Trace

Alexey Muranov

27 juin 2025

1 Trace d'une matrice carré

Dans cette section, I_n est la matrice identité $n \times n$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut la noter « I » tout simplement.

Notation. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ sera noté « $\mathbf{K}^{m\times n}$ ».[1]

On va provisoirement adopter la définition suivante de la *trace* d'une matrice carrée :

Définition. La *trace* d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ sera notée « $\operatorname{tr} A$ » et définie comme la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\operatorname{tr} A \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Pour développer la théorie de la trace, on aura besoin de temps en temps de la traiter comme une application $\mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ avec n et $\mathbf{K}$ donnés. Pour cela, on va provisoirement adopter la notation suivante :

Notation. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on va noter « tr_n » l'application $\mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ qui à chaque $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ associe sa trace : $\operatorname{tr}_n A \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{tr} A$.

On pourrait utiliser la notation encore plus explicite « $\operatorname{tr}_{n,\mathbf{K}}$ », mais normalement « tr_n » doit suffire, tant qu'on suppose chaque fois que $\mathbf{K}$ est donné d'avance.

Proposition. *L'application* $\operatorname{tr}_n \colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ *est linéaire :*

(1) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *pour tous* $A, B \in \mathbf{K}^{n\times n}$,

(2) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tous* $\alpha \in \mathbf{K}$ *et* $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$.

Proposition. *Pout toute* $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$, $\operatorname{tr} {}^{\mathbf{t}}\!A = \operatorname{tr} A$.

Proposition. *Pour tous* $m, n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathbf{K}^{m\times n}$ *et* $B \in \mathbf{K}^{n\times m}$, $\operatorname{tr} BA = \operatorname{tr} AB$.

[1] Cette notation est utilisée, par exemple, par Sounders Mac Lane et Garrett Birkhoff dans leur livre *Algebra* (1999, 3e édition).

Pour simplifier les formules, on va maintenant identifier (de manière canonique) $\mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K}^{n\times 1}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, on va identifier $\mathbf{K}$ avec $\mathbf{K}^{1\times 1}$. Ainsi, on admet que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$,

$$(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{n\times 1} = \mathbf{K}^n,$$

$$^{\mathbf{t}}(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{1\times n},$$

et, en particulier, pour tout $a \in \mathbf{K}$,

$$^{\mathbf{t}}a = a \in \mathbf{K}^{1\times 1} = \mathbf{K}.$$

Proposition. *Pour tout* $a \in \mathbf{K}^{1\times 1} = \mathbf{K}$, $\operatorname{tr} a = a$.

Proposition. *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n\times 1}$,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{v} \cdot {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u}) = {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v},$$

où l'opération $(\cdot)$ *est la multiplication usuelle de matrices.*

Proposition. *Soit* $\tau\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ *une application linéaire telle que pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n\times 1}$,

$$\tau(\boldsymbol{v} \cdot {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u}) = {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Alors $\tau = \operatorname{tr}_n$.

Idée d'une démonstration. Toute matrice s'écrit comme une somme de matrices de rang 1. (En fait, une matrice de rang r s'écrit comme la somme de r matrices de rang 1.) Toute matrice dans $\mathbf{K}^{n\times n}$ de rang 1 s'écrit comme $\boldsymbol{v} \cdot {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n\times 1}$. D'où, on a $\tau(A) = \operatorname{tr}(A)$ pour toute $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ de rang 1, et, par linéarité, aussi pour toute $A \in \mathbf{K}^{n\times n}$ de tout rang. $\square$

Corollaire. *L'application* $\operatorname{tr}_n\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ *est complètement déterminée (caractérisée) par ses propriétés suivantes :*

(1) tr_n *est linéaire,*

(2) $\operatorname{tr}_n(\boldsymbol{v} \cdot {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u}) = {}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{K}^n = \mathbf{K}^{n\times 1}$.

