

Cours d'Analyse – L2 Math-Méca

(2^e année, 1^{er} semestre)

[24h de cours + 48h de TD]

Notes rédigées par Alexey Muranov,
basées sur les notes de M. Nguyen Tien Zung,
professeur à l'Université Paul Sabatier,
basées en partie sur un manuscrit de
M. François de Thélin (professeur à l'UPS retraité)
et sur les exercices dus à la contribution de
plusieurs enseignants de l'UPS et d'ailleurs.

Table des matières

Chapitre 1. Intégrales généralisées	1
1. Rappels sur l'intégration	1
2. Définition et convergence d'intégrales généralisées	3
3. Étude de la convergence et calcul	4
4. Exercices	7
Chapitre 2. Séries numériques	9
1. Définition et convergence de séries numériques	9
2. Étude de la convergence absolue	11
3. Étude de la convergence simple	13
4. Produit de Cauchy de deux séries	14
5. Exercices	16
Chapitre 3. Suites et séries de fonctions	18
1. Convergence de suites de fonctions	18
2. Propriétés des limites	20
3. Séries de fonctions	24
4. Exercices	27
Chapitre 4. Séries entières	30
1. Définition et convergence de séries entières	30
2. Étude de la fonction somme d'une série entière	32
3. Développement en série entière	34
4. La fonction exponentielle complexe	36
5. Quelques développements standards	37
6. Exercices	38
Chapitre 5. Séries de Fourier	40
1. Séries trigonométriques	40
2. Séries de Fourier	42
3. Théorème de Dirichlet	44
4. Formule de Parseval	48
5. Exercices	51

Intégrales généralisées

1. Rappels sur l'intégration

Soit $[a, b]$ un intervalle, $-\infty < a < b < \infty$. Une *subdivision* de $[a, b]$ est une famille finie $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$. Notons $S[a, b]$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. Pour chaque subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$, notons

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n \left[(a_i - a_{i-1}) \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right]$$

et

$$J_\sigma(f) = \sum_{i=1}^n \left[(a_i - a_{i-1}) \sup_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) \right].$$

LEMME. Si $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\tau = (b_j)_{0 \leq j \leq m}$ sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, on a toujours $I_\sigma(f) \leq J_\tau(f)$. Donc

$$\sup_{\sigma \in S[a, b]} I_\sigma(f) \leq \inf_{\sigma \in S[a, b]} J_\sigma(f).$$

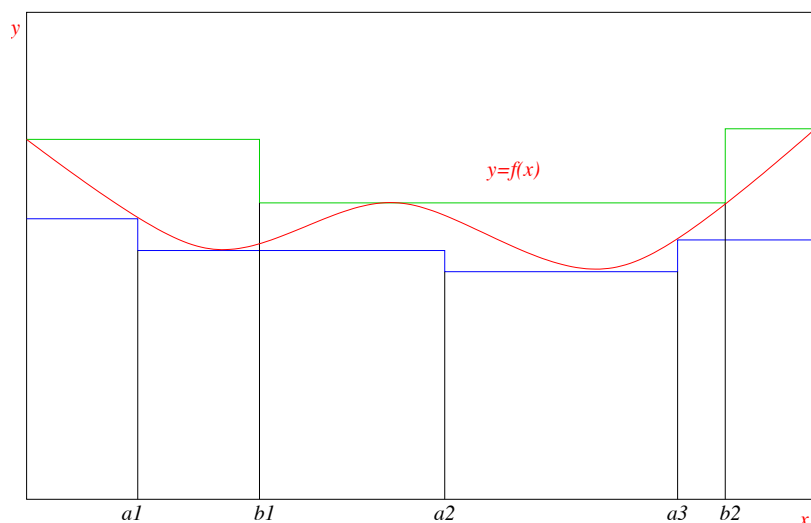


FIGURE 1. $I_\sigma(f)$ et $J_\delta(f)$ sont représentés comme sommes des aires de rectangles.

DÉFINITION. Une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *intégrable* (au sens de Riemann) si

$$\sup_{\sigma \in S[a, b]} I_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma \in S[a, b]} J_{\sigma}(f).$$

Dans ce cas on définit son *intégrale* (de Riemann, usuelle) sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\sigma \in S[a, b]} I_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma \in S[a, b]} J_{\sigma}(f).$$

Propriétés de l'intégrale usuelle :

- (1) linéarité : $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$;
- (2) $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$, $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- (3) si f est intégrable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, $a < b < c$, alors f est intégrable sur $[a, c]$, et $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$;
- (4) si f et g sont intégrables, alors fg est intégrable ;
- (5) si f est intégrable et $|f| \geq c > 0$, alors $1/f$ est intégrable.

DÉFINITION (Continuité par morceaux). Une fonction f est *continue par morceaux* sur un intervalle borné I si et seulement si f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur I et possède les limites à droite et à gauche en ces points.

THÉORÈME (Les fonctions continues par morceaux sont intégrables). *Toute fonction **continue par morceaux** sur un intervalle borné est intégrable sur cet intervalle.*

THÉORÈME (Premier théorème fondamental de l'analyse). *Si f est **continue** sur un intervalle I , alors*

- (1) f est intégrable sur I et
- (2) f admet une primitive sur I : pour tout $a \in I$, la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

est une primitive de f sur I .

