Analyse dans $\mathbb{R}^n$, chapitre III

Alexey Muranov

14 juin 2025

Table des matières

III. Calcul intégral

III.1. Mesure de Jordan

SECTION-BROUILLON

Certaines parties bornées de $\mathbf{R}^n$ sont dites *Jordan mesurables*. À toute partie Jordan mesurable $A \subset \mathbf{R}^n$ on associe un nombre réel positif dit la *mesure de Jordan* de A.

Notation. On va noter la mesure de Jordan de $A \subset \mathbf{R}^n$ par « $m(A)$ ».

Propriétés fondamentales de la mesurabilité de Jordan. Fixons un nombre naturel n. Dans les énoncés des propriétés suivantes, on va écrire « Jordan mesurable » tout court au lieu de « Jordan mesurable dans $\mathbf{R}^n$ ».

(1) L'ensemble vide $\varnothing$ est Jordan mesurable, et

$$m(\varnothing) = 0.$$

(2) Si A et B sont Jordan mesurables, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont tous Jordan mesurables, et

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

En particulier, si $A \cap B = \varnothing$, alors

$$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B).$$

(3) Soit A une partie d'un ensemble Jordan mesurable. Posons

$$m^*(A) \overset{\text{déf}}{=} \inf\{\, m(B) \mid B \supset A \text{ et } B \text{ est Jordan mesurable} \,\},$$

$$m_*(A) \overset{\text{déf}}{=} \sup\{\, m(B) \mid B \subset A \text{ et } B \text{ est Jordan mesurable} \,\}.$$

Si $m_*(A) = m^*(A)$, alors A est Jordan mesurable, et

$$m(A) = m_*(A) = m^*(A).$$

(4) Soit $(A_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles Jordan mesurables telle que si $i, j \in \mathbf{N}$ et $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$. Posons

$$B = \bigsqcup_{i\in\mathbf{N}} A_i.$$

En général, B n'est pas obligé d'être Jordan mesurable. Cependant, si B est Jordan mesurable, alors

$$m(B) = \sum_{i\in\mathbf{N}} m(A_i).$$

(5) Soient $I_1, \ldots, I_n$ des intervalles bornés de $\mathbf{R}$ de longueurs $a_1, \ldots, a_n$. Posons

$$P = I_1 \times \cdots \times I_n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 \in I_1, \ \ldots, \ x_n \in I_n \}.$$

Alors P est Jordan mesurable, et

$$m(P) = a_1 \cdots a_n.$$

Pour transformer ces propriétés en une définition de la *mesurabilité* et de la *mesure de Jordan*, il suffit d'ajouter deux conditions suivantes :

(1) Un ensemble n'est Jordan mesurable que si sa mesurabilité de Jordan résulte des propriétés données ci-dessus.

(2) La mesure de Jordan d'un ensemble est définie si et seulement si cet ensemble est Jordan mesurable.

Définition. La *frontière* d'une partie A de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des points $X \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout voisinage V de X dans $\mathbf{R}^n$, $V \cap A \neq \varnothing$ et $V \cap (\mathbf{R}^m \setminus A) \neq \varnothing$.

Notation. La frontière de A sera notée « ∂A ».[1]

Théorème. *Un ensemble $A \subset \mathbf{R}^n$ est Jordan mesurable si et seulement si*

(1) *A est borné et*

(2) *∂A est de mesure nulle.*

[...]

III.2. Intégrale de Riemann

SECTION-BROUILLON

Si A est une partie Jordan mesurable de $\mathbf{R}^n$, alors certaines fonctions $A \to \mathbf{R}$ sont dites *Riemann intégrables*. À toute fonction Riemann intégrable $f\colon A \to \mathbf{R}$ on associe un nombre réel dit l'*intégrale de Riemann* de f (sur A).

Une fonction $f\colon A \to \mathbf{R}$ est dite *Riemann intégrable* sur une partie Jordan mesurable $B \subset A$ si et seulement si la restriction de f sur B est Riemann intégrable, et dans ce cas, l'intégrale de Riemann de la restriction $f|_B$ est dite l'*intégrale de Riemann* de f sur B.

Notation. [...]

[1] Le symbole « ∂ » utilisé ici est le même que dans les notations traditionnelles pour les différentielles et les dérivées partielles. Selon une opinion répandue, il y a des similarités entre les deux usages. Cependant, cette coïncidence de notation est sans grande importance.