Remarque. On peut adopter la caractérisation de l'application tr_n donnée dans le dernier corollaire comme sa *définition*, et ainsi définir les traces des matrices carrées.

Définition. On va dire qu'une application linéaire $\tau\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ possède la *propriété de trace* si et seulement si

$$\tau(BA) = \tau(AB) \qquad \text{pour tous } A, B \in \mathbf{K}^{n\times n}.$$

D'après une proposition donnée ci-dessus, l'applicaton trace $\mathrm{tr}_n\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ possède la propriété de trace.

Remarque. Parfois en algèbre le terme *trace* est utilisé pour parler d'une n'importe quelle applications linéaire $\mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ qui possède la propriété de trace.

Proposition. *L'ensemble des applications linéaires $\mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ qui possèdent la propriété de trace est un espace vectoriel :*

(1) *si $\tau_1, \tau_2\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ sont linéaires et possèdent la propriété de trace, il en est de même pour $\tau_1 + \tau_2$,*

(2) *si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\tau\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ est linéaire et possède la propriété de trace, il en est de même pour $\alpha\tau$,*

(3) *l'application nulle $\mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ est linéaire et possède la propriété de trace.*

Proposition. *Soit $\tau\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ une application linéaire qui possède la propriété de trace. Supposons que $\tau(I) = 0$. Alors τ est nulle.*

Esquisse d'une démonstration. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, posons $E_{i,j} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) est 1 et tous les autres sont 0. Posons $O \in \mathbf{K}^{n\times n}$ la matrice nulle. Alors,

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k, \\ O & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme les matrices $E_{i,j}$ engendrent $\mathbf{K}^{n\times n}$ comme un espace vectoriel, il suffit de montrer que $\tau(E_{i,j}) = 0$ pour tous i, j.

Pour tous i, j, on a :

$$\tau(E_{i,i}) = \tau(E_{i,j}E_{j,i}) = \tau(E_{j,i}E_{i,j}) = \tau(E_{j,j}).$$

En plus,

$$\tau(I) = \tau(E_{1,1} + \cdots + E_{n,n}) = \tau(E_{1,1}) + \cdots + \tau(E_{n,n}).$$

D'où, pour tout i,

$$\tau(E_{i,i}) = \frac{\tau(I)}{n} = 0.$$

Pour $i \neq j$,

$$\tau(E_{i,j}) = \tau(E_{i,j}E_{j,j}) = \tau(E_{j,j}E_{i,j}) = \tau(O) = 0.$$

Ainsi, τ est nulle. □

Remarque. Dans la dernière proposition, on peut remplacer la matrice identité I par une n'importe quelle matrice non nulle P telle que $P^2 = P$.

Proposition. *Soient $\rho, \sigma\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ deux applications linéaires qui possèdent la propriété de trace. Alors*

$$\rho(B)\sigma(A) = \rho(A)\sigma(B) \qquad \text{pour tous } A, B \in \mathbf{K}^{n\times n}.$$

Cette proposition résulte immédiatement de la proposition précédente et du lemme suivant :

Lemme. *Soient S un ensemble non vide et Φ un ensemble d'applications $S \to \mathbf{K}$ qui est un espace vectoriel au sens que :*

(1) *si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, alors $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Phi$,*

(2) *si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\varphi \in \Phi$, alors $\alpha\varphi \in \Phi$,*

(3) *l'application nulle $S \to \mathbf{K}$ est dans Φ.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *il y a un élément $e \in S$ tel que pour toute $\varphi \in \Phi$, si $\varphi(e) = 0$, alors φ est nulle,*

(2) $\dim \Phi \leqslant 1$,

(3) *pour tous $\chi, \psi \in \Phi$ et pour tous $s, t \in S$, $\chi(t)\psi(s) = \chi(s)\psi(t)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que (1) implique (2) et (3).

Admettons (1), et soit alors $e \in S$ tel que pour toute $\varphi \in \Phi$, si $\varphi(e) = 0$, alors φ est nulle.

