Sous-espaces caractéristiques

Alexey Muranov

18 juin 2025

Dans cette section, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie.

Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors

$$\{\mathbf{0}\} = \ker h^0 \subset \ker h^1 \subset \ker h^2 \subset \cdots$$

D'où,

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \ker h^k = \sum_{k\in\mathbf{N}} \ker h^k$$

est un sous-espace vectoriel de E. On peut facilement voir que c'est le plus grand sous-espace de E sur lequel la restriction de h est nilpotente. De même, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$,

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \ker(h-\lambda)^k = \sum_{k\in\mathbf{N}} \ker(h-\lambda)^k$$

est un sous-espace vectoriel de E, et c'est le plus grand sous-espace de E sur lequel la restriction de $h-\lambda$ est nilpotente.

Définition. Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. On va appeler le sous-espace

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \ker(h-\lambda)^k$$

le *sous-espace caractéristique*,[1] ou le *sous-espace spectral*, de h associé à λ.

Il n'y a pas de notation vraiment standard pour les sous-espaces caractéristiques. Ici on va adopter la suivante :

Notation. Si $\lambda \in \mathbf{K}$ et $h\colon E \to E$ est un endomorphisme, on va noter « $N_\lambda(h)$ » le sous-espace caractéristique de h associé à λ, et on va noter « $K_\lambda(h)$ » le sous-espace propre de h associé à λ.

[1] Le terme « sous-espace caractéristique » au sens défini semble être assez courant. Cependant, le mot « caractéristique » est abusé (sur-utilisé) dans la terminologie mathématique, et, en particulier, « sous-espace caractéristique » dans d'autres textes peut signifier autre chose.

Ainsi :

$$K_\lambda(h) \overset{\text{déf}}{=} \ker(h-\lambda), \qquad N_\lambda(h) \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \ker(h-\lambda)^k.$$

Clairement, $K_\lambda(h) \subset N_\lambda(h)$.

Proposition. *Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors*

$$\begin{aligned} N_\lambda(h) \neq \{\mathbf{0}\} \quad &\Leftrightarrow \quad K_\lambda(h) \neq \{\mathbf{0}\} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \textit{ est une valeur propre de } h. \end{aligned}$$

Lemme. *Soient $\mu, \lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\mu \neq \lambda$, $h\colon E \to E$ un endomorphisme, et $p, q \in \mathbf{N}$. Alors*

$$\ker(h-\mu)^p \cap \ker(h-\lambda)^q = \{\mathbf{0}\}.$$

Démonstration. Comme $\ker(h-\lambda)^q$ est stable par $h-\mu$, il suffit de montrer que

$$\ker(h-\mu) \cap \ker(h-\lambda)^q = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\boldsymbol{v} \in \ker(h-\mu) \cap \ker(h-\lambda)^q$. Alors $h(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$, et donc

$$\mathbf{0} = (h-\lambda)^q(\boldsymbol{v}) = (\mu-\lambda)^q\boldsymbol{v}.$$

D'où, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. □

La proposition suivante résulte immédiatement de ce lemme :

Proposition. *Soient $\mu, \lambda \in \mathbf{K}$ tels que $\mu \neq \lambda$, et soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors*

$$N_\mu(h) \cap N_\lambda(h) = \{\mathbf{0}\}.$$

Autrement dit, $N_\mu(h)$ et $N_\lambda(h)$ forment une somme directe lorsque $\mu \neq \lambda$:

$$N_\mu(h) + N_\lambda(h) = N_\mu(h) \oplus N_\lambda(h).$$

Théorème. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ deux à deux distincts et $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors les sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_1}(h)$, …, $N_{\lambda_m}(h)$ forment une somme directe :*

$$\sum_{k=1}^m N_{\lambda_k}(h) = \bigoplus_{k=1}^m N_{\lambda_k}(h).$$

Esquisse d'une démonstration. Soient $\boldsymbol{v}_k \in N_{\lambda_k}(h)$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$ tels que

$$\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}.$$

Montrons que $\boldsymbol{v}_1 = \dots = \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, soit $p_k \in \mathbf{N}$ tel que $\boldsymbol{v}_k \in \ker(h - \lambda_k)^{p_k}$:

$$(h - \lambda_k)^{p_k}(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}.$$

Puis, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, définissons $P_k \in \mathbf{K}[X]$ ainsi :

$$P_k = \prod_{j \in \{1,\dots,m\} \setminus \{k\}} (X - \lambda_j)^{p_j}.$$

Alors, pour tous $j, k \in \{1, \dots, m\}$,

$$P_k(h)(\boldsymbol{v}_j) \neq \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad j = k \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v}_j \neq \mathbf{0}.$$