Propriétés fondamentales de l'intégrabilité de Riemann. [. . .]

(1) Pour toute fonctions f,

$$\int_{X\in\varnothing} f(X)\,dV = 0.$$

(2) Si A et B sont deux ensembles Jordan mesurables et f est une fonction Riemann intégrable sur A et sur B, alors f est Riemann intégrable sur $A\cup B$, sur $A\cap B$, sur $A\setminus B$ et sur $B\setminus A$, et

$$\int_{X\in A\cup B} f(X)\,dV + \int_{X\in A\cap B} f(X)\,dV = \int_{X\in A} f(X)\,dV + \int_{X\in B} f(X)\,dV.$$

En particulier, si $A\cap B=\varnothing$, alors

$$\int_{X\in A\sqcup B} f(X)\,dV = \int_{X\in A} f(X)\,dV + \int_{X\in B} f(X)\,dV.$$

(3) Si f et g sont Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A, alors $f+g$ est aussi Riemann intégrable sur A, et

$$\int_{X\in A} (f(X)+g(X))\,dV = \int_{X\in A} f(X)\,dV + \int_{X\in A} g(X)\,dV.$$

Si f est Riemann intégrable sur un ensemble Jordan mesurable A, alors, pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$, αf est aussi Riemann intégrable sur A, et

$$\int_{X\in A} \alpha f(X)\,dV = \alpha\int_{X\in A} f(X)\,dV.$$

(4) Si f est Riemann intégrable sur un ensemble Jordan mesurable A, et que $f(X)\geqslant 0$ pour tout $X\in A$, alors

$$\int_{X\in A} f(X)\,dV \geqslant 0.$$

(5) Si f et g sont Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A, alors $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont aussi Riemann intégrables sur A.

(6) Soient A un ensemble Jordan mesurable et f une fonction à valeurs réelles définie sur A qui est majorée et minorée sur A par des fonctions Riemann intégrables sur A. Posons

$$\int_{X\in A}^{*} f(X)\,dV \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\left\{ \int_{X\in A} g(X)\,dV \,\middle|\, g\geqslant f \text{ et } g \text{ est Riemann intégrable} \right\},$$

$$\int_{*X\in A} f(X)\,dV \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\left\{ \int_{X\in A} g(X)\,dV \,\middle|\, g\leqslant f \text{ et } g \text{ est Riemann intégrable} \right\}.$$

Si $\displaystyle\int_{X\in A}^{*} f(X)\,dV = \int_{*X\in A} f(X)\,dV$, alors f est Riemann intégrable, et

$$\int_{X\in A} f(X)\,dV = \int_{X\in A}^{*} f(X)\,dV = \int_{*X\in A} f(X)\,dV.$$

(7) Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable de fonctions *à valeurs positifs* et Riemann intégrables sur un ensemble Jordan mesurable A. Posons

$$g(X) = \sum_{i\in\mathbf{N}} f_i(X).$$

En général, g n'est pas obligée d'être Riemann intégrable sur A. Cependant, si g est Riemann intégrable sur A, alors

$$\int_{X\in A} g(X)\,dV = \sum_{i\in\mathbf{N}} \int_{X\in A} f_i(X)\,dV.$$

(8) Si A est un ensemble Jordan mesurable, alors

$$\int_{X\in A} dV = \int_{X\in A} 1\,dV = m(A).$$

Pour transformer ces propriétés en une définition de l'*intégrabilité* et de l'*intégrale de Riemann*, il suffit d'ajouter deux conditions suivantes :

(1) Une fonction n'est Riemann intégrable que si sa intégrabilité de Riemann résulte des propriétés données ci-dessus.

(2) L'intégrale de Riemann d'une fonction sur un ensemble est définie si et seulement si cette fonction est Riemann intégrable sur cet ensemble (qui doit être Jordan mesurable).

Théorème. *Soit $B \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble Jordan mesurable. Alors une fonction $f\colon B \to \mathbf{R}$ est Riemann integrable (sur B) si et seulement si*

(1) *f est bornée et*

(2) *$\{\, X \in B \mid f$ n'est pas continue en $X \,\}$ est de mesure nulle.*

[...]

