L'exponentielle d'une matrice carrée, l'exponentielle d'un endomorphisme

Alexey Muranov

2 mai 2025

Dans cette section, toutes les matrices sont à coefficients réels ou complexes, sauf indication contraire. De même, les espaces vectoriels sont réels ou complexes s'il n'y a pas d'autre indication.

Définition. Soit A une matrice carrée. On va définir l'*exponentielle* de A, notée « $\exp A$ » ou « e^A », par la formule :

$$\exp A \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition. *Quelle que soit une matrice carrée A, l'exponentielle de A est bien définie (la série converge).*

Exemples.

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\exp \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{x_n} \end{pmatrix}.$$

Définition. Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On va définir l'*exponentielle* de h, notée « $\exp h$ » ou « e^h », par la formule :

$$\exp h \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}.$$

Proposition. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et que $h\colon E \to E$ est un endomorphisme, alors l'exponentielle de h est bien définie. Si, en plus, $\mathcal{B}$ est une base de E et que A est la matrice de h par rapport à $\mathcal{B}$, alors la matrice de $\exp h$ par rapport à $\mathcal{B}$ est $\exp A$.*

La proposition suivante peut être utilisée pour calculer les coefficients de $\exp A$ lorsque A est diagonalisable :

Proposition. *Si A, B, P sont trois matrices carrées telles que $AP = PB$, alors*

$$(\exp A)P = P(\exp B).$$

En particulier, lorsque P est inversible, on a :

$$\exp(PBP^{-1}) = P(\exp B)P^{-1}.$$

Proposition. *Si A et B sont deux matrices carrées telles que $BA = AB$, alors*

$$\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A).$$

Corollaire. *Pour toute matrice carrée A,*

$$(\exp A)\big(\exp(-A)\big) = I = \big(\exp(-A)\big)(\exp A).$$

Si $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une application dérivable, alors

$$\frac{d}{dt} \exp f(t) = f'(t) \exp f(t) = \big(\exp f(t)\big) f'(t).$$

Si on considère une application dérivable $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ arbitraire, il *n'est pas toujours vrai* que

$$\frac{d}{dt} \exp F(t) = F'(t) \exp F(t) = \big(\exp F(t)\big) F'(t).$$

Déjà, il n'y a pas de raison pour que $F'(t)$ et $\exp F(t)$ commutent toujours. Cependant, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition. *Pour toute matrice carrée A,*

$$d\exp(At) = A\big(\exp(At)\big)dt = \big(\exp(At)\big)A\,dt,$$

et

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \big(\exp(At)\big)A.$$

Cette proposition se généralise ainsi :

Proposition. *Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $F\colon I \to \mathbf{C}^{n\times n}$ est une application dérivable, alors*

$$\frac{d}{dt}\exp F(t) = F'(t)\exp F(t) = \big(\exp F(t)\big)F'(t)$$

pour tout $t \in I$ tel que $F'(t)$ commute avec $F(t)$.

En termes des *différentielles*, on peut exprimer cela ainsi :

$$d\exp A = (dA)\exp A = (\exp A)dA \quad \text{si} \quad (dA)A = A\,dA.$$

Exercice. Soit $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ donnée par la formule $F(t) = \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\exp F(t)$.

(2) Calculer $\dfrac{d}{dt}\exp F(t)$.

(3) Calculer $F'(t)\exp F(t)$.

(4) Calculer $\big(\exp F(t)\big)F'(t)$.

Application aux équations différentielles. Soient $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, et supposons qu'on cherche $F\colon I \to \mathbf{C}^n$ telle que

$$F'(t) = AF(t) \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Alors, si on pose

$$F(t) = \big(\exp(At)\big)G(t),$$

où $G\colon I \to \mathbf{C}$ est la nouvelle inconnue, on trouvera une équation équivalente :

$$G'(t) = \mathbf{0} \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

D'où, l'équation en question équivaut à ce que G soit constante sur I, et à ce que

$$F(t_1) = \Big(\exp\big(A(t_1 - t_0)\big)\Big)F(t_0) \qquad \text{pour tous } t_0, t_1 \in I.$$

Proposition. *Pour toute matrice carrée A,*

$$\det\exp A = \exp\operatorname{tr} A.$$

On peut démontrer cette identité en utilisant la *formule de Jacobi* :