Pour montrer (2), considérons l'application $\varepsilon\colon \Phi \to \mathbf{K}$ définie par $\varepsilon(\varphi) = \varphi(e)$. Elle est linéaire et injective (car son noyau est nul). Donc, $\dim \Phi \leqslant \dim \mathbf{K} = 1$.

Pour montre (3), considérons $\chi, \psi \in \Phi$ arbitraires et montrons que, pour tous $s, t \in S$, $\chi(t)\psi(s) = \chi(s)\psi(t)$.

Pour commencer, observons que

$$\chi(e)\psi(e) = \chi(e)\psi(e).$$

(Il n'y a pas de faute de frappe ici : les deux membres de cette égalité sont identiques.)

On va maintenant montrer que

$$\chi(e)\psi(s) = \chi(s)\psi(e) \qquad \text{pour tout } s \in S.$$

Pour cela, posons

$$\varphi(s) = \chi(e)\psi(s) - \chi(s)\psi(e) \qquad \text{pour tout } s \in S.$$

Il suffit de montrer que φ est nulle. Or, $\varphi \in \Phi$ et $\varphi(e) = 0$, d'où, φ est nulle.

Enfin, soit $s \in S$ arbitraire, et posons

$$\varphi(t) = \chi(t)\psi(s) - \chi(s)\psi(t) \qquad \text{pour tout } t \in S.$$

Pour terminer la déduction de (3), il suffit de montrer que φ est nulle. Or, $\varphi \in \Phi$ et $\varphi(e) = 0$, d'où, φ est nulle.

Montrons que (2) implique (1). Admettons (2). Si $\dim \Phi = 0$, alors (1) est satisfaite avec un n'importe quel choix de $e \in S$. Supposons $\dim \Phi = 1$, alors soit χ un générateur de Φ, et soit $e \in S$ tel que $\chi(e) \neq 0$. Si $\psi = \alpha\chi \in \Phi$, $\alpha \in \mathbf{K}$, et que $\psi(e) = 0$, alors $\alpha = 0$ et ψ est nulle. Donc, (1) est satisfaite.

Montrons que (3) implique (1). Admettons (3). Si $\dim \Phi = 0$, alors (1) est satisfaite avec un n'importe quel choix de $e \in S$. Supposons $\dim \Psi > 0$, alors soit χ un élément non nul de Φ, et soit $e \in S$ tel que $\chi(e) \neq 0$. Alors, pour tous $\psi \in \Phi$ et $s \in S$,

$$\psi(s) = \frac{\chi(s)\psi(e)}{\chi(e)}.$$

Donc, si $\psi(e) = 0$, alors $\psi(s) = 0$ pour tout $s \in S$. Ainsi, (1) est satisfaite. □

Corollaire. *Soit $\tau\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ une application linéaire qui possède la propriété de trace. Alors*

$$\tau(A) = \frac{\tau(I)\operatorname{tr} A}{\operatorname{tr} I} = \frac{\tau(I)}{n}\operatorname{tr} A \qquad \textit{pour tout } A \in \mathbf{K}^{n\times n}.$$

Remarque. La famille des applications $\operatorname{tr}_n\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$, $n \in \mathbf{N}$, est complètement caractérisée par les propriétés :

(1) $\operatorname{tr}_n\colon \mathbf{K}^{n\times n} \to \mathbf{K}$ est linéaire pour tout $n \in \mathbf{N}$,

(2) $\operatorname{tr}_n BA = \operatorname{tr}_m AB$ pour tous $m, n \in \mathbf{N}$, $A \in \mathbf{K}^{m\times n}$ et $B \in \mathbf{K}^{n\times m}$,

(3) $\operatorname{tr}_1 a = a$ pour tout $a \in \mathbf{K}^{1\times 1} = \mathbf{K}$.

2 Trace d'un endomorphisme

SECTION-BROUILLON