{\otimes n}$ peut être canoniquement identifié avec l'espace des applications n -linéaires $E^* \rightarrow \mathbf{K}$, où $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ est l'espace des applications linéaires $E \rightarrow \mathbf{K}$, et l'espace $\text{Alt}^n(E)$, au sens de cet autre usage, peut être canoniquement identifié avec $\text{Alt}^n(E^*, \mathbf{K})$ (au sens défini ici).

Lemme. Soient S un ensemble non vide et Φ un ensemble d'applications $S \rightarrow \mathbf{K}$ qui est un espace vectoriel au sens que :

- (1) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, alors $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$,
- (2) si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\varphi \in \Phi$, alors $\alpha\varphi \in \Phi$,
- (3) l'application nulle $S \rightarrow \mathbf{K}$ est dans Φ .

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) il y a un élément $e \in S$ tel que pour toute $\varphi \in \Phi$, si $\varphi(e) = 0$, alors φ est nulle,
- (2) $\dim \Phi \leq 1$,
- (3) pour tous $\chi, \psi \in \Phi$ et pour tous $s, t \in S$, $\chi(t)\psi(s) = \chi(s)\psi(t)$.

Démonstration. Montrons d'abord que (1) implique (2) et (3).

Admettons (1), et soit alors $e \in S$ tel que pour toute $\varphi \in \Phi$, si $\varphi(e) = 0$, alors φ est nulle.

Pour montrer (2), considérons l'application $\varepsilon: \Phi \rightarrow \mathbf{K}$ définie par $\varepsilon(\varphi) = \varphi(e)$. Elle est linéaire et injective (car son noyau est nul). Donc, $\dim \Phi \leq \dim \mathbf{K} = 1$.

Pour montrer (3), considérons $\chi, \psi \in \Phi$ arbitraires et montrons que, pour tous $s, t \in S$, $\chi(t)\psi(s) = \chi(s)\psi(t)$.

Pour commencer, observons que

$$\chi(e)\psi(e) = \chi(e)\psi(e).$$

(Il n'y a pas de faute de frappe ici : les deux membres de cette égalité sont identiques.)

On va maintenant montrer que

$$\chi(e)\psi(s) = \chi(s)\psi(e) \quad \text{pour tout } s \in S.$$

Pour cela, posons

$$\varphi(s) = \chi(e)\psi(s) - \chi(s)\psi(e) \quad \text{pour tout } s \in S.$$

Il suffit de montrer que φ est nulle. Or, $\varphi \in \Phi$ et $\varphi(e) = 0$, d'où, φ est nulle.

Enfin, soit $s \in S$ arbitraire, et posons

$$\varphi(t) = \chi(t)\psi(s) - \chi(s)\psi(t) \quad \text{pour tout } t \in S.$$

Pour terminer la déduction de (3), il suffit de montrer que φ est nulle. Or, $\varphi \in \Phi$ et $\varphi(e) = 0$, d'où, φ est nulle.

Montrons que (2) implique (1). Admettons (2). Si $\dim \Phi = 0$, alors (1) est satisfaite avec un n'importe quel choix de $e \in S$. Supposons $\dim \Phi = 1$, alors soit χ un générateur de Φ , et soit $e \in S$ tel que $\chi(e) \neq 0$. Si $\psi = \alpha\chi \in \Phi$, $\alpha \in \mathbf{K}$, et que $\psi(e) = 0$, alors $\alpha = 0$ et ψ est nulle. Donc, (1) est satisfaite.

Montrons que (3) implique (1). Admettons (3). Si $\dim \Phi = 0$, alors (1) est satisfaite avec un n'importe quel choix de $e \in S$. Supposons $\dim \Psi > 0$, alors soit χ un élément non nul de Φ , et soit $e \in S$ tel que $\chi(e) \neq 0$. Alors, pour tous $\psi \in \Phi$ et $s \in S$,

$$\psi(s) = \frac{\chi(s)\psi(e)}{\chi(e)}.$$

Donc, si $\psi(e) = 0$, alors $\psi(s) = 0$ pour tout $s \in S$. Ainsi, (1) est satisfaite. $\square$

2 Déterminant d'une matrice carrée

Dans cette section, I_n est la matrice identité $n \times n$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut la noter « I » tout simplement.