Lemme (*Formule de Jacobi*)**.** *Si $I \subset \mathbf{R}$ est un intervalle et $F\colon I \to \mathbf{C}^{n\times n}$ est une application dérivable, alors*

$$\frac{d}{dt}\det F(t) = \operatorname{tr}\bigl(F'(t)\,{}^{\mathbf{t}}\mathrm{com}\,F(t)\bigr) = \operatorname{tr}\Bigl(\bigl({}^{\mathbf{t}}\mathrm{com}\,F(t)\bigr)F'(t)\Bigr).$$

Démonstration. Posons $F(t) = (f_{i,j}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{1,1}(t) & \cdots & f_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(t) & \cdots & f_{n,n}(t) \end{bmatrix}.$$

Comme l'application déterminant $\mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{C}$ est multilinéaire en colonnes de son argument, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det F(t) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} f_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) & \cdots & f_{1,n}(t) \\ f_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) & \cdots & f_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(t) & f_{n,2}(t) & \cdots & f_{n,n}(t) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f'_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) & \cdots & f_{1,n}(t) \\ f'_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) & \cdots & f_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n,1}(t) & f_{n,2}(t) & \cdots & f_{n,n}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{1,1}(t) & f'_{1,2}(t) & \cdots & f_{1,n}(t) \\ f_{2,1}(t) & f'_{2,2}(t) & \cdots & f_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(t) & f'_{n,2}(t) & \cdots & f_{n,n}(t) \end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + \begin{vmatrix} f_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) & \cdots & f'_{1,n}(t) \\ f_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) & \cdots & f'_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(t) & f_{n,2}(t) & \cdots & f'_{n,n}(t) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

En « développant » chaque déterminant dans cette somme par la colonne des dérivés, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det F(t) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f'_{i,j}(t)\,\mathrm{Cof}_{i,j}\,F(t) \\
&= \operatorname{tr}\bigl(F'(t)\,{}^{\mathbf{t}}\mathrm{com}\,F(t)\bigr) = \operatorname{tr}\Bigl(\bigl({}^{\mathbf{t}}\mathrm{com}\,F(t)\bigr)F'(t)\Bigr).
\end{aligned}$$

□

Démonstration de l'identité $\det\exp A = \exp\operatorname{tr} A$*.* Soit $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Posons

$$f(t) = \det\exp(At) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

D'après la formule de Jacobi, on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \det \exp(At) \\ &= \operatorname{tr}\left(\left({}^{\mathbf{t}}\mathrm{com} \exp(At)\right) \frac{d}{dt} \exp(At) \right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\left(\det \exp(At)\right) \left(\exp(At)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp(At) \right) \\ &= \operatorname{tr}\left(f(t) \left(\exp(At)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp(At) \right) \\ &= f(t) \operatorname{tr}\left(\left(\exp(At)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp(At) \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\operatorname{tr}\left(\left(\exp(At)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp(At) \right) = \operatorname{tr}\left(\left(\exp(At)\right)^{-1} A \exp(At) \right) = \operatorname{tr} A.$$

Ainsi,

$$f'(t) = f(t) \operatorname{tr} A \qquad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

En plus, $f(0) = 1$. D'où, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \exp(t \operatorname{tr} A) = \exp \operatorname{tr}(At).$$

En particulier, $f(1) = \exp \operatorname{tr} A$. Or, $f(1) = \det \exp A$. □

Remarque. La démonstration donnée ci-dessus de l'identité $\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A$ utilisait l'identité

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$$

pour en déduire que

$$\operatorname{tr}\left(\left(\exp(At)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp(At) \right) = \operatorname{tr}\left(\left(\exp(At)\right)^{-1} A \exp(At) \right) = \operatorname{tr} A.$$

Si on considère une application dérivable $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}^{n \times n}$ arbitraire, il *n'est pas toujours vrai* que

$$\frac{d}{dt} \exp F(t) = F'(t) \exp F(t).$$

En revanche, il est toujours possible de démontrer que

$$\operatorname{tr}\left(\left(\exp F(t)\right)^{-1} \frac{d}{dt} \exp F(t) \right) = \operatorname{tr}\left(\left(\exp F(t)\right)^{-1} F'(t) \exp F(t) \right) = \operatorname{tr} F'(t).$$

En termes des *différentielles*, on peut exprimer ce fait par l'identité :

$$\operatorname{tr}\left((\exp A)^{-1} d \exp A \right) = \operatorname{tr}\left((\exp A)^{-1} (dA) \exp A \right) = \operatorname{tr} dA = d \operatorname{tr} A.$$