THÉORÈME (Second théorème fondamental de l'analyse). *Si f est **intégrable** sur un intervalle I et **admet une primitive** F sur I , alors pour tous $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

THÉORÈME (Changement de variable). *Soient I et J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $\phi: I \rightarrow J$ une application continûment dérivable et $f: J \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Alors, quels que soient $\alpha, \beta \in I$, on a :*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(y) dy.$$

DÉMONSTRATION. Si $F' = f$, alors

$$\frac{d}{dx} \left(F(\phi(x)) \right) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x). \quad \square$$

THÉORÈME (Intégration par parties). Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, et u et v deux fonctions $I \rightarrow \mathbf{R}$ continûment dérivables sur I . Alors, quels que soient $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

DÉMONSTRATION.

$$\frac{d}{dx} \left(u(x)v(x) \right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad \square$$

2. Définition et convergence d'intégrales généralisées

2.1. Définitions de base.

DÉFINITION (Fonctions localement intégrables). Une fonction f à valeurs réelles est *localement intégrable* sur un ensemble $E \subset \mathbf{R}$ si et seulement si pour tous a, b tels que $[a, b] \subset E$, f est intégrable sur $[a, b]$.

DÉFINITION. Soit f une fonction à valeurs réelles localement intégrable sur un intervalle $]a, b[$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $x_0 \in]a, b[$, et définissons la fonction $F:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ par

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

On dit que *l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge en a* si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ existe et est finie, que *$\int_a^b f(t) dt$ converge en b* si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe et est finie. Si l'intégrale converge en a et en b , alors on définit sa *valeur* par

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Si une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

DÉFINITION. Une intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ d'une fonction f à valeurs complexes *converge* si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent toutes les deux, et dans ce cas la *valeur* est définie par

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt.$$

Toute fonction *a priori* sera à valeur complexe.

THÉORÈME (Intégrales usuelles comme généralisées). Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors elle est localement intégrable sur $]a, b[$, et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge et a la même valeur que l'intégrale usuelle $\int_a^b f(x) dx$.

THÉORÈME. Si $-\infty < a < b < c \leq \infty$ et f est localement intégrable sur $[a, c[$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^c f(x) dx$ est de la même nature que l'intégrale $\int_b^c f(x) dx$, et si elles convergent, alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

2.2. Critère de Cauchy.

THÉORÈME (Critère de Cauchy). Soit $f: [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si f vérifie la condition suivante, dite critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b[\text{ tel que } \forall x_1, x_2 \in [c, b[\text{ on a } \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

2.3. Convergence absolue.

DÉFINITION. Une intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ est dite *absolument convergente* si et seulement si l'intégrale $\int_a^b |f(x)| dx$ converge.

THÉORÈME (Convergence absolue implique convergence). Si f est localement intégrable sur $[a, b[$ et l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ **converge absolument**, alors cette intégrale converge.

THÉORÈME (Intégrales généralisées de fonctions bornées). Si f est une fonction localement intégrable et **bornée** sur un **intervalle borné** $[a, b[$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge absolument.

2.4. Intégrales généralisées de fonctions positives.

THÉORÈME (Intégrales généralisées de fonctions positives). Si f est une fonction localement intégrable et **positive** sur $]a, b[$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x) dx$ converge si et seulement si l'ensemble $\{ \int_c^d f(x) dx \mid c, d \in]a, b[\}$ est majoré, et dans ce cas

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{c, d \in]a, b[} \int_c^d f(x) dx.$$

3. Étude de la convergence et calcul

3.1. Changement de variable.

THÉORÈME (Changement de variable). Soient $\phi:]\alpha, \beta[\rightarrow I$ une application continûment dérivable et $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue. Posons

$$\phi(\alpha^+) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \phi(x) \quad \text{et} \quad \phi(\beta^-) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow \beta^-} \phi(x).$$

Alors l'intégrale $\int_{\phi(\alpha^+)}^{\phi(\beta^-)} f(x) dx$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ converge. Si les intégrales convergent, alors leurs valeurs sont égales :

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha^+)}^{\phi(\beta^-)} f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Utiliser un changement de variable dans les intégrales usuelles et passer à la limite. $\square$

3.2. Intégration par parties.

THÉORÈME (Intégration par parties). *Soient $u, v:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ deux applications continûment dérivables ($a < b$). Supposons que $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x)$ existent et sont finies. Posons*

$$[u(x)v(x)]_{a^+}^{b^-} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} u(x)v(x).$$

Alors l'intégrale $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ converge si et seulement si $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ converge, et si elles convergent, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_{a^+}^{b^-}.$$

DÉMONSTRATION. Utiliser l'intégration par parties dans les intégrales usuelles et passer à la limite. $\square$

3.3. Convergence absolue par comparaison.

THÉORÈME (Comparaison par majoration). *Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b[$, si pour tout $x \in [a, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, et si $\int_a^b g(x) dx$ converge, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge.*

DÉFINITION (Notation de Landau). Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$.

(1) On dit que $f(x) \in O(g(x))$ (ou $f(x) = O(g(x))$) quand $x \rightarrow b^-$ si

$$\exists M > 0 \quad \exists c \in [a, b[\quad \text{tels que} \quad \forall x \in [c, b[\quad |f(x)| \leq M |g(x)|.$$

(2) On dit que $f(x) \in o(g(x))$ (ou $f(x) = o(g(x))$) quand $x \rightarrow b^-$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a, b[\quad \text{tel que} \quad \forall x \in [c, b[\quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

(3) On dit que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b^-$ si

$$|f(x) - g(x)| = o(f(x)) \quad \text{quand } x \rightarrow b^-.$$

Définition équivalente :

DÉFINITION (Notation de Landau). Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b[$.