Notation. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ sera noté « $\mathbf{K}^{m \times n}$ ». ³

On va provisoirement adopter la définition récursive du *déterminant* d'une matrice carrée par « développement » suivant la première ligne :

Définition. Le *déterminant* d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{K}^{n \times n}$ sera noté « $\det A$ » et défini par récurrence sur n ainsi :

(1) Si $n = 1$, alors $\det A \stackrel{\text{déf}}{=} a_{1,1}$ (l'unique coefficient de A).

(2) Si $n \geq 2$, alors

$$\det A \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1,j} \det \hat{A}_{1,j},$$

où $\hat{A}_{1,j} \in \mathbf{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ est la matrice obtenue de A en « supprimant » la ligne numéro 1 et la colonne numéro j .

Remarque. On peut élargir cette définition en commençant avec le cas $n = 0$, plutôt que $n = 1$, et définir le déterminant de l'unique matrice 0×0 (la matrice vide) comme 1.

Définition. Si $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ et que $B \in \mathbf{K}^{m \times m}$ est une matrice obtenue de A en « supprimant » $n - m > 0$ lignes et le même nombre de colonnes, alors le déterminant de B est dit un *déterminant mineur* de A . ⁴

Souvent au lieu de « déterminant mineur de A » on dit « mineur de A » tout court.

Pour développer la théorie du déterminant, on aura besoin de temps en temps de le traiter comme une application $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ avec n et $\mathbf{K}$ donnés. Pour cela, on va provisoirement adopter la notation suivante :

Notation. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on va noter « $\det_n$ » l'application $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ qui à chaque $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ associe son déterminant : $\det_n A \stackrel{\text{déf}}{=} \det A$.

³ Cette notation est utilisée, par exemple, dans [MB2023].

⁴ Voir, par exemple, [Syl1851].

On pourrait utiliser la notation encore plus explicite « $\det_{n,\mathbf{K}}$ », mais normalement « $\det_n$ » doit suffire, tant qu'on suppose chaque fois que $\mathbf{K}$ est donné d'avance.

Proposition. *L'application $\det_n: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ est n -linéaire alternée en colonnes de son argument.*

Idée d'une démonstration. Récurrence sur n . □

Corollaire. $\dim \text{Alt}^n(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}) = 1$.

Démonstration. L'espace $\text{Alt}^n(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$ contient un élément non nul, et donc

$$\dim \text{Alt}^n(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}) \geq 1.$$

D'où, $\dim \text{Alt}^n(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}) = 1$. □

Proposition. *Si E est un espace vectoriel à n dimensions, alors $\dim \text{Alt}^n(E, \mathbf{K}) = 1$.*

Démonstration. Vu qu'il est déjà montré que $\dim \text{Alt}^n(E, \mathbf{K}) \leq 1$, il suffit de montrer qu'il existe une application $E^n \rightarrow \mathbf{K}$ n -linéaire alternée non nulle.

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base de E .

Pour tout $\mathbf{v} \in E$, on va noter « $_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]$ » la colonne des coordonnées de $\mathbf{v}$ par rapport à $\mathcal{B}$. Ainsi, $_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}] \in \mathbf{K}^{n \times 1}$ pour tout $\mathbf{v} \in E$.

