Diagonalisation et triangularisation

Alexey Muranov

20 avril 2025

1 Révisions et préliminaires

Dans cette section, E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$.

Proposition. *Soient $f, g\colon E \to E$ deux endomorphismes qui commutent ($g \circ f = f \circ g$). Alors le noyau et l'image de chaque est stable par l'autre :*

$$g(\ker f) \subset \ker f, \quad g(\operatorname{img} f) \subset \operatorname{img} f, \quad f(\ker g) \subset \ker g, \quad f(\operatorname{img} g) \subset \operatorname{img} g.$$

On peut facilement généraliser cette proposition ainsi :

Proposition. *Soient $f, g\colon E \to E$ deux endomorphismes qui commutent ($g \circ f = f \circ g$), et soit V un sous-espace de E stable par f. Alors l'image (directe) $g(V)$ et l'image réciproque (la préimage) $g^{-1}(V)$ de V par g sont aussi stables par f.*

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et V un sous-espace de E stable par h. Alors V est stable par $P(h)$ pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$.*

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme, $\lambda \in \mathbf{K}$, et V un sous-espace de E. Alors V est stable par h si et seulement si V est stable par $h - \lambda \operatorname{id}_E$.*

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et V un sous-espace de E stable par h. Soit U un sous-espace de E tel que $h(V) \subset U \subset V$. Alors U est stable par h.*

Notation. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A sera noté « χ_A ». Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme h sera noté « χ_h ».

Proposition. *Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $h\colon E \to E$ est scindé sur $\mathbf{K}$ et que $\dim E > 0$, alors h admets un vecteur propre.*

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme, V un sous-espace de E stable par h, et $g = h|_V\colon V \to V$ la restriction de h sur V. Alors χ_g divise χ_h. En particulier, si χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$, alors χ_g l'est aussi.*

Notation. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, et $\boldsymbol{v} \in E$ un vecteur. On va utiliser la notation « ${}_{\mathcal{B}}[\boldsymbol{v}]$ » pour le tuple, ou pour la matrice colonne (selon le contexte), des coordonnées de $\boldsymbol{v}$ par rapport à $\mathcal{B}$.

D'autres notations similaires qu'on peut envisager : « $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ », « $[\boldsymbol{v}]^{\mathcal{B}}$ ». Lorsque la base en question est claire du contexte, on peut écrire « $[\boldsymbol{v}]$ » tout court.

Notation. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{A}$ une base de E, $\mathcal{B}$ une base de F, et $h\colon E \to F$ une application linéaire. On va utiliser la notation « ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{A}}$ » pour la matrice de h par rapport aux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

D'autres notations similaires qu'on peut envisager : « $[h]_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ », « $[h]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ ». Lorsque les bases en question sont claires du contexte, on peut écrire « $[h]$ » tout court.

Avec ces notations :

(1) si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{A}$ est une base de E, $\mathcal{B}$ est une base de F, $\boldsymbol{v} \in E$ est un vecteur, et $h\colon E \to F$ est une application linéaire, alors

$$ {}_{\mathcal{B}}[h(\boldsymbol{v})] = {}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{A}}\,{}_{\mathcal{A}}[\boldsymbol{v}]\,; $$

(2) si E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathcal{A}$ est une base de E, $\mathcal{B}$ est une base de F, $\mathcal{C}$ est une base de G, et $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux applications linéaires, alors

$$ {}_{\mathcal{C}}[g \circ f]_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}. $$

2 Diagonalisabilité et triangularisabilité d'endomorphismes

Dans cette section, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie.

Proposition. *Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Posons*

$$ \begin{aligned} & & U_k &= \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}_1) & &\textit{pour } k \in \{1, \dots, n\}, \\ V_0 &= \{\mathbf{0}\}, & V_k &= U_k + V_{k-1} = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k) & &\textit{pour } k \in \{1, \dots, n\}, \\ W_{n+1} &= \{\mathbf{0}\}, & W_k &= U_k + W_{k+1} = \mathrm{Vect}(\boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n) & &\textit{pour } k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} $$

Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et $A = {}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ la matrice de h par rapport à $\mathcal{B}$. Alors :

(1) *A est diagonale si et seulement si U_k est stable par h pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,*

(2) *A est triangulaire supérieure si et seulement si V_k est stable par h pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,*

(3) *A est triangulaire inférieure si et seulement si W_k est stable par h pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$.*

Exercice. Prouver cette proposition.

Exercice. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Supposons que la matrice de h par rapport à une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ est triangulaire supérieure. Préciser une base $\mathcal{B}'$ de E telle que la matrice de h par rapport à $\mathcal{B}'$ soit triangulaire inférieure.