(1) On dit que $f(x) = O(g(x))$ quand $x \rightarrow b^-$ si il existe $q: [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f = qg$ au voisinage de b et q est bornée au voisinage de b .

(2) On dit que $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow b^-$ si il existe $q: [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f = qg$ au voisinage de b et $\lim_{x \rightarrow b^-} q(x) = 0$.

(3) On dit que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b^-$ si il existe $q: [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que $f = qg$ au voisinage de b et $\lim_{x \rightarrow b^-} q(x) = 1$.

Pour démontrer l'équivalence, on pose

$$q(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$$

dans (1) et (2), et

$$q(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & \text{si } g(x) \neq 0, \\ 1 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$$

dans (3).

Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b^-$, alors au voisinage de b à gauche on a $0 \leq |g(x)| \leq 2|f(x)|$ et $0 \leq |f(x)| \leq 2|g(x)|$, et donc $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) = O(f(x))$ quand $x \rightarrow b^-$. On a aussi $f(x) = g(x) + o(g(x))$ et $g(x) = f(x) + o(f(x))$.

COROLLAIRE (Comparaison par O). *Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b]$, si $f(x) = O(g(x))$ quand $x \rightarrow b^-$, et si $\int_a^b g(x) dx$ **converge absolument**, alors $\int_a^b f(x) dx$ converge absolument.*

COROLLAIRE (Comparaison par équivalence). *Si f et g sont localement intégrables sur $[a, b]$ et **positives au voisinage de b** , et que $f(x) \sim g(x)$ quand $x \rightarrow b^-$, alors $\int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ sont de même nature.*

3.4. Quelques intégrales de référence.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{converge (en } \infty) \text{ si et seulement si } \alpha > 1.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{converge (en } 0) \text{ si et seulement si } \alpha < 1.$$

$$\int_0^\infty a^x dx \quad \text{converge (en } \infty) \text{ si } 0 \leq a < 1 \text{ et diverge si } a \geq 1.$$

$$\int_0^1 \ln x dx = 1.$$

3.5. Convergence simple par la règle d'Abel.

THÉORÈME (Règle d'Abel). *Soient $f: [a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ et $g: [a, b[\rightarrow \mathbf{C}$ localement intégrables sur $[a, b[$. Supposons que :*

- (1) $\exists M > 0$ tel que $\forall u \in [a, b[, \left| \int_a^u g(x) dx \right| \leq M$,
- (2) f est **monotone**, et
- (3) $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0$.

Alors $\int_a^b f(x)g(x) dx$ converge.

DÉMONSTRATION. Sans perte de généralité, supposons que f est positive et décroissante.

Soient $u, v \in [a, b[, u < v, \varepsilon > 0$. Choisissons une fonction en escalier $\phi: [u, v] \rightarrow \mathbf{R}$ positive et décroissante telle que :

- (1) $\phi(u) = f(u)$,
- (2) $\sup_{[u, v]} |f - \phi| \leq \frac{\varepsilon}{(\sup_{[u, v]} |g|) |v - u|}$.

Alors $\left| \int_u^v f(x)g(x) dx - \int_u^v \phi(x)g(x) dx \right| \leq \varepsilon$.

Soient $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$, $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, $(d_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que :

- (1) $u = a_0 < \dots < a_n = v$,
- (2) $\phi(x) = b_k$ pour tout $x \in [a_{k-1}, a_k]$, $1 \leq k \leq n$,
- (3) $d_k = b_k - b_{k+1}$, $b_k = d_k + \dots + d_n$ pour $1 \leq k \leq n$ (si $b_{n+1} = 0$).

Alors

$$\begin{aligned} \int_u^v \phi(x)g(x) dx &= \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \phi(x)g(x) dx = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} g(x) dx \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} b_k (G(a_k) - G(a_{k-1})) = \left(\sum_{1 \leq k \leq n} d_k G(a_k) \right) - b_1 G(a_0) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} d_k (G(a_k) - G(a_0)). \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_u^v \phi(x)g(x) dx \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq n} 2d_k M = 2b_1 M = 2f(u)M.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_u^v f(x)g(x) dx \right| \leq 2f(u)M + \varepsilon.$$

D'où $\left| \int_u^v f(x)g(x) dx \right| \leq 2f(u)M$. Ce qui implique

$$\int_u^v f(x)g(x) dx \xrightarrow{v > u \rightarrow b^-} 0, \quad \text{car } \lim_{u \rightarrow b^-} f(u) = 0.$$

Ainsi $\int_a^b f(x)g(x) dx$ converge par le Critère de Cauchy. □

4. Exercices

EXERCICE 1.1. Monter la divergence de :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx, \\ \int_0^1 \frac{dx}{1-x^{1/2}}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}. \end{aligned}$$

EXERCICE 1.2. Convergence absolue :

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \sin(1/t) dt, \quad \int_0^\infty 2^{-x} x^4 dx, \\ \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}, \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 1.3. Convergence simple (semi-convergence) :

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx.$$

EXERCICE 1.4. Étudier la convergence ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^\infty \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx, \quad \int_0^\infty \cos(t^\alpha) dt.$$

EXERCICE 1.5. Montrer la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}, \quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4}, \quad \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{1+t^4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt.$$

EXERCICE 1.6. Montrer la convergence et calculer

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 1}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}.$$

EXERCICE 1.7. Montrer la convergence et calculer

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0).$$

EXERCICE 1.8. Montrer que les intégrales suivantes convergent et les calculer par récurrence :

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, \quad J_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Séries numériques

1. Définition et convergence de séries numériques

1.1. Définitions de base.

DÉFINITION. Soit $(a_n)_{n=n_0}^\infty$ une suite numérique (complexe). Alors la somme formelle $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ est dite une *série numérique*.