Pour toute famille $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ de vecteurs dans E , on va noter $_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k]$ la matrice $n \times k$ de colonnes $_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_1], \dots, _{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_k]$. En particulier,

$$_{\mathcal{B}}[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = _{\mathcal{B}}[\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Définissons $\omega: E^n \rightarrow \mathbf{K}$ par la formule :

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det _{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

Alors ω est multilinéaire alternée et non nulle, car

$$\omega \mathcal{B} = \det _{\mathcal{B}}[\mathcal{B}] = 1. \quad \square$$

Remarque. On peut en fait montrer que si E et F sont deux espaces vectoriels et que $\dim E = n$, alors $\dim \text{Alt}^n(E, F) = \dim F$.

Proposition. *Soient $p, q, r \in \mathbf{N}$, $A \in \mathbf{K}^{p \times q}$, et $\eta: \mathbf{K}^{p \times r} \rightarrow \mathbf{K}$ une application r -linéaire alternée en colonnes de son argument. Définissons $\theta: \mathbf{K}^{q \times r} \rightarrow \mathbf{K}$ par la formule :*

$$\theta(M) = \eta(AM).$$

Alors θ est une application r -linéaire alternée en colonnes de son argument.

Corollaire. Soit $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$. Définissons $\omega: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ par la formule :

$$\omega(M) = \det AM.$$

Alors ω est une application n -linéaire alternée en colonnes de son argument.

Proposition. Soit $\omega: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ une application n -linéaire alternée en colonnes de son argument. Alors, pour tout $M \in \mathbf{K}^{n \times n}$,

$$\omega(M) = \omega(I) \det M.$$

Démonstration. L'ensemble des applications $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ qui sont multilinéaires alternées en colonnes des ses arguments est un espace vectoriel 1-dimensionnel, et l'application déterminant est un élément non nul de cet espace (donc en forme une base). Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que pour tout $M \in \mathbf{K}^{n \times n}$,

$$\omega(M) = \alpha \det M.$$

En posant $M = I$, on trouve que $\alpha = \omega(I)$. □

Corollaire. L'application $\det_n: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ est complètement déterminée (caractérisée) par ses propriétés suivantes :

- (1) $\det_n$ est n -linéaire alternée en colonnes de son argument,
- (2) $\det_n I = 1$.

Remarque. On peut adopter la caractérisation de l'application $\det_n$ donnée dans le dernier corollaire comme sa *définition*, et ainsi définir les déterminants des matrices carrées.

Proposition. Si $A, B \in \mathbf{K}^{n \times n}$, alors

$$\det AB = (\det A)(\det B).$$

Démonstration. Soient $A, B \in \mathbf{K}^{n \times n}$. Définissons $\omega: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ par la formule :

$$\omega(M) = \det AM.$$

Alors, d'après la proposition précédente,

$$\omega(M) = \omega(I) \det M$$

pour toute $B \in \mathbf{K}^{n \times n}$. Or, $\omega(I) = \det A$ et $\omega(B) = \det AB$. D'où,

$$\det AB = (\det A)(\det B). \quad \square$$

Question. Peut-on donner une formule de « développement » du déterminant suivant une autre ligne que la première ?

Question. Est-il possible de « développer » le déterminant suivant une colonne ?

Question. Quel est le rapport entre le déterminant d'une matrice et le déterminant de sa transposée ?

On peut répondre à ces questions en utilisant le lemme et la proposition suivants.

Lemme. Soit une application $\varphi: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ multilinéaire, à la fois, en colonnes et en lignes de son argument. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (1) $\varphi(A) = 0$ pour toute $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ telle que $\text{rk } A < n$,
- (2) φ est alternée en colonnes de son argument,
- (3) φ est alternée en lignes de son argument.

Ce lemme résulte directement des propriétés du rang d'une matrice et des définitions utilisées.

Proposition. L'application $\det_n: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ est n -linéaire alternée en lignes de son argument.

Idée d'une démonstration. Multilinéarité : par récurrence sur n , avec un traitement spécial de la linéarité par rapport à la première ligne.

