Polynômes annulateurs

Alexey Muranov

22 avril 2025

Dans cette section, E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbf{K}$.

Pour simplifier les formules, on va s'autoriser à utiliser les éléments de $\mathbf{K}$ comme les endomorphisms *scalaires* de E suivant la règle que $\lambda \in \mathbf{K}$ représente l'endomorphisme $\lambda\,\mathrm{id}_E\colon E \to E$. Ainsi, en particulier, id_E est représenté par 1. On va cependant écrire « id_E » plutôt que « 1 » lorsque $\dim E = 0$, afin d'éviter des formules comme « $0 = 1$ » (si $\dim E = 0$, alors $0\,\mathrm{id}_E = 1\,\mathrm{id}_E$).

Définition. Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit *annulateur* de h si et seulement si P annule h, au sens que $P(h)$ est l'endomorphisme nul, au sens que $P(h)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in E$.

Proposition. *Les polynômes annulateurs d'un endomorphisme $h\colon E \to E$ forment un idéal dans $\mathbf{K}[X]$:*

(1) *la somme et la différence de deux annulateurs sont annulateurs,*

(2) *un multiple d'un annulateur est annulateur,*

(3) *le polynôme nul est annulateur.*

Proposition. *Parmi les polynômes annulateurs d'un endomorphisme h, il y en a qui divisent tous les polynômes annulateurs de h (dans $\mathbf{K}[X]$).*

Définition. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit *annulateur minimal* d'un endomorphisme h si et seulement si P est un annulateur de h qui divise tous les annulateurs de h.

Clairement, parmi les polynômes annulateurs minimaux d'un endomorphisme, il y a un unique polynôme unitaire (avec le coefficient dominant 1).

Définition. L'unique polynôme annulateur minimal unitaire d'un endomorphisme h est dit ***le*** polynôme annulateur minimal de h.

Souvent au lieu de « le polynôme annulateur minimal de h » on dit « le polynôme minimal de h » tout court.

Définition. Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et $\boldsymbol{v} \in E$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit *h-annulateur* de $\boldsymbol{v}$ si et seulement si $P(h)$ annule $\boldsymbol{v}$: $P(h)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

Ainsi, P est un annulateur de h si et seulement si P est un h-annulateur de tout $\boldsymbol{v}$.

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme et $\boldsymbol{v} \in E$. Alors les polynômes h-annulateurs de $\boldsymbol{v}$ forment un idéal dans $\mathbf{K}[X]$.*

Définition. Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme, V un sous-espace de E invariant par h ($h(V) \subset V$), et $\boldsymbol{v} \in E$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit *h-conducteur* de $\boldsymbol{v}$ vers V si et seulement si $P(h)$ envoie $\boldsymbol{v}$ dans V : $P(h)(\boldsymbol{v}) \in V$.

Ainsi, P est un h-annulateur de $\boldsymbol{v}$ si et seulement si P est un h-conducteur de $\boldsymbol{v}$ vers $\{\mathbf{0}\}$.

Proposition. *Soient $h\colon E \to E$ un endomorphisme, V un sous-espace de E invariant par h ($h(V) \subset V$), et $\boldsymbol{v} \in E$. Alors les polynômes h-conducteurs de $\boldsymbol{v}$ vers V forment un idéal dans $\mathbf{K}[X]$.*

Proposition. *Si $\dim E = n$, alors tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur non nul $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg P \leqslant n^2$.*

Idée d'une démonstration. $\dim \mathscr{L}(E, E) = \dim \mathbf{K}^{n\times n} = n^2$. □

Notation. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A sera noté « χ_A ». Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme h sera noté « χ_h ».

Proposition. *Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme tel qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de h par rapport à $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. Alors le polynôme caractéristique de h annule h :*

$$\chi_h(h) = 0$$

(au sens que $\chi_h(h)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{v} \in E$).

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E telle que la matrice A de h par rapport à $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ les coefficients diagonaux de A.

Posons

$$V_0 = \{\mathbf{0}\}, \quad V_1 = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1), \quad V_2 = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2), \quad \ldots,$$
$$V_n = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = E.$$

Alors :

(1) $V_k = V_{k-1} + \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

(2) $h(\boldsymbol{e}_k) \in V_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

(3) $h(V_k) \subset V_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

(4) $P(h)(V_k) \subset V_k$ pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

(5) $h(\boldsymbol{e}_k) - \lambda_k \boldsymbol{e}_k \in V_{k-1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

(6) $(h - \lambda_k)(V_k) \subset V_{k-1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\big((h-\lambda_1)\circ(h-\lambda_2)\circ\cdots\circ(h-\lambda_n)\big)(E)\\
&\qquad = \big((h-\lambda_1)\circ\cdots\circ(h-\lambda_n)\big)(V_n)\\
&\qquad \subset \big((h-\lambda_1)\circ\cdots\circ(h-\lambda_{n-1})\big)(V_{n-1})\\
&\qquad \subset \cdots\\
&\qquad \subset (h-\lambda_1)(V_1)\\
&\qquad \subset V_0 = \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}$$

Posons

$$P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n) \in \mathbf{K}[X].$$

On vient de montrer que

$$P(h)(E) \subset \{\mathbf{0}\}.$$

Ainsi, $P(h)$ est l'endomorphisme nul. Or,

$$\chi_h = \chi_A = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\cdots(\lambda_n - X) = (-1)^n P.$$

D'où, $\chi_h(h)$ est nul. □

Théorème. *Tout endomorphisme de* E *admet un polynôme annulateur non nul* $P \in \mathbf{K}[X]$ *tel que* $\deg P \leqslant \dim E$.