Donc, pour tous $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} P_k(h)(\boldsymbol{v}_k) &= P_k(h)(\boldsymbol{v}_1) + \dots + P_k(h)(\boldsymbol{v}_m) \\ &= P_k(h)(\boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_m) = P_k(h)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

D'où, $\boldsymbol{v}_1 = \dots = \boldsymbol{v}_m = \mathbf{0}$. □

Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et pour un endomorphisme h, la multiplicité géométrique de λ comme valeur propre de h est $\dim K_\lambda(h)$ par définition. Le théorème suivant fournit une interprétation « géométrique » de la multiplicité algébrique :

Lemme. *Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors*

$$\chi_h = \chi_h(X) = \chi_{h-\lambda}(X - \lambda).$$

Démonstration.

$$\chi_h = \det(h - X) = \det\big((h - \lambda) - (X - \lambda)\big) = \chi_{h-\lambda}(X - \lambda).$$ □

Lemme. *Soient $\lambda \in \mathbf{K}$, $h\colon E \to E$ un endomorphisme, et $n = \dim E \in \mathbf{N}$. Supposons que l'endomorphisme $h - \lambda$ est nilpotent. Alors $\chi_h = (X - \lambda)^n$.*

Théorème. *Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Alors la dimension du sous-espace caractéristique $N_\lambda(h)$ est la multiplicité algébrique de λ comme valeur propre de h.*

Démonstration. Posons

$$U = N_\lambda(h).$$

Soit V un sous-espace supplémentaire de U dans E :

$$E = U \oplus V.$$

Soient $p\colon E \to U$ et $q\colon E \to V$ les projecteurs sur U et sur V parallèlement à V et à U :

$$p(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \quad \text{et} \quad q(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \quad \text{pour tous} \quad \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{v} \in V.$$

Soient $f\colon U \to U$ et $g\colon V \to V$ les restrictions de $p \circ h$ et de $q \circ h$ sur U et sur V :

$$f = (p \circ h)|_U \quad \text{et} \quad g = (q \circ h)|_V.$$

Comme U est stable par h, on a :

$$f = h|_U.$$

Posons $m = \dim U$ et $n = \dim V$. Soit $\mathcal{A} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{m+n})$ une base de E telle que $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m)$ soit une base de U, et $\mathcal{C} = (\boldsymbol{e}_{m+1}, \dots, \boldsymbol{e}_{m+n})$ soit une base de V.

Comme U est stable par h, la matrice A de h par rapport à $\mathcal{A}$ est triangulaire par block à 2 blocks :

$$A = \begin{bmatrix} B & * \\ & C \end{bmatrix},$$

où $B \in \mathbf{K}^{m\times m}$ est la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}$, et $C \in \mathbf{K}^{n\times n}$ est la matrice de g par rapport à $\mathcal{C}$. Ainsi,

$$\chi_h = \chi_A = \chi_B \chi_C = \chi_f \chi_g.$$

D'après le lemme précédent, $\chi_f = (X-\lambda)^m$. Il ne reste qu'à montrer que $\chi_g(\lambda) \neq 0$.

Supposons que $\chi_g(\lambda) = 0$, et donc que λ soit une valeur propre de g. On va en déduire une contradiction.

Soit $\boldsymbol{v} \in V$ un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ :

$$g(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}.$$

Alors

$$h(\boldsymbol{v}) = p\big(h(\boldsymbol{v})\big) + q\big(h(\boldsymbol{v})\big) = p\big(h(\boldsymbol{v})\big) + g(\boldsymbol{v}) = p\big(h(\boldsymbol{v})\big) + \lambda \boldsymbol{v},$$

et donc

$$(h-\lambda)(\boldsymbol{v}) = p(h(\boldsymbol{v})) \in U = N_\lambda(h).$$

D'où,

$$\boldsymbol{v} \in N_\lambda(h) = U.$$

Donc, $\boldsymbol{v} \in U \cap V$. Vu que $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, cela contredit la condition $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. □

On peut facilement déduire le théorème suivant des deux théorèmes précédents.

Théorème. *Soit $h\colon E \to E$ un endomorphisme. Supposons que le polynôme caractéristique de h est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{K}\,:\,\chi_h(\lambda)=0} N_\lambda(h) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{K}} N_\lambda(h).$$

Exercice. Démontrer ce théorème.