Corollaire. *Quel que soit un endomorphisme $h\colon E \to E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est diagonale,*

(2) *il existe n sous-epaces $U_1, \dots, U_n$ de E, tous stables par h, tels que*

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = E,$$

et que

$$\dim U_k = 1 \quad \textit{pour tout } k.$$

Corollaire. *Quel que soit un endomorphisme $h\colon E \to E$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure,*

(2) *il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire inférieure,*

(3) *il existe $n+1$ sous-epaces $V_0, V_1, \dots, V_n$ de E, tous stables par h, tels que*

$$\{\mathbf{0}\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = E,$$

et que

$$\dim V_k = k \quad \textit{pour tout } k.$$

Définition. Un endomorphisme $h\colon E \to E$ est dit *diagonalisable* si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est diagonale. *Diagonaliser* h veut dire trouver une telle base $\mathcal{B}$ et la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$.

Définition. Un endomorphisme $h\colon E \to E$ est dit *triangularisable* si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure (ou inférieure). *Triangulariser* h veut dire trouver une telle base $\mathcal{B}$ et la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$.

Définition. Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et $\lambda \in \mathbf{K}$. La *multiplicité algébrique* de λ comme valeur propre de h est sa multiplicité comme racine de χ_h. La *multiplicité géométrique* de λ comme valeur propre de h est $\dim\ker(h - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et $\lambda \in \mathbf{K}$.*

(1) *La multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de h est non nulle si et seulement si sa multiplicité géométrique est non nulle, et c'est si et seulement si λ est une valeur propre de h.*

(2) *La multiplicité géométrique de λ comme valeur propre de h est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique.*

Idée d'une démonstration. Pour montrer que la multiplicité géométrique de λ en qualité d'une valeur propre de h est inférieure ou égale à sa multiplicité algébrique, posons

$$V = \ker(h - \lambda \,\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad g = h|_V = \lambda \,\mathrm{id}_V \colon V \to V.$$

Alors $m = \dim V$ est la multiplicité géométrique de λ comme valeur propre de h, et $\chi_g = (\lambda - X)^m$ divise χ_h, donc, la multiplicité de λ comme racine de χ_h est supérieure ou égale à m. □

Théorème. *Un endomorphisme $h\colon E \to E$ est diagonalisable si et seulement si :*

(1) *χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$, et*

(2) *la multiplicité géométrique de toute valeur propre de h est égale à sa multiplicité algébrique.*

Une autre façon d'énoncer la deuxième condition dans le théorème est ainsi :

la multiplicité de toute racine λ de χ_h est $\dim \ker(h - \lambda \,\mathrm{id}_E)$.

Corollaire. *Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Si le polynôme caractéristique de h est scindé sur $\mathbf{K}$ et sans racines multiples, alors h est diagonalisable.*

Théorème. *Un endomorphisme $h\colon E \to E$ est triangularisable si et seulement si χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$.*

Démonstration. Si la matrice A d'un endomorphisme $h\colon E \to E$ par rapport à une base est triangulaire et que les coefficients diagonaux de A sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $\chi_h = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_1 - X)$, donc scindé sur K.

Montrons maintenant par récurrence sur $\dim E$ que si $h\colon E \to E$ est un endomorphisme tel que χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$, alors h est triangularisable.

Supposons $\dim E = 0$. Alors $E = \{\mathbf{0}\}$, et donc E n'admet qu'un seul endomorphisme, qui est au même temps l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul, et il n'y a qu'une seule base de E, qui est vide. La matrice de $h = \mathrm{id}_E$ dans la base vide est vide, et, en particulier, elle est diagonale. Donc, h est triangularisable (et même diagonalisable).

Supposons maintenant que $\dim E \geqslant 1$, et que pour tout espace vectoriel F tel que $\dim F < \dim E$, tout endomorphisme de F dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{K}$ est triangularisable.

Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme tel que χ_h soit scindé sur $\mathbf{K}$. Pour terminer la démonstration par récurrence, il suffit de montrer que h est triangularisable.

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ une valeur propre de h. (Il en existe, car χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$ et car $\dim E > 0$.) Posons

$$V = \operatorname{img}(h - \lambda \operatorname{id}_E) = (h - \lambda \operatorname{id}_E)(E).$$

Alors V est un sous-espace de E stable par h, et

$$\dim V \leqslant n - 1$$

d'après le théorème du rang, car $\dim \ker(h - \lambda \operatorname{id}_E) \geqslant 1$.

Posons $g = h|_V \colon V \to V$ la restriction de h sur V. D'après l'hypothèse de récurrence, g est triangularisable, car χ_g divise χ_h et donc χ_g est, lui aussi, scindé sur $\mathbf{K}$.

Soit $\mathcal{A} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$ une base de V telle que la matrice ${}_{\mathcal{A}}[g]_{\mathcal{A}}$ soit triangulaire supérieure. Complètons $\mathcal{A}$ en une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ de E. Alors la matrice ${}_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure. $\square$

Corollaire. *Si $h \colon E \to E$ est un endomorphisme tel que χ_h est scindé sur $\mathbf{K}$, alors $\chi_h(h)$ est nul.*

Corollaire (*Théorème de Cayley-Hamilton*)**.** *Pour toute $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $\chi_A(A)$ est nulle.*

Corollaire (*Théorème de Cayley-Hamilton*)**.** *Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$, et que $h \colon E \to E$ est un endomorphisme, alors $\chi_h(h)$ est nul.*