

Analyse dans \mathbb{R}^n , chapitre III

Alexey Muranov

14 juin 2025

Table des matières

III. Calcul intégral	1
III.1.  Mesure de Jordan	1
III.2.  Intégrale de Riemann	2
III.3.  Intégrales multiples classiques	5
III.4.  Théorème de Fubini	8
III.5.  Changement de variables	9
III.6.  Courbes, surfaces, variétés	9
III.7.  Mesure de Jordan sur les courbes	9
III.8.  Mesure de Jordan sur les surfaces	9
III.9.  Intégrales curvilignes du premier type	9
III.10.  Intégrales de surface du premier type	10

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International”.



(5) Soient I_1, \dots, I_n des intervalles bornés de \mathbf{R} de longueurs a_1, \dots, a_n . Posons

$$P = I_1 \times \dots \times I_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n \}.$$

Alors P est Jordan mesurable, et

$$m(P) = a_1 \cdots a_n.$$

Pour transformer ces propriétés en une définition de la *mesurabilité* et de la *mesure de Jordan*, il suffit d'ajouter deux conditions suivantes :

- (1) Un ensemble n'est Jordan mesurable que si sa mesurabilité de Jordan résulte des propriétés données ci-dessus.
- (2) La mesure de Jordan d'un ensemble est définie si et seulement si cet ensemble est Jordan mesurable.

Définition. La *frontière* d'une partie A de \mathbf{R}^n est l'ensemble des points $X \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout voisinage V de X dans \mathbf{R}^n , $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap (\mathbf{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

Notation. La frontière de A sera notée « ∂A ».¹

Théorème. Un ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ est Jordan mesurable si et seulement si

- (1) A est borné et
- (2) ∂A est de mesure nulle.

[...]

III.2. Intégrale de Riemann

SECTION-BROUILLON

Si A est une partie Jordan mesurable de \mathbf{R}^n , alors certaines fonctions $A \rightarrow \mathbf{R}$ sont dites *Riemann intégrables*. À toute fonction Riemann intégrable $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ on associe un nombre réel dit l'*intégrale de Riemann* de f (sur A).

Une fonction $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *Riemann intégrable* sur une partie Jordan mesurable $B \subset A$ si et seulement si la restriction de f sur B est Riemann intégrable, et dans ce cas, l'intégrale de Riemann de la restriction $f|_B$ est dite l'*intégrale de Riemann* de f sur B .

Notation. [...]

¹ Le symbole « ∂ » utilisé ici est le même que dans les notations traditionnelles pour les différentielles et les dérivées partielles. Selon une opinion répandue, il y a des similarités entre les deux usages. Cependant, cette coïncidence de notation est sans grande importance.

III. Calcul intégral

III.1. Mesure de Jordan

SECTION-BROUILLON

Certaines parties bornées de \mathbf{R}^n sont dites *Jordan mesurables*. À toute partie Jordan mesurable $A \subset \mathbf{R}^n$ on associe un nombre réel positif dit la *mesure de Jordan* de A .

Notation. On va noter la mesure de Jordan de $A \subset \mathbf{R}^n$ par « $m(A)$ ».

Propriétés fondamentales de la mesurabilité de Jordan. Fixons un nombre naturel n . Dans les énoncés des propriétés suivantes, on va écrire « Jordan mesurable » tout court au lieu de « Jordan mesurable dans \mathbf{R}^n ».

(1) L'ensemble vide \emptyset est Jordan mesurable, et

$$m(\emptyset) = 0.$$

(2) Si A et B sont Jordan mesurables, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont tous Jordan mesurables, et

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B).$$

(3) Soit A une partie d'un ensemble Jordan mesurable. Posons

$$m^*(A) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \inf\{ m(B) \mid B \supset A \text{ et } B \text{ est Jordan mesurable} \},$$

$$m_*(A) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup\{ m(B) \mid B \subset A \text{ et } B \text{ est Jordan mesurable} \}.$$

Si $m_*(A) = m^*(A)$, alors A est Jordan mesurable, et

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A).$$

(4) Soit $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles Jordan mesurables telle que si $i, j \in \mathbf{N}$ et $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$. Posons

$$B = \bigsqcup_{i \in \mathbf{N}} A_i.$$

En général, B n'est pas obligé d'être Jordan mesurable. Cependant, si B est Jordan mesurable, alors

$$m(B) = \sum_{i \in \mathbf{N}} m(A_i).$$

Propriétés fondamentales de l'intégrabilité de Riemann. [...](1) Pour toute fonctions f ,

$$\int_{X \in \emptyset} f(X) dV = 0.$$

(2) Si A et B sont deux ensembles Jordan mesurables et f est une fonction Riemann intégrable sur A et sur B , alors f est Riemann intégrable sur $A \cup B$, sur $A \cap B$, sur $A \setminus B$ et sur $B \setminus A$, et

$$\int_{X \in A \cup B} f(X) dV + \int_{X \in A \cap B} f(X) dV = \int_{X \in A} f(X) dV + \int_{X \in B} f(X) dV.$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\int_{X \in A \cup B} f(X) dV = \int_{X \in A} f(X) dV + \int_{X \in B} f(X) dV.$$

(3) Si f et g sont Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A , alors $f + g$ est aussi Riemann intégrable sur A , et

$$\int_{X \in A} (f(X) + g(X)) dV = \int_{X \in A} f(X) dV + \int_{X \in A} g(X) dV.$$

Si f est Riemann intégrable sur un ensemble Jordan mesurable A , alors, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, αf est aussi Riemann intégrable sur A , et

$$\int_{X \in A} \alpha f(X) dV = \alpha \int_{X \in A} f(X) dV.$$

(4) Si f est Riemann intégrable sur un ensemble Jordan mesurable A , et que $f(X) \geq 0$ pour tout $X \in A$, alors

$$\int_{X \in A} f(X) dV \geq 0.$$

(5) Si f et g sont Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A , alors $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont aussi Riemann intégrables sur A .(6) Soient A un ensemble Jordan mesurable et f une fonction à valeurs réelles définie sur A qui est majorée et minorée sur A par des fonctions Riemann intégrables sur A . Posons

$$\int_{X \in A}^* f(X) dV \stackrel{\text{déf}}{=} \inf \left\{ \int_{X \in A} g(X) dV \mid g \geq f \text{ et } g \text{ est Riemann intégrable} \right\},$$

$$\int_{*X \in A} f(X) dV \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \left\{ \int_{X \in A} g(X) dV \mid g \leq f \text{ et } g \text{ est Riemann intégrable} \right\}.$$

Si $\int_{X \in A}^* f(X) dV = \int_{*X \in A} f(X) dV$, alors f est Riemann intégrable, et

$$\int_{X \in A} f(X) dV = \int_{X \in A}^* f(X) dV = \int_{*X \in A} f(X) dV.$$

(7) Soit $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable de fonctions à valeurs positifs et Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A . Posons

$$g(X) = \sum_{i \in \mathbf{N}} f_i(X).$$

En général, g n'est pas obligée d'être Riemann intégrable sur A . Cependant, si g est Riemann intégrable sur A , alors

$$\int_{X \in A} g(X) dV = \sum_{i \in \mathbf{N}} \int_{X \in A} f_i(X) dV.$$

(8) Si A est un ensemble Jordan mesurable, alors

$$\int_{X \in A} dV = \int_{X \in A} 1 dV = m(A).$$

Pour transformer ces propriétés en une définition de l'intégrabilité et de l'intégrale de Riemann, il suffit d'ajouter deux conditions suivantes :

(1) Une fonction n'est Riemann intégrable que si sa intégrabilité de Riemann résulte des propriétés données ci-dessus.

(2) L'intégrale de Riemann d'une fonction sur un ensemble est définie si et seulement si cette fonction est Riemann intégrable sur cet ensemble (qui doit être Jordan mesurable).

Théorème. Soit $B \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble Jordan mesurable. Alors une fonction $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ est Riemann intégrable (sur B) si et seulement si(1) f est bornée et(2) $\{X \in B \mid f \text{ n'est pas continue en } X\}$ est de mesure nulle.

[...]

III.3. $\int\int$ Intégrales multiples classiques

SECTION-BROUILLON

[...]

Dans l'expression « $\iint f(x, y) dx dy$ », il est entendu que

$$dx dy = |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|,$$

où

$$d_1x = dx \geq 0, \quad d_2x = 0, \quad d_1y = 0, \quad d_2y = dy \geq 0.$$

Remarque. Au lieu de « d_1 » et « d_2 », on peut fixer et utiliser d'autres symboles. Par exemple, si on choisit « d » et « e », on aura « $dx ey$ ». Traditionnellement, plutôt que « d_1 » et « d_2 », on utilisait différentes écritures de la lettre « d » ou des lettres similaires, comme « δ ».^{2 3 4 5}

Si on veut admettre les valeurs quelconques de $d_1P = (d_1x, d_1y) \in \mathbf{R}^2$ et de $d_2P = (d_2x, d_2y) \in \mathbf{R}^2$, il faut écrire « $|(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|$ » à la place de « $dx dy$ » (où « dx » veut dire d_1x et « dy » veut dire d_2y). En effet, $|(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|$ est l'aire du parallélogramme dont deux côtés orientés représentent les vecteurs $d_1P = (d_1x, d_1y)$ et $d_2P = (d_2x, d_2y)$. Dans le cas où $d_1x = dx \geq 0$, $d_2x = 0$, $d_1y = 0$, $d_2y = dy \geq 0$, ce parallélogramme est rectangle d'aire $dx dy$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \iint f(x, y) |dx dy| \\ &= \iint f(x, y) |(d_1x)(d_2y)| \\ &= \iint f(x, y) |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|, \end{aligned}$$

où

- dans la première expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx \geq 0, \quad d_2x = 0, \quad d_1y = 0, \quad d_2y = dy \geq 0,$$

² Josiah Willard GIBBS et Edwin Bidwell WILSON. *Vector analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics.* Founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, Ph.D., LL.D. Anglais. New Haven, CT : Yale University, 1901. xviii+436. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_Analysis, p. 188.

³ Hermann WEYL. "Reine Infinitesimalgeometrie". Allemand. In : *Mathematische Zeitschrift* (sept. 1918), p. 384-411. ISSN : 0025-5874. DOI : 10.1007/BF01199420. URL : <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01199420>, p. 387.

⁴ Élie CARTAN. *La géométrie des espaces de Riemann.* Paris : Gauthier-Villars, 1925. 61 p. URL : <https://eudml.org/doc/192543>, p. 13.

⁵ Élie CARTAN. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Paris : Hermann, 1945. 215 p. URL : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3385132c/>, p. 36.

- dans la seconde expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx, \quad d_2x = 0, \quad d_1y = 0, \quad d_2y = dy,$$

- dans la dernière expression de l'intégrale, on ne fait aucune hypothèse implicite sur les valeurs de « d_1x », « d_2x », « d_1y », « d_2y ».

En utilisant la notion du déterminant d'une matrice carrée, on a :

$$(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x) = \det \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix}.$$

Si $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une famille de n éléments d'un espace vectoriel n -dimensionnel euclidien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire) orienté, alors on peut définir le *déterminant* de cette famille, noté « $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ », de manière que si on forme la matrice des coordonnées des vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ par rapport à une n'importe quelle base ortho-normée directe, le déterminant de cette matrice sera $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Dans le cas de l'espace vectoriel \mathbf{R}^2 muni de son produit scalaire canonique et de son orientation canonique, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, alors

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Ainsi, en posant $P = (x, y)$, $d_1P = (d_1x, d_1y)$ et $d_2P = (d_2x, d_2y)$, on a :

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \iint f(x, y) |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)| \\ &= \iint f(P) |\det(d_1P, d_2P)|. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les valeurs de « x » et de « y » sont exprimées en termes des valeurs de « s » et « t » :

$$x = \chi(s, t), \quad y = \psi(s, t).$$

Posons aussi

$$\Phi(s, t) = (\chi(s, t), \psi(s, t)).$$

Ainsi,

$$(x, y) = \Phi(s, t).$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} d_1x &= d_1(\chi(s, t)) = \chi'(s, t)(d_1s, d_1t) = \frac{\partial \chi(s, t)}{\partial s} d_1s + \frac{\partial \chi(s, t)}{\partial t} d_1t \\ &= \frac{\partial x}{\partial s} d_1s + \frac{\partial x}{\partial t} d_1t. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} d_1x &= \frac{\partial x}{\partial s}d_1s + \frac{\partial x}{\partial t}d_1t, & d_1y &= \frac{\partial y}{\partial s}d_1s + \frac{\partial y}{\partial t}d_1t, \\ d_2x &= \frac{\partial x}{\partial s}d_2s + \frac{\partial x}{\partial t}d_2t, & d_2y &= \frac{\partial y}{\partial s}d_2s + \frac{\partial y}{\partial t}d_2t. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (d_1x)(d_2y) &= \left(\frac{\partial x}{\partial s}d_1s + \frac{\partial x}{\partial t}d_1t \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s}d_2s + \frac{\partial y}{\partial t}d_2t \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} (d_1s)(d_2s) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} (d_1t)(d_2s) \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} (d_1s)(d_2t) + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} (d_1t)(d_2t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (d_1y)(d_2x) &= \left(\frac{\partial y}{\partial s}d_1s + \frac{\partial y}{\partial t}d_1t \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s}d_2s + \frac{\partial x}{\partial t}d_2t \right) \\ &= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} (d_1s)(d_2s) + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} (d_1t)(d_2s) \\ &\quad + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} (d_1s)(d_2t) + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} (d_1t)(d_2t). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} (d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x) &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} (d_1t)(d_2s) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} (d_1s)(d_2t) \\ &\quad - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} (d_1t)(d_2s) - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} (d_1s)(d_2t) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \left((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s) \right) \\ &= \det J_{\Phi}(s, t) \left((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s) \right) \\ &= \det \Phi'(s, t) \left((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s) \right). \end{aligned}$$