III.3. 🚧 Intégrales multiples classiques

SECTION-BROUILLON

[. . .]

Dans l'expression « $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ », il est entendu que

$$dx\,dy = |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|\,,$$

où

$$d_1x = dx \geqslant 0, \qquad d_2x = 0, \qquad d_1y = 0, \qquad d_2y = dy \geqslant 0.$$

Remarque. Au lieu de « d_1 » et « d_2 », on peut fixer et utiliser d'autres symboles. Par exemple, si on choisit « d » et « e », on aura « $dx\,ey$ ». Traditionnellement, plutôt que « d_1 » et « d_2 », on utilisait différentes écritures de la lettre « d » ou des lettres similaires, comme « δ ».[2] [3] [4] [5]

Si on veux admettre les valeurs quelconques de $d_1P = (d_1x,\, d_1y) \in \mathbf{R}^2$ et de $d_2P = (d_2x,\, d_2y) \in \mathbf{R}^2$, il faut écrire « $|(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|$ » à la place de « $dx\,dy$ » (où « dx » veut dire d_1x et « dy » veut dire d_2y). En effet, $|(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|$ est l'aire du parallélogramme dont deux côtés orientés représentent les vecteurs $d_1P = (d_1x,\, d_1y)$ et $d_2P = (d_2x,\, d_2y)$. Dans le cas où $d_1x = dx \geqslant 0$, $d_2x = 0$, $d_1y = 0$, $d_2y = dy \geqslant 0$, ce parallélogramme est rectangle d'aire $dx\,dy$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\iint f(x,y)\,dx\,dy &= \iint f(x,y)\ |dx\,dy| \\ &= \iint f(x,y)\ |(d_1x)(d_2y)| \\ &= \iint f(x,y)\ |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)|\,,\end{aligned}$$

où

- dans la première expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx \geqslant 0, \qquad d_2x = 0, \qquad d_1y = 0, \qquad d_2y = dy \geqslant 0,$$

[2] Josiah Willard Gibbs et Edwin Bidwell Wilson. *Vector analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics.* Founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, Ph.D., LL.D. Anglais. New Haven, CT : Yale University, 1901. xviii+436. URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_Analysis, p. 188.

[3] Hermann Weyl. “Reine Infinitesimalgeometrie”. Allemand. In : *Mathematische Zeitschrift* (sept. 1918), p. 384-411. ISSN : 0025-5874. DOI : 10.1007/BF01199420. URL : https://link.springer.com/article/10.1007/BF01199420, p. 387.

[4] Élie Cartan. *La géométrie des espaces de Riemann.* Paris : Gauthier-Villars, 1925. 61 p. URL : https://eudml.org/doc/192543, p. 13.

[5] Élie Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.* Paris : Hermann, 1945. 215 p. URL : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3385132c/, p. 36.

- dans la seconde expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx, \qquad d_2x = 0, \qquad d_1y = 0, \qquad d_2y = dy,$$

- dans la dernière expression de l'intégrale, on ne fait aucune hypothèse implicite sur les valeurs de « d_1x », « d_2x », « d_1y », « d_2y ».

En utilisant la notion du déterminant d'une matrice carrée, on a :

$$(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x) = \det \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix}.$$

Si $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ est une famille de n éléments d'un espace vectoriel n-dimensionnel euclidien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire) orienté, alors on peut définir le *déterminant* de cette famille, noté « $\det(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ », de manière que si on forme la matrice des coordonnées des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_n$ par rapport à une n'importe quelle base orthonormée directe, le déterminant de cette matrice sera $\det(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$.

Dans le cas de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ mini de son produit scalaire canonique et de son orientation canonique, si $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ et $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, alors

$$\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Ainsi, en posant $P = (x, y)$, $d_1P = (d_1x,\ d_1y)$ et $d_2P = (d_2x,\ d_2y)$, on a :

$$\begin{aligned} \iint f(x, y)\, dx\, dy &= \iint f(x, y)\ \left|(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)\right| \\ &= \iint f(P)\ \left|\det(d_1P,\ d_2P)\right|. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que les valeurs de « x » et de « y » sont exprimées en termes des valeurs de « s » et « t » :

$$x = \chi(s, t), \qquad y = \psi(s, t).$$

Posons aussi

$$\Phi(s, t) = \big(\chi(s, t),\ \psi(s, t)\big).$$

Ainsi,

$$(x, y) = \Phi(s, t).$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} d_1x = d_1(\chi(s, t)) = \chi'(s, t)(d_1s,\ d_1t) &= \frac{\partial \chi(s, t)}{\partial s} d_1s + \frac{\partial \chi(s, t)}{\partial t} d_1t \\ &= \frac{\partial x}{\partial s} d_1s + \frac{\partial x}{\partial t} d_1t. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$d_1x = \frac{\partial x}{\partial s} d_1 s + \frac{\partial x}{\partial t} d_1 t, \qquad d_1y = \frac{\partial y}{\partial s} d_1 s + \frac{\partial y}{\partial t} d_1 t,$$

$$d_2x = \frac{\partial x}{\partial s} d_2 s + \frac{\partial x}{\partial t} d_2 t, \qquad d_2y = \frac{\partial y}{\partial s} d_2 s + \frac{\partial y}{\partial t} d_2 t.$$

Donc,

$$\begin{aligned}(d_1x)(d_2y) &= \left(\frac{\partial x}{\partial s} d_1 s + \frac{\partial x}{\partial t} d_1 t\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s} d_2 s + \frac{\partial y}{\partial t} d_2 t\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}(d_1s)(d_2s) + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}(d_1t)(d_2s)\\ &+ \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}(d_1s)(d_2t) + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}(d_1t)(d_2t),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(d_1y)(d_2x) &= \left(\frac{\partial y}{\partial s} d_1 s + \frac{\partial y}{\partial t} d_1 t\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s} d_2 s + \frac{\partial x}{\partial t} d_2 t\right)\\ &= \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s}(d_1s)(d_2s) + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}(d_1t)(d_2s)\\ &+ \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}(d_1s)(d_2t) + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t}(d_1t)(d_2t).\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x) &= \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}(d_1t)(d_2s) + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}(d_1s)(d_2t)\\ &- \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}(d_1t)(d_2s) - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}(d_1s)(d_2t)\\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}\right)\Big((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)\Big)\\ &= \det J_\Phi(s,t)\Big((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)\Big)\\ &= \det \Phi'(s,t)\Big((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)\Big).\end{aligned}$$

On peut aussi trouver cette identité en utilisant le produit de matrices et les propriétés du déterminant ainsi : comme

$$\begin{pmatrix} d_ix \\ d_iy \end{pmatrix} = J_\Phi(s,t)\begin{pmatrix} d_is \\ d_it \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix} = J_\Phi(s,t) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{pmatrix} = \det J_\Phi(s,t) \cdot \det \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix}.$$

Cette identité peut servir à changer les variables dans une intégrale double classique :

$$\begin{aligned} \iint f(x,y)\, dx\, dy &= \iint f(x,y)\ |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)| \\ &= \iint f\big(\chi(s,t),\ \psi(s,t)\big)\ |(d_1x)(d_2y) - (d_1y)(d_2x)| \\ &= \iint f\big(\chi(s,t),\ \psi(s,t)\big)\, |\Phi'(s,t)|\ |(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)| \\ &= \iint (f \circ \Phi)(s,t)\, |\Phi'(s,t)|\ |(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)| \\ &= \iint (f \circ \Phi)(s,t)\, |\Phi'(s,t)|\ ds\, dt, \end{aligned}$$

où

- dans la première expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1x = dx \geqslant 0, \qquad d_2x = 0, \qquad d_1y = 0, \qquad d_2y = dy \geqslant 0,$$

- dans la dernière expression de l'intégrale, on admet implicitement que

$$d_1s = ds \geqslant 0, \qquad d_2s = 0, \qquad d_1t = 0, \qquad d_2t = dt \geqslant 0,$$

- dans les autres expressions de l'intégrale, on ne fait aucune hypothèse implicite sur les valeurs de « d_1x », « d_2x », « d_1y », « d_2y », « d_1s », « d_2s », « d_1t », « d_2t ».

`[...]`

III.4. Théorème de Fubini

SECTION-BROUILLON

Notation. On va parfois utiliser la notation « $\displaystyle\int_{X \in B} f(X)\, dV_n$ » pour une intégrale de Riemann de f sur $B \subset \mathbf{R}^n$ par rapport à la mesure de Jordan dans $\mathbf{R}^n$.