Alternance : d'après le lemme précédent. □

On peut déduire de cette proposition que toute application $\omega: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ n -linéaire alternée en lignes de son argument est de la forme $\omega(M) = \omega(I) \det M$, et que, en particulier, l'application $\det_n$ est l'unique application $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ qui est n -linéaire alternée en lignes de son argument et dont la valeur pour la matrice identité est 1. Cela peut se faire de manière analogue à ce qui a été fait ci-dessus pour les applications $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ n -linéaires alternées en colonnes. En plus, il résulte de la proposition suivante que les propriétés du déterminant sont les mêmes par rapport aux lignes que par rapport aux colonnes :

Proposition. Si $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$, alors

$$\det {}^t A = \det A.$$

Démonstration. Définissons $\omega: \mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ par la formule :

$$\omega(A) = \det {}^t A.$$

Comme l'application déterminant $\mathbf{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{K}$ est n -linéaire alternée en lignes de son argument, l'application ω est n -linéaire alternée en colonnes de son argument. Donc,

$$\omega(A) = \omega(I) \det A$$

pour toute $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$. Or, $\omega(I) = \det {}^t I = 1$ et $\omega(A) = \det {}^t A$. D'où, pour toute $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$,

$$\det {}^t A = \det A. \quad \square$$

Proposition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{K}^{n \times n}$, et posons $\hat{A}_{i,j}$ la matrice obtenue de A en « supprimant » la ligne numéro i et la colonne numéro j . Alors,

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \hat{A}_{i,j} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\},$$

et

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \hat{A}_{i,j} \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n\}.$$

La première formule de cette proposition est dite le « développement » du déterminant de A suivant la ligne numéro i , et la deuxième est dite le « développement » du déterminant de A suivant la colonne numéro j .

Idee d'une démonstration. La définition adoptée du déterminant donne la formule de « développement » suivant la première ligne. Utiliser la multilinéarité en lignes pour en déduire les formules de « développement » suivant les autres lignes. Utiliser l'identité $\det {}^t A = \det A$ pour en déduire les formules de « développement » suivant les colonnes. $\square$

Formule de Leibniz

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note « S_n » l'ensemble des *permutations* de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ (bijections entre cet ensemble et lui-même).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit le *signe*, ou la *signature*, de σ , noté « $\text{sign } \sigma$ », ainsi : $\text{sign } \sigma \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^k$ si $\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$, où chaque τ_i est une *transposition* de deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. (On peut montrer que cette définition est correcte : la valeur de « $\text{sign } \sigma$ » est ainsi bien définie.)

Théorème (Formule de Leibniz). Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{K}^{n \times n}$, alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\tau \in S_n} \text{sign } \tau \prod_{j=1}^n a_{\tau(j),j}.$$

3 Cofacteurs, comatrice, matrice complémentaire

Définition. Soit $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ une matrice carrée. Le *cofacteur* de A d'indice (i, j) , noté « $\text{Cof}_{i,j} A$ », est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j .

En utilisant les cofacteurs, les formules de « développement » du déterminant de A suivant les lignes et les colonnes s'écrivent ainsi :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \operatorname{Cof}_{i,j} A \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \operatorname{Cof}_{i,j} A \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Définition. La *comatrice* de $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$, notée « $\operatorname{com} A$ », est la matrice des cofacteurs de A :

$$\operatorname{com} A \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \operatorname{Cof}_{1,1} A & \cdots & \operatorname{Cof}_{1,n} A \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Cof}_{n,1} A & \cdots & \operatorname{Cof}_{n,n} A \end{pmatrix}.$$

Définition. La *matrice complémentaire* de $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ est ${}^t\operatorname{com} A$ (la transposée de la comatrice de A).

Proposition. Pour toute $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$,

$$({}^t\operatorname{com} A)A = (\det A)I = A({}^t\operatorname{com} A),$$

où I est la matrice identité $n \times n$.