Démonstration. On va passer par la récurrence sur $\dim E$.

Supposons $\dim E = 0$. Alors $E = \{\mathbf{0}\}$, et donc l'endomorphisme identité $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ est nul. Soit $P = 1$. Alors $\deg P = 0$ et $P(h) = \mathrm{id}_E$ est nul pour tout endomorphisme $h\colon E \to E$. (En fait, dans ce cas id_E est le seul endomorphisme de E, et donc l'endomorphisme h ne peut pas être autre que id_E.)

Supposons maintenant que $\dim E \geqslant 1$, et que pour tout espace vectoriel F tel que $\dim F < \dim E$, tout endomorphisme de F admet un annulateur non nul $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg P \leqslant \dim F$.

Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme arbitraire. Pour terminer la démonstration par récurrence, il suffit de montrer que h admet un annulateur non nul $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\deg P \leqslant \dim E$.

Soit $\boldsymbol{v} \in E$ un vecteur non nul. Posons

$$\begin{aligned}
V_1 &= \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}),\\
V_2 &= V_1 + h(V_1) = \operatorname{Vect}\big(\boldsymbol{v},\ h(\boldsymbol{v})\big),\\
V_3 &= V_2 + h(V_2) = \operatorname{Vect}\big(\boldsymbol{v},\ h(\boldsymbol{v}),\ h(h(\boldsymbol{v}))\big),\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Alors

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \qquad \text{et} \qquad 1 = \dim V_1 \leqslant \dim V_2 \leqslant \cdots .$$

En plus, $\dim V_k \leqslant \min\{n, k\}$ pour tout k.

Soit $r \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\dim V_{r+1} = \dim V_r = r$$

(clairement, un tel r existe et est unique). Alors

$$h^r(\boldsymbol{v}) \in V_{r+1} = V_r = \operatorname{Vect}\big(\boldsymbol{v},\ \ldots,\ h^{r-1}(\boldsymbol{v})\big).$$

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbf{K}$ tels que

$$h^r(\boldsymbol{v}) = \alpha_0\boldsymbol{v} + \cdots + \alpha_{r-1}h^{r-1}(\boldsymbol{v}).$$

Posons

$$R = X^r - \alpha_{r-1}X^{r-1} - \cdots - \alpha_1 X - \alpha_0 \in \mathbf{K}[X].$$

Alors

$$R(h)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$R(h)\big(h^k(\boldsymbol{v})\big) = \big(R(h) \circ h^k\big)(\boldsymbol{v}) = \big(h^k \circ R(h)\big)(\boldsymbol{v}) = h^k\big(R(h)(\boldsymbol{v})\big) = h^k(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

En particulier,

$$\ker R(h) \supset V_r, \quad \text{et donc} \quad \dim\ker R(h) \geqslant r.$$

Par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{img} R(h) \leqslant \dim E - r.$$

Posons

$$U = \operatorname{img} R(h) = R(h)(E).$$

Le sous-espace U est stable par h car $h \circ R(h) = R(h) \circ h$, et donc

$$\begin{aligned} h(U) &= h\big(R(h)(E)\big) = \big(h \circ R(h)\big)(E) = \big(R(h) \circ h\big)(E) = R(h)\big(h(E)\big) \\ &\subset R(h)(E) = U. \end{aligned}$$

Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non nul qui annule l'endomorphisme $h|_U \colon U \to U$ (la restriction de h sur U) tel que

$$\deg Q \leqslant \dim U \leqslant \dim E - r$$

(un tel Q existe d'après l'hypothèse de récurrence). Alors pour, pour tout $\boldsymbol{u} \in U$,

$$Q(h)(\boldsymbol{u}) = Q(h|_U)(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}.$$

Posons

$$P = QR.$$

Alors,

$$\deg P = \deg Q + \deg R \leqslant \dim E - r + r = \dim E,$$

et pour tout $\boldsymbol{w} \in E$,

$$P(h)(\boldsymbol{w}) = \big(Q(h) \circ R(h)\big)(\boldsymbol{w}) = Q(h)\big(R(h)(\boldsymbol{w})\big) = \mathbf{0},$$

car $R(h)(\boldsymbol{w}) \in R(h)(E) = U$. Ainsi, P annule h et $\deg P \leqslant \dim E$. $\square$