EXEMPLE. $\sum_{n=0}^\infty 1$ est une série.

DÉFINITION. Soit $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ une série. Alors sa *suite associée* $(A_n)_{n=n_0}^\infty$ est définie par $A_{n_0} = 0$ et $A_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ pour $n > n_0$.

DÉFINITION. Soient $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ une série et $(A_n)_{n=n_0}^\infty$ sa suite associée. Alors $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ *converge* si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ existe, et dans ce cas on définit la *somme* de $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ par

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

EXEMPLES. $\sum_{n=0}^\infty 0 = 0$, $\sum_{n=0}^\infty 1 = \infty$, $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} = 2$.

PROPOSITION (Linéarité de convergence). Si séries $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ et $\sum_{n=n_0}^\infty b_n$ **convergent**, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ la série $\sum_{n=n_0}^\infty (\lambda a_n + \mu b_n)$ converge et

$$\sum_{n=n_0}^\infty (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^\infty a_n + \mu \sum_{n=n_0}^\infty b_n.$$

COROLLAIRE. Si $\sum a_n$ **converge** mais $\sum b_n$ **diverge**, alors $\sum (a_n + b_n)$ *diverge*.

PROPOSITION (Comparaison des sommes). Si deux séries **réelles** $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ et $\sum_{n=n_0}^\infty b_n$ **convergent**, et si pour tout $n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$, alors

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n \leq \sum_{n=n_0}^\infty b_n.$$

PROPOSITION (Convergence d'une série complexe). Une série complexe $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ converge si et **seulement si** les séries $\sum_{n=n_0}^\infty \operatorname{Re}(a_n)$ et $\sum_{n=n_0}^\infty \operatorname{Im}(a_n)$ convergent toutes les deux, et dans ce cas

$$\sum_{n=n_0}^\infty a_n = \sum_{n=n_0}^\infty \operatorname{Re}(a_n) + i \sum_{n=n_0}^\infty \operatorname{Im}(a_n).$$

1.2. Les restes d'une série.

DÉFINITION. Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ est une série convergente, alors son *reste* à l'indice $n \geq n_0$ est la somme de la série (convergente) $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

PROPOSITION (Les restes d'une série convergente). Soit $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ une série **convergente** et soit pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit A la somme de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ et $(A_n)_{n=n_0}^{\infty}$ la suite associée. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ et pour tout $n \geq n_0$, $A_n + R_n = A$. $\square$

1.3. Critère de Cauchy.

DÉFINITION. On dit que la série $\sum a_n$ vérifie le *critère de Cauchy* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall p \geq N \forall q \geq p \text{ on a } \left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ satisfait le critère de Cauchy si et seulement si la suite associée $(A_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $A_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k$, satisfait le critère de Cauchy. Comme une suite numérique converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy, on a le théorème suivant.

THÉORÈME (Critère de Cauchy). Une série numérique $\sum a_n$ est convergente **si et seulement si** elle vérifie le critère de Cauchy.

COROLLAIRE. Une condition nécessaire pour que la série $\sum a_n$ converge est que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

DÉFINITION. Une série $\sum a_n$ est dite *grossièrement divergente* si et seulement si la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ n'est pas satisfaite.

EXEMPLE. La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge car pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.

1.4. Convergence absolue.

DÉFINITION. Une série $\sum a_n$ est dite *absolument convergente* si et seulement si la série $\sum |a_n|$ converge.

THÉORÈME (Convergence absolue implique convergence). Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors elle converge et

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|.$$

DÉMONSTRATION. Utiliser le critère de Cauchy. $\square$

1.5. Séries à termes positifs.

THÉORÈME (Convergence de séries positives). *Une série à termes réels positifs converge **si** et seulement si la suite associée est **majorée**, et dans ce cas la somme de la série est la borne supérieure de la suite associée.*

COROLLAIRE. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. Alors la série somme $\sum (a_n + b_n)$ converge si et **seulement si** les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.*

2. Étude de la convergence absolue

2.1. Comparaison de deux séries.

THÉORÈME (Comparaison par majoration). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels. Si $\sum b_n$ converge et s'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq b_n$, alors $\sum a_n$ converge.*

DÉMONSTRATION. Soient $(A_n)_{n=n_0}^\infty$ et $(B_n)_{n=n_0}^\infty$ les suites associées de $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ et $\sum_{n=n_0}^\infty b_n$ respectivement. Alors elles sont croissantes et $\forall n \geq n_0$, $A_n \leq B_n$. $\square$

COROLLAIRE (Comparaison par O). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. Si $\sum b_n$ converge **absolument** et si $a_n = O(b_n)$, $n \rightarrow \infty$, alors $\sum a_n$ converge absolument.*

DÉMONSTRATION. Soient M et N tels que $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq M |b_n|$. Comme $\sum |b_n|$ converge, $\sum M |b_n|$ converge aussi, et donc, par le théorème précédent, $\sum |a_n|$ converge. $\square$

COROLLAIRE (Comparaison par équivalence). *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs. Si $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.*

DÉMONSTRATION. $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, $n \rightarrow \infty$. $\square$

PROPOSITION (Convergence absolue d'une série complexe). *Une série complexe converge **absolument** si et **seulement si** sa partie réelle et sa partie imaginaire toutes les deux convergent absolument.*

DÉMONSTRATION. Si $z \in \mathbf{C}$, alors

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|. \quad \square$$

2.2. Séries géométriques.

DÉFINITION. Toute série complexe de la forme $\sum_{n=0}^\infty q^n$, $q \in \mathbf{C}$, $0^0 = 1$, est dite *série géométrique*.