Théorème (Théorème de Fubini)**.** *Soient B une partie Jordan mesurable de $\mathbf{R}^m$ et C une partie Jordan mesurable de $\mathbf{R}^n$. Alors $B \times C$ est une partie Jordan mesurable de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$, et pour toute fonction $f\colon B \times C \to \mathbf{R}$ Riemann intégrable,*

$$\int_{(X,Y)\in B\times C} f(X,Y)\,dV_{m+n} = \int_{Y\in C} \left(dV_n \int_{X\in B} f(X,Y)\,dV_m \right),$$

à la seule condition que la valeur de l'intégrale itérée à droite soit définie.

[. . .]

III.5. Changement de variables

SECTION-BROUILLON

Théorème. *Soient Ω une partie ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\Phi\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $B \subset \Omega$ une partie Jordan mesurable telle que $\partial B \subset \Omega$ et que Φ soit injective sur l'intérieur topologique de B. Alors, pour toute fonction $f\colon \Phi(B) \to \mathbf{R}$ Riemann intégrable,*

$$\int_{Y\in\Phi(B)} f(Y)\,dV = \int_{X\in B} f(\Phi(X))\,\left|\det \Phi'(X)\right|\,dV.$$

[. . .]

III.6. Courbes, surfaces, variétés

SECTION-BROUILLON
[. . .]

III.7. Mesure de Jordan sur les courbes

SECTION-BROUILLON
[. . .]

III.8. Mesure de Jordan sur les surfaces

SECTION-BROUILLON
[. . .]

III.9. Intégrales curvilignes du premier type

SECTION-BROUILLON
[. . .]

III.10. 🚧 Intégrales de surface du premier type

SECTION-BROUILLON

Si $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ est une famille de m éléments d'un espace vectoriel euclidien (c'est-à-dire muni d'un produit scalaire), la *matrice de Gram* de cette famille est la matrice

$$\begin{matrix} \langle \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_m,\, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_m,\, \boldsymbol{v}_m \rangle \end{matrix}.$$

On va noter la matrice de Gram de $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ comme « $G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ ». Ainsi :

$$G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) \overset{\text{déf}}{=} \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_m,\, \boldsymbol{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_m,\, \boldsymbol{v}_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice de Gram $G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m)$ est le carré du *volume m-dimensionnel* d'un *parallélépipède m-dimensionnel* dont m côtés orientés représentent les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_m$. En particulier :

(1) si $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$, alors la longueur du segment $[AB]$ est

$$\sqrt{\det G(\boldsymbol{v})} = \sqrt{\langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v} \rangle} = \|\boldsymbol{v}\|,$$

(2) si $ABCD$ est un parallélogramme, $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AD}$, alors l'aire de ce parallélogramme est

$$\sqrt{\det G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})} = \sqrt{\langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v} \rangle - \langle \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \rangle^2}.$$

Si dans un espace vectoriel euclidien à n dimensions on fixe une base orthonormée et qu'on note $v_{1,i}$, …, $v_{n,i}$ les coordonnées de $\boldsymbol{v}_i$ dans cette base, alors

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) &= \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,m} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \\ &= {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, dans $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, si

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

alors

$$G(\boldsymbol{u}) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix},$$

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

[...]

Soit Σ une surface de classe C^1. Alors, plutôt qu'intégrer sur $B \subset \Sigma$ une valeur variable donnée en termes de P et de dS, où P est un point variable de Σ, et dS est un « élément d'aire de surface » (l'aire d'une partie variable du plan tangent à Σ en P), on peut intégrer une valeur variable donnée en termes de P, de d_1P et de d_2P, où P est toujours un point variable de Σ, et d_1P et d_2P sont deux vecteurs tangents à Σ en P avec lesquels on peut construire un parallélogramme dans le plan tangent dont l'aire sera dS. On aura l'égalité :

$$\int_{P \in B \subset \Sigma} f(P)\, dS = \int_{P \in B \subset \Sigma} f(P) \sqrt{\det G(d_1P,\, d_2P)}.$$

Si $d_1P = (d_1x,\, d_1y,\, d_1z)$ et $d_2P = (d_2x,\, d_2y,\, d_2z)$, alors

$$G(d_1P,\, d_2P) = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix}.$$

[...]