On peut aussi trouver cette identité en utilisant le produit de matrices et les propriétés du déterminant ainsi : comme

$$\begin{pmatrix} d_1x \\ d_1y \end{pmatrix} = J_{\Phi}(s, t) \begin{pmatrix} d_1s \\ d_1t \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_{\Phi}(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix} = J_{\Phi}(s, t) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix} = \det J_{\Phi}(s, t) \cdot \det \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix}.$$

Cette identité peut servir à changer les variables dans une intégrale double classique :

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \iint f(x, y) |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)| \\ &= \iint f(\chi(s, t), \psi(s, t)) |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)| \\ &= \iint f(\chi(s, t), \psi(s, t)) |\Phi'(s, t)| |(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)| \\ &= \iint (f \circ \Phi)(s, t) |\Phi'(s, t)| |(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)| \\ &= \iint (f \circ \Phi)(s, t) |\Phi'(s, t)| ds dt, \end{aligned}$$

où

- dans la première expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx \geq 0, \quad d_2x = 0, \quad d_1y = 0, \quad d_2y = dy \geq 0,$$

- dans la dernière expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1s = ds \geq 0, \quad d_2s = 0, \quad d_1t = 0, \quad d_2t = dt \geq 0,$$

- dans les autres expressions de l'intégrale, on ne fait aucune hypothèse implicite sur les valeurs de « d_1x », « d_2x », « d_1y », « d_2y », « d_1s », « d_2s », « d_1t », « d_2t ».

[...]

III.4. $\int \int$ Théorème de Fubini

SECTION-BROUILLON

Notation. On va parfois utiliser la notation « $\int_{X \in B} f(X) dV_n$ » pour une intégrale de Riemann de f sur $B \subset \mathbf{R}^n$ par rapport à la mesure de Jordan dans \mathbf{R}^n .

Théorème (Théorème de Fubini). Soient B une partie Jordan mesurable de \mathbf{R}^m et C une partie Jordan mesurable de \mathbf{R}^n . Alors $B \times C$ est une partie Jordan mesurable de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$, et pour toute fonction $f: B \times C \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann intégrable,

$$\int_{(X,Y) \in B \times C} f(X, Y) dV_{m+n} = \int_{Y \in C} \left(dV_n \int_{X \in B} f(X, Y) dV_m \right),$$

à la seule condition que la valeur de l'intégrale itérée à droite soit définie.

[...]

III.5. Changement de variables

SECTION-BROUILLON

Théorème. Soient Ω une partie ouvert de \mathbf{R}^n et $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe C^1 . Soit $B \subset \Omega$ une partie Jordan mesurable telle que $\partial B \subset \Omega$ et que Φ soit injective sur l'intérieur topologique de B . Alors, pour toute fonction $f: \Phi(B) \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann intégrable,

$$\int_{Y \in \Phi(B)} f(Y) dV = \int_{X \in B} f(\Phi(X)) |\det \Phi'(X)| dV.$$

[...]

III.6. Courbes, surfaces, variétés

SECTION-BROUILLON

[...]

III.7. Mesure de Jordan sur les courbes

SECTION-BROUILLON

[...]

III.8. Mesure de Jordan sur les surfaces

SECTION-BROUILLON

[...]

III.9. Intégrales curvilignes du premier type

SECTION-BROUILLON

[...]

III.10. Intégrales de surface du premier type

SECTION-BROUILLON

Si $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ est une famille de m éléments d'un espace vectoriel euclidien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire), la *matrice de Gram* de cette famille est la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m \rangle \end{pmatrix}.$$

On va noter la matrice de Gram de $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ comme « $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ ». Ainsi :

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice de Gram $G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ est le carré du *volume m -dimensionnel* d'un *parallélépipède m -dimensionnel* dont m côtés orientés représentent les vecteurs $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. En particulier :

(1) si $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, alors la longueur du segment $[AB]$ est

$$\sqrt{\det G(\mathbf{v})} = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \|\mathbf{v}\|,$$

(2) si $ABCD$ est un parallélogramme, $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, alors l'aire de ce parallélogramme est

$$\sqrt{\det G(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2}.$$

Si dans un espace vectoriel euclidien à n dimensions on fixe une base orthonormée et qu'on note $v_{1,i}, \dots, v_{n,i}$ les coordonnées de \mathbf{v}_i dans cette base, alors

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) &= \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,m} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, dans \mathbf{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, si

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

alors

$$G(\mathbf{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix},$$

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

[...]