Démonstration. Posons $({}^t\operatorname{com} A)A = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n (\operatorname{Cof}_{k,i} A) a_{k,j}.$$

Lorsque $i = j$, d'après la formule du « développement » du déterminant de A suivant la colonne numéro j , on trouve que

$$c_{i,j} = c_{j,j} = \sum_{k=1}^n (\operatorname{Cof}_{k,j} A) a_{k,j} = \det A.$$

Lorsque $i \neq j$, si on considère la matrice obtenue de A en remplaçant la colonne numéro i par une copie de la colonne numéro j et on « développe » son déterminant suivant la colonne numéro i , on trouvera la formule pour $c_{i,j}$. Or, le déterminant d'une matrice avec deux colonnes identiques est zéro. D'où, $c_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$. Ainsi,

$$({}^t\operatorname{com} A)A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I.$$

L'identité $A({}^t\operatorname{com} A) = (\det A)I$ se démontre d'une manière analogue, en utilisant les « développements » suivant les lignes. $\square$

Corollaire. Si $A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ et $\det A \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{com } A}{\det A}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et que $ad - bc \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Formule de Jacobi

La *formule de Jacobi* exprime la *différentielle* du déterminant d'une matrice carrée à coefficients réels ou complexes comme la trace du produit de sa matrice complémentaire et de sa différentielle :

Théorème (Formule de Jacobi). Si « A » est une variable qui représente une matrice carrée à coefficients réels ou complexes, alors

$$d(\det A) = \text{tr}(dA {}^t \text{com } A) = \text{tr}({}^t \text{com } A) dA).$$

Démonstration. Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Comme $\det A$ est multilinéaire en colonnes de A , on a, par les propriétés usuelles de différentiation d'expressions multilinéaires :

$$\begin{aligned} d(\det A) &= d \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} da_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ da_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ da_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & da_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & da_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & da_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & da_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & da_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & da_{n,n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En « développant » chaque déterminant dans cette somme par la colonne des différentielles, on a :

$$d(\det A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (da_{i,j}) \text{Cof}_{i,j} A = \text{tr}(dA {}^t \text{com } A) = \text{tr}({}^t \text{com } A) dA). \quad \square$$

Remarque. L'expression « $d(\det A)$ » utilise la notation différentielle classique qui, malheureusement, n'est pas facile à formaliser en analyse « moderne » (telle qu'elle est d'habitude enseignée). Une solution simple est d'interpréter « $d(\det A)$ » comme une notation abrégée pour $\det'(A)(dA)$, où $\det'(A)$ est la valeur en A de la *dérivée de Fréchet* de l'application $\det$.

Exemple. Posons $A = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$. Alors $\det A = sv - tu$, et donc

$$d(\det A) = v(ds) + s(dv) - u(dt) - t(du).$$

On a :

$$({}^t\text{com } A)dA = \begin{pmatrix} v & -t \\ -u & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds & dt \\ du & dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(ds) - t(du) & v(dt) - t(dv) \\ -u(ds) + s(du) & -u(dt) + s(dv) \end{pmatrix},$$

et donc $\text{tr}({}^t\text{com } A)dA = v(ds) - t(du) - u(dt) + s(dv) = d(\det A)$.

Dans le cas particulier où $A = F(t)$, $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}^{n \times n}$, la formule de Jacobi donne :

$$\begin{aligned} d(\det F(t)) &= \text{tr}\left({}^t\text{com } F(t) d(F(t))\right) \\ &= \text{tr}\left({}^t\text{com } F(t) F'(t) dt\right) \\ &= \text{tr}\left({}^t\text{com } F(t) F'(t)\right) dt, \end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{d}{dt}(\det F(t)) = \text{tr}\left({}^t\text{com } F(t) F'(t)\right).$$

4 Déterminant d'une famille par rapport à une base et déterminant d'un endomorphisme

Une matrice $A \in \mathbf{K}^{m \times n}$ peut être « identifiée » :

- (1) à la famille de ses m lignes, vues comme éléments de $\mathbf{K}^n$,
- (2) à la famille de ses n colonnes, vues comme éléments de $\mathbf{K}^m$,
- (3) à l'application linéaire $\mathbf{K}^m \rightarrow \mathbf{K}^n$ définie par $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}A$ si on « identifie » $\mathbf{K}^m$ avec $\mathbf{K}^{1 \times m}$ et $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K}^{1 \times n}$,
- (4) à l'application linéaire $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ définie par $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$ si on « identifie » $\mathbf{K}^m$ avec $\mathbf{K}^{m \times 1}$ et $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K}^{n \times 1}$.

En accord avec ces différentes « identifications » possibles, la notion du *déterminant* d'une matrice carrée se généralise de deux manières différentes mais liées :

- (1) à la notion du *déterminant* d'une famille par rapport à une base,
- (2) à la notion du *déterminant* d'un endomorphisme.

(Toutes les deux dans des espaces vectoriels de dimensions finies.)

Pour le reste de cette section, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension $n \in \mathbf{N}$.

Définition. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors l'application *déterminant* par rapport à $\mathcal{B}$, notée « $\det_{\mathcal{B}}$ », est l'unique application n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}: E^n \rightarrow \mathbf{K}$ telle que $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

Ainsi, si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in E$, et qu'on note $_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$ la matrice $n \times n$ dont les entrées sont les coordonnées des vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ par rapport à $\mathcal{B}$ écrites en colonnes, alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det_{\mathcal{B}}[_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]].$$

Proposition. Si $n = \dim E \in \mathbf{N}$, $\mathcal{F}$ est une famille à n éléments dans E , et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E , alors :

- (1) $(\det_{\mathcal{B}} \mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}} \mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$,
- (2) $(\det_{\mathcal{B}} \mathcal{C})(\det_{\mathcal{C}} \mathcal{B}) = 1$,
- (3) $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

Définition. Soit $h: E \rightarrow E$ un endomorphisme de E . Alors le *déterminant* de h , noté « $\det h$ », est l'unique nombre (élément de $\mathbf{K}$) tel que pour toute application n -linéaire alternée $\omega: E^n \rightarrow \mathbf{K}$ et pour tous $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in E$,

$$\omega(h(\mathbf{v}_1), \dots, h(\mathbf{v}_n)) = ((\det h)\omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\det h)\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Proposition. Si $f, g: E \rightarrow E$ sont deux endomorphismes, alors

$$\det(g \circ f) = (\det g)(\det f).$$

Proposition. Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base de E et $h: E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors

$$\det h = \det_{\mathcal{B}}(h(\mathbf{u}_1), \dots, h(\mathbf{u}_n)).$$

Corollaire. Si $h: E \rightarrow E$ est un endomorphisme et que A est la matrice de h par rapport à une base de E , alors $\det h = \det A$.

Références

- [Jän1993] Klaus Werner JÄNICH. *Vektoranalysis*. Allemand. 2^e éd. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg : Springer, 1993. xii+276. DOI : 10.1007/978-3-662-10752-2. URL : <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-10752-2>.

- [Jän2001] Klaus Werner JÄNICH. *Vector analysis*. Anglais. 1^{re} éd. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer, 2001. xiv+284. DOI : 10.1007/978-1-4757-3478-2. URL : <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-3478-2>.
- [MB2023] Saunders MAC LANE et Garrett BIRKHOFF. *Algebra*. Anglais. 3^e éd. AMS Chelsea Publishing. Publié à l'origine par Chelsea Publishing Company, 1988. American Mathematical Society, 10 oct. 2023. 626 p. URL : <https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=CHL/330>.
- [Syl1851] James Joseph SYLVESTER. « On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions ». Anglais. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 4^e sér. 1.4 (1851), p. 295-305. DOI : 10.1080/14786445108646735. URL : <https://www.biodiversitylibrary.org/item/53805#page/311>.