Théorème. *Soit Σ une surface de classe C^1 dans $\mathbf{R}^3$. Soient Ω une partie ouvert de $\mathbf{R}^2$ et $\Phi\colon \Omega \to \Sigma$ une fonction de classe C^1. Soit $B \subset \Omega$ une partie Jordan mesurable telle que $\partial B \subset \Omega$ et que Φ soit injective sur l'intérieur topologique de B. Alors, pour toute fonction $f\colon \Phi(B) \to \mathbf{R}$ Riemann intégrable par rapport à la mesure de Jordan sur Σ,*

$$\begin{aligned} \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P)\, dS &= \int_{P \in \Phi(B) \subset \Sigma} f(P) \sqrt{\det G(d_1P,\, d_2P)} \\ &= \int_{Q \in B \subset \mathbf{R}^2} f(\Phi(Q)) \sqrt{\det G\Big(\Phi'(Q)(d_1Q),\, \Phi'(Q)(d_2Q)\Big)}. \end{aligned}$$

Si $P = (x, y, z)$, $d_iP = (d_ix,\, d_iy,\, d_iz)$, $Q = (s, t)$, $d_iQ = (d_is,\, d_it)$, et que $P = \Phi(Q)$ et $d_iP = \Phi'(Q)(d_iQ)$, alors

$$\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} = J_\Phi(s,t) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J_\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

($J_\Phi(s,t) = J_\Phi(Q)$ est la matrice jacobienne de Φ en $Q = (s,t)$.)

Dans le contexte des hypothèses du dernier théorème et en supposant, comme d'habitude, que dans $\mathbf{R}^2$ et dans $\mathbf{R}^3$ on utilise les bases canonique et les produits scalaires canoniques, on peut calculer que :

$$G(d_1P,\, d_2P) = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \\ d_1z & d_2z \end{pmatrix}$$

et

$$G\Big(\Phi'(Q)(d_1Q),\, \Phi'(Q)(d_2Q)\Big) = {}^{\mathbf{t}}\!\begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix} {}^{\mathbf{t}}J_\Phi(Q) J_\Phi(Q) \begin{pmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{pmatrix},$$

où $d_iP = (d_ix,\, d_iy,\, d_iz)$ et $d_iQ = (d_is,\, d_it)$. D'où,

$$\begin{aligned} \det G\Big(\Phi'(Q)(d_1Q),\, \Phi'(Q)(d_2Q)\Big) &= \det\Big({}^{\mathbf{t}}J_\Phi(Q) J_\Phi(Q)\Big) \begin{vmatrix} d_1s & d_2s \\ d_1t & d_2t \end{vmatrix}^2 \\ &= \det\Big({}^{\mathbf{t}}J_\Phi(s,t) J_\Phi(s,t)\Big) \Big((d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)\Big)^2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\sqrt{\det G\Big(\Phi'(Q)(d_1Q),\, \Phi'(Q)(d_2Q)\Big)} \\ &\qquad = \sqrt{\det\Big({}^{\mathbf{t}}J_\Phi(s,t) J_\Phi(s,t)\Big)}\, \left|(d_1s)(d_2t) - (d_1t)(d_2s)\right|. \end{aligned}$$

Ainsi, toujours dans le contexte du dernier théorème, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{P\in\Phi(B)\subset\Sigma} f(P)\,dS &= \int_{P\in\Phi(B)\subset\Sigma} f(P)\sqrt{\det G(d_1P,\, d_2P)} \\
&= \int_{Q\in B\subset\mathbf{R}^2} f(\Phi(Q))\sqrt{\det G\Big(\Phi'(Q)(d_1Q),\, \Phi'(Q)(d_2Q)\Big)} \\
&= \int_{(s,t)\in B\subset\mathbf{R}^2} f(\Phi(s,t))\sqrt{\det\Big({}^{\mathbf{t}}J_\Phi(s,t)J_\Phi(s,t)\Big)}\,|(d_1s)(d_2t)-(d_1t)(d_2s)| \\
&= \int_{(s,t)\in B\subset\mathbf{R}^2} f(\Phi(s,t))\sqrt{\det\Big({}^{\mathbf{t}}J_\Phi(s,t)J_\Phi(s,t)\Big)}\,ds\,dt.
\end{aligned}$$