Soit Σ une surface de classe C^1 . Alors, plutôt qu'intégrer sur $B \subset \Sigma$ une valeur variable donnée en termes de P et de dS , où P est un point variable de Σ , et dS est un « élément d'aire de surface » (l'aire d'une partie variable du plan tangent à Σ en P), on peut intégrer une valeur variable donnée en termes de P , de d_1P et de d_2P , où P est toujours un point variable de Σ , et d_1P et d_2P sont deux vecteurs tangents à Σ en P avec lesquels on peut construire un parallélogramme dans le plan tangent dont l'aire sera dS . On aura l'égalité :

$$\int_{P \in BC\Sigma} f(P) dS = \int_{P \in BC\Sigma} f(P) \sqrt{\det G(d_1P, d_2P)}.$$

Si $d_1P = (d_1x, d_1y, d_1z)$ et $d_2P = (d_2x, d_2y, d_2z)$, alors

$$G(d_1P, d_2P) = \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix}.$$

[...]

Théorème. Soit Σ une surface de classe C^1 dans \mathbf{R}^3 . Soient Ω une partie ouverte de \mathbf{R}^2 et $\Phi: \Omega \rightarrow \Sigma$ une fonction de classe C^1 . Soit $B \subset \Omega$ une partie Jordan mesurable telle que $\partial B \subset \Omega$ et que Φ soit injective sur l'intérieur topologique de B . Alors, pour toute fonction $f: \Phi(B) \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann intégrable par rapport à la mesure de Jordan sur Σ ,

$$\begin{aligned} \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P) dS &= \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P) \sqrt{\det G(d_1P, d_2P)} \\ &= \int_{Q \in B \subset \mathbf{R}^2} f(\Phi(Q)) \sqrt{\det G(\Phi'(Q)(d_1Q), \Phi'(Q)(d_2Q))}. \end{aligned}$$

Si $P = (x, y, z)$, $d_iP = (d_ix, d_iy, d_iz)$, $Q = (s, t)$, $d_iQ = (d_iss, d_ist)$, et que $P = \Phi(Q)$ et $d_iP = \Phi'(Q)(d_iQ)$, alors

$$\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} = J_\Phi(s, t) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

($J_\Phi(s, t) = J_\Phi(Q)$ est la matrice jacobienne de Φ en $Q = (s, t)$.)

Dans le contexte des hypothèses du dernier théorème et en supposant, comme d'habitude, que dans \mathbf{R}^2 et dans \mathbf{R}^3 on utilise les bases canonique et les produits scalaires canoniques, on peut calculer que :

$$G(d_1P, d_2P) = \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix}$$

et

$$G(\Phi'(Q)(d_1Q), \Phi'(Q)(d_2Q)) = \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix} {}^t J_\Phi(Q) J_\Phi(Q) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix},$$

où $d_iP = (d_ix, d_iy, d_iz)$ et $d_iQ = (d_iss, d_ist)$. D'où,

$$\begin{aligned} \det G(\Phi'(Q)(d_1Q), \Phi'(Q)(d_2Q)) &= \det({}^t J_\Phi(Q) J_\Phi(Q)) \begin{vmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{vmatrix}^2 \\ &= \det({}^t J_\Phi(s, t) J_\Phi(s, t)) \left((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s) \right)^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\det G(\Phi'(Q)(d_1Q), \Phi'(Q)(d_2Q))} \\ = \sqrt{\det({}^t J_\Phi(s, t) J_\Phi(s, t))} |(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)|. \end{aligned}$$

Ainsi, toujours dans le contexte du dernier théorème, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P) dS &= \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P) \sqrt{\det G(d_1 P, d_2 P)} \\
 &= \int_{Q \in B \subset \mathbf{R}^2} f(\Phi(Q)) \sqrt{\det G(\Phi'(Q)(d_1 Q), \Phi'(Q)(d_2 Q))} \\
 &= \int_{(s,t) \in B \subset \mathbf{R}^2} f(\Phi(s,t)) \sqrt{\det \left({}^t J_{\Phi}(s,t) J_{\Phi}(s,t) \right) |(d_1 s)(d_2 t) - (d_1 t)(d_2 s)|} \\
 &= \int_{(s,t) \in B \subset \mathbf{R}^2} f(\Phi(s,t)) \sqrt{\det \left({}^t J_{\Phi}(s,t) J_{\Phi}(s,t) \right)} ds dt.
 \end{aligned}$$