PROPOSITION (Somme d'une série géométrique). *Si $|q| \geq 1$, alors la série $\sum_{n=0}^\infty q^n$ diverge (grossièrement). Si $|q| < 1$, alors la série converge et*

$$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}.$$

DÉMONSTRATION. Pour $q \neq 1$ et pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}. \quad \square$$

2.3. Règle de Cauchy. Rappel :

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_n \inf_{k \geq n} a_k, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k.\end{aligned}$$

Pour toute suite (a_n) , $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ existent comme éléments de $[-\infty, \infty]$, et $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

THÉORÈME (Règle de Cauchy). Soit $\sum a_n$ une série numérique. On pose

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Alors

- (1) si $\lambda < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument,
- (2) si $\lambda > 1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

DÉMONSTRATION. (1) Supposons $\lambda < 1$. Soit $\mu < 1$ tel que $\mu > \lambda$. Soit N tel que $\forall n \geq N$ $|a_n|^{1/n} \leq \mu$. Alors $\forall n \geq N$ $|a_n| \leq \mu^n$.

(2) Supposons $\lambda > 1$. Soit N tel que $\forall n \geq N$ $|a_n|^{1/n} \geq 1$. Alors $\forall n \geq N$ $|a_n| \geq 1$. $\square$

2.4. Règle de d'Alembert.

THÉORÈME (Règle de d'Alembert). Soit $\sum a_n$ une série numérique vérifiant $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Posons

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Alors

- (1) si $L < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument,
- (2) si $l > 1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

DÉMONSTRATION. (1) Supposons $L < 1$. Soit $\mu < 1$ tel que $\mu > L$. Soit N tel que $\forall n \geq N$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \mu$. Alors, par récurrence sur n , $\forall n \geq N$ $|a_n| \leq |a_N| \mu^{n-N} = \frac{|a_N|}{\mu^N} \mu^n$.

(2) Supposons $\lambda > 1$. Soit N tel que $\forall n \geq N$ $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$. Alors, par récurrence sur n , $\forall n \geq N$ $|a_n| \geq |a_N|$. $\square$

2.5. Comparaison d'une série et d'une intégrale.

THÉORÈME (Comparaison avec une intégrale). Soit $f: [n_0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ **monotone**. Alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ sont de même nature. Si f est **positive** et que l'intégrale $\int_{n_0}^{\infty} f(t) dt$ **converge**, alors pour tout $n > n_0$,

$$\int_n^{\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{\infty} f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'étudier le cas où $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Sans perte de généralité, supposons que f est décroissante. Alors f est positive.

Pour $x \in [n, n+1]$, $n \geq n_0$, on a $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Donc pour tous $p \geq n_0$ et $q \geq p$ tel que $p, q \in \mathbf{Z}$, on a

$$0 \leq \sum_{n=p+1}^{q+1} f(n) \leq \int_p^{q+1} f(t) dt \leq \sum_{n=p}^q f(n). \quad \square$$

2.6. Séries de Riemann.

DÉFINITION. Toute série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$, est dite *série de Riemann*.

PROPOSITION (Convergence d'une série de Riemann). *La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

DÉMONSTRATION. Comparaison avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. $\square$

2.7. Convergence commutative d'une série. Rappel : une *permutation* d'un ensemble X est une bijection de X sur lui-même.

DÉFINITION. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique (ou plus généralement une série à termes dans un espace vectoriel normé). On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est *commutativement convergente* si et seulement si pour toute permutation σ de $\mathbf{N}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge.

THÉORÈME (Convergence commutative de séries absolument convergentes). *Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente, et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{pour toute permutation } \sigma: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}.$$

3. Étude de la convergence simple

3.1. Convergence simple par la règle d'Abel.

LEMME (Transformation d'Abel). *Soient $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ deux suites numériques. Posons $B_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} b_k$ pour $n > n_0$ et $B_{n_0} = 0$. Alors pour tous $p \geq n_0$ et $q \geq p$, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q a_n (B_{n+1} - B_n) \\ &= \sum_{n=p}^q (a_n - a_{n+1}) B_{n+1} - a_p B_p + a_{q+1} B_{q+1}. \end{aligned}$$

THÉORÈME (Règle d'Abel). *Soient $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ et $(b_n)_{n=n_0}^{\infty}$ deux suites numériques qui vérifient les trois conditions suivantes :*

- (1) la suite $(\sum_{k=n_0}^n b_k)_{n=n_0}^{\infty}$ est bornée,
- (2) la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ converge,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

DÉMONSTRATION. Utiliser le critère de Cauchy et la transformation d'Abel.

Posons $B_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} b_k$ pour $n > n_0$ et $B_{n_0} = 0$. Posons $M = \sup_{n \geq n_0} |B_n|$, $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}|$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, par la transformation d'Abel, pour tous $p \geq n_0$ et $q \geq p$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n b_n &= \sum_{n=p}^q (a_n - a_{n+1}) B_{n+1} - a_p B_p + a_{q+1} B_{q+1}, \\ \sum_{n=p}^q |a_n b_n| &\leq R_p M + |a_p| M + |a_{q+1}| M \xrightarrow{p \rightarrow \infty, q \geq p} 0. \end{aligned} \quad \square$$

REMARQUE. Clairement, la condition « $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|$ converge » peut être remplacée par la condition « $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ est monotone ».

3.2. Séries alternées.

DÉFINITION. On appelle *série alternée* toute série de la forme $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ou de la forme $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$.

THÉORÈME (Test de convergence pour les séries alternées). Soit $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ une suite réelle **monotone** telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Alors la série alternée $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, et pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_n|.$$

DÉMONSTRATION. On va démontrer par le critère de Cauchy directement, sans utiliser la règle d'Abel.

Il suffit d'observer que pour tout $p \geq n_0$ et pour tout $q \geq p$,

$$\left| \sum_{n=p}^q (-1)^n a_n \right| \leq |a_p|$$

(cela se montre par récurrence sur $q - p$). □

4. Produit de Cauchy de deux séries

4.1. Définition générale du produit de Cauchy.

DÉFINITION. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries numériques (complexes). Alors le *produit de Cauchy*, ou la *série produit*, de ces deux séries est la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ où pour tout $n \geq 0$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

4.2. La somme du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

LEMME (Produit de séries positives convergentes). Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries **positives** convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge (absolument) et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

pour tout $n \geq 1$. Posons aussi

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} A_n,$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} B_n.$$

Alors pour tout $n \geq 1$,

$$C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n-1}.$$

Donc la suite croissante $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ est majorée par AB . Soit $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$. Alors $C \leq AB \leq C$. Donc $C = AB$. $\square$

THÉORÈME (Produit de séries absolument convergentes). Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n$ le produit de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$, c'est-à-dire $c'_n = \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}|$ pour tout $n \geq 0$. Cette série converge par le lemme précédent.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|c_n| \leq c'_n$. En particulier, la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolument.

Posons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k,$$

$$A'_n = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|, \quad B'_n = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|, \quad C'_n = \sum_{k=0}^{n-1} c'_k$$

pour tout $n \geq 1$. Posons aussi

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n, \quad A' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} A'_n,$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n, \quad B' = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} B'_n,$$

$$C' = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C'_n.$$

Alors, par le lemme, $C' = A'B'$.

Pour tout $n \geq 1$,

$$|A_n B_n - C_n| \leq A'_n B'_n - C'_n.$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on trouve que $C = AB$. □

5. Exercices

EXERCICE 2.1. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes dans $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant : $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que :

(1) $\sum b_n$ converge $\implies \sum a_n$ converge.

(2) $\sum a_n$ diverge $\implies \sum b_n$ diverge.

EXERCICE 2.2. Étudier la nature de la série de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

puis de la série de Bertrand

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

EXERCICE 2.3. Calculer la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}, \quad q \in \mathbf{R}_+^*, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

EXERCICE 2.4. Étudier la nature (type de convergence ou de divergence) des séries numériques suivantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

EXERCICE 2.5. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1)$$

converge. En déduire que la limite (appelée *constante d'Euler*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$$

existe.

EXERCICE 2.6. Étudier la nature des séries suivantes :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} [n \ln(1 + 1/n) - 2n/(2n+1)],$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n!)} \quad (\text{indication : montrer que } \ln n! \sim n \ln n),$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^c}{(2n)!}, \quad c > 0,$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n \sin 1/n)^{n^\alpha}$

(indication : utiliser le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin 1/n)^{n^2} = e^{-\frac{1}{6}}).$

EXERCICE 2.7. Nature des séries de terme général $u_n, n \geq 1$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}, \quad u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}, \quad u_n = (-1)^n \sqrt{n} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

EXERCICE 2.8. Nature des séries de terme général u_n , $n \geq 1$:

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), \quad u_n = \sin \frac{(-1)^n}{n}.$$

EXERCICE 2.9. Montrer que les séries de termes généraux (équivalentes!)

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, \quad n \geq 1$$

ne sont pas de même nature.

EXERCICE 2.10. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=0}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2.11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$. Montrer que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Suites et séries de fonctions

1. Convergence de suites de fonctions

1.1. Définitions de base.

DÉFINITION (Convergence simple). Soient E un ensemble, $(f_n)_n$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$, et $A \subset E$. On dit que $(f_n)_n$ *converge simplement sur A* vers $f: A \rightarrow \mathbf{C}$ si et seulement si pour tout $x \in A$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

DÉFINITION (Convergence uniforme). Soient E un ensemble, $(f_n)_n$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$, et $A \subset E$. On dit que $(f_n)_n$ *converge uniformément sur A* vers $f: A \rightarrow \mathbf{C}$ si et seulement si il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_A |f_n - f| < \infty$, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_A |f_n - f| = 0.$$

Notation : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{A} f$.

1.2. Opérations arithmétiques sur des suites et conditions pour la convergence uniforme du résultat.

PROPOSITION. Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, et $A \subset E$.

- (1) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers f et g , respectivement, sur A , alors $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\alpha f + \beta g$ (simplement) sur A .
- (2) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers f et g , respectivement, **uniformément** sur A , alors $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\alpha f + \beta g$ **uniformément** sur A .

DÉMONSTRATION. Pour $x \in A$,

$$\begin{aligned} |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \\ \leq |\alpha| |f_n(x) - f(x)| + |\beta| |g_n(x) - g(x)|. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION. Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$, et soit $A \subset E$.

- (1) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers f et g , respectivement, sur A , alors $(f_n g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers fg (simplement) sur A .
- (2) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers f et g , respectivement, **uniformément** sur A , et que f et g sont **bornées** sur A , alors $(f_n g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers fg **uniformément** sur A .

DÉMONSTRATION. (1) résulte de propriétés des limites de suites numériques.

(2) Pour $x \in A$,

$$\begin{aligned} f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x) &= (f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x)) \\ &\quad + f(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sup_A |f_n g_n - f g| &\leq \sup_A |f_n - f| \sup_A |g_n - g| \\ &\quad + \sup_A |f| \sup_A |g_n - g| + \sup_A |g| \sup_A |f_n - f|. \quad \square \end{aligned}$$

PROPOSITION. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}^*$, et soit $A \subset E$.

- (1) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f: E \rightarrow \mathbf{C}^*$ sur A , alors $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\frac{1}{f}$ (simplement) sur A .
- (2) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f: E \rightarrow \mathbf{C}^*$ **uniformément** sur A , et que la fonction $\frac{1}{f}$ est **bornée** sur A , alors $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\frac{1}{f}$ **uniformément** sur A .

DÉMONSTRATION. (1) résulte de propriétés des limites de suites numériques.

(2) Soit N tel que $\forall n \geq N$, $\sup_A |f_n - f| < \inf_A |f| = \frac{1}{\sup_A |f|} > 0$. Alors $\forall n \geq N \forall x \in A$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| &= \frac{|f(x) - f_n(x)|}{|f_n(x)f(x)|} \\ &\leq \frac{|f(x) - f_n(x)|}{(|f(x)| - |f(x) - f_n(x)|)|f(x)|}. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq N$,

$$\sup_A \left| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right| \leq \frac{\sup_A |f - f_n|}{(\inf_A |f| - \sup_A |f - f_n|) \inf_A |f|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

1.3. Le critère de Cauchy uniforme.

DÉFINITION. Soient (f_n) une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$ et $A \subset E$. On dit que (f_n) est *uniformément de Cauchy* sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall m \geq N \sup_A |f_n - f_m| \leq \varepsilon.$$

THÉORÈME. Soient (f_n) une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$ et $A \subset E$. Alors (f_n) est *uniformément de Cauchy* sur A si et seulement si il existe $f: A \rightarrow \mathbf{C}$ telle que (f_n) converge vers f **uniformément** sur A .

DÉMONSTRATION. ($\Leftarrow$) Supposons que f_n converge uniformément vers une fonction $f: A \rightarrow \mathbf{C}$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit N tel que $\forall n \geq N \forall x \in A$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $\forall n \geq N \forall m \geq N \forall x \in A$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où $\forall n \geq N \forall m \geq N$,

$$\sup_A |f_n - f_m| \leq \varepsilon.$$

Donc (f_n) est uniformément de Cauchy sur A .

($\Leftarrow$) Supposons que (f_n) est uniformément de Cauchy sur A . Alors pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ est de Cauchy, donc converge. Soit f la fonction $A \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in A.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit N tel que $\forall n \geq N \forall m \geq N \forall x \in A$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors $\forall n \geq N \forall x \in A$, l'inégalité $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ est satisfaite pour tout $m \geq N$. En passant à la limite quand $m \rightarrow \infty$, nous aurons que $\forall n \geq N \forall x \in A$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où $\forall n \geq N$,

$$\sup_A |f_n - f| \leq \varepsilon.$$

Donc (f_n) converge vers f uniformément sur A . □

2. Propriétés des limites

PROPOSITION (Limite des applications linéaires). *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) et (f_n) une suite d'applications **linéaires** $E \rightarrow \mathbf{K}$ convergeant simplement sur E vers une application $f: E \rightarrow \mathbf{K}$. Alors f est linéaire.*

DÉMONSTRATION. Pour tous $n, x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = \alpha f(x) + \beta f(y). \quad \square \end{aligned}$$

THÉORÈME (Limite uniforme de fonctions continues). *Soient E une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, (f_n) une suite d'applications $E \rightarrow \mathbf{C}$, et $x_0 \in E$. Supposons que pour tout n , f_n est **continue** en x_0 , et que (f_n) converge vers $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur E . Alors f est continue en x_0 .*

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit n tel que $\forall x \in E$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in E$,

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq \delta &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE. Il suffirait de demander la convergence uniforme sur un *voisinage* de x_0 .

COROLLAIRE. La limite uniforme sur E de fonctions continue sur E est continue sur E .

THÉORÈME (Limites d'une limite uniforme). Soient E une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, (f_n) une suite d'applications $E \rightarrow \mathbf{C}$, et x_0 un point d'accumulation de E . Supposons que pour tout n , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbf{C}$, et que (f_n) converge vers $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur $E \setminus \{x_0\}$. Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ existent et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit N tel que $\forall n \geq N \quad \forall m \geq N$
 $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

En passant à la limite $x \rightarrow x_0$, on obtient : $\forall n \geq N \quad \forall m \geq N \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\}$,
 $|l_m - l_n| \leq \varepsilon$. Donc la suite numérique (l_n) est de Cauchy, donc converge.
Posons $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit n tel que

$$\sup_{E \setminus \{x_0\}} |f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} |x - x_0| \leq \delta &\Rightarrow |f(x) - l| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

THÉORÈME (Intégrale d'une limite uniforme). Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et (f_n) une suite de fonctions **intégrables** $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Supposons que (f_n) converge vers $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ **uniformément** sur $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. Montrer que f est intégrable, c'est montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier $\phi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

- (1) $\forall x \in [a, b] \quad \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, et
- (2) $\int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) dx \leq \varepsilon$.

Soit n tel que

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Soient $\phi_0, \psi_0: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions en escalier telles que

$$(1) \quad \forall x \in [a, b] \quad \phi_0(x) \leq f_n(x) \leq \psi_0(x), \text{ et}$$

$$(2) \quad \int_a^b (\psi_0(x) - \phi_0(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \psi_0(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Alors $\phi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sont en escalier, $\forall x \in [a, b] \quad \phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, et

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \phi(x)) dx &= \int_a^b \left(\psi_0(x) - \phi_0(x) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \right) dx \\ &= \int_a^b (\psi_0(x) - \phi_0(x)) dx + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc f est intégrable.

Pour voir que $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup_{[a,b]} |f_n - f| dx \\ &= (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad \square \end{aligned}$$

THÉORÈME (Limite uniforme de fonctions continûment dérivables). *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite d'applications $I \rightarrow \mathbf{C}$ **continûment dérivables** sur I . Supposons que :*

$$(1) \quad f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{I} g: I \rightarrow \mathbf{C}, \text{ et}$$

$$(2) \quad f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \mathbf{C}.$$

Soit $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par :

$$f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad x \in I.$$

Alors pour tout $x \in I$, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ et $f'(x) = g(x)$.

DÉMONSTRATION. Pour tout n et pour tout $x \in I$, on a

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt.$$

Il résulte du théorème précédent que $\forall x \in I$,

$$\int_{x_0}^x f'_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Donc $\forall x \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt \right) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt = f(x). \quad \square$$

THÉORÈME (Limite uniforme de fonctions dérivables). *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite d'applications $I \rightarrow \mathbf{R}$ **dérivables** sur I . Supposons que :*

- (1) $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{I} g: I \rightarrow \mathbf{R}$, et
- (2) $f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in \mathbf{C}$.

Alors (f_n) converge (simplement) sur I vers une fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I telle que $f' = g$ et $f(x_0) = l$.

DÉMONSTRATION. Soient $x \in I$, $\varepsilon > 0$. Alors soit N tel que $\forall n \geq N$ $\forall m \geq N$

$$\left(\sup_I |f'_m - f'_n| \right) |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Par le théorème des accroissements finis, on conclut que $\forall n \geq N$ $\forall m \geq N$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc la suite numérique $(f_n(x))$ est de Cauchy, ainsi elle converge. Définissons $f: I \rightarrow \mathbf{C}$ par l'équation

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

Soient $x \in I$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires. Soit n tel que $\forall k \geq n$

$$\sup_I |f'_k - f'_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En passant en x à la limite $k \rightarrow \infty$, on a

$$|g(x) - f'_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $\delta > 0$ tel que $\forall h \in \mathbf{R}$ tel que $0 < |h| \leq \delta$ et $x + h \in I$,

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $k \geq n$, posons

$$s_k = f_k - f_n.$$

Alors pour tout $k \geq n$,

$$\sup_I |s_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $k \geq n$ et $\forall h \in \mathbf{R}^*$ tel que $x + h \in I$,

$$\left| \frac{s_k(x+h) - s_k(x)}{h} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $h \in \mathbf{R}$ arbitraire tel que $0 < |h| \leq \delta$ et $x + h \in I$. Alors pour tout $k \geq n$,

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - g(x) &= \left(\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right) \\ &\quad + \frac{s_k(x+h) - s_k(x)}{h} + (f'_n(x) - g(x)) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h} - g(x) \right| &\leq \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f'_n(x) \right| \\ &\quad + \left| \frac{s_k(x+h) - s_k(x)}{h} \right| + |f'_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En passant à la limite $k \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Donc $f'(x) = g(x)$. □

REMARQUE. Il est facile à vérifier dans les deux derniers théorèmes, que si l'intervalle I est borné, alors la convergence de (f_n) est uniforme sur I . (On utiliserait encore une fois le théorème des accroissements finis.)

3. Séries de fonctions

3.1. Convergence simple et convergence uniforme.

DÉFINITION. Soit $(f_n)_{n=n_0}^\infty$ une suite de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$. La série formelle $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ s'appelle une *série*. La *suite associée* à cette série est la suite $(F_n)_{n=n_0}^\infty$ des sommes partielles définies par :

$$F_{n_0}(x) = 0, \quad F_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n-1} f_k(x), \quad n > n_0,$$

pour $x \in E$. On dit que la série $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ *converge* (simplement) sur $A \subset E$ si et seulement si la suite $(F_n)_{n=n_0}^\infty$ converge sur A , et que $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ *converge uniformément* sur $A \subset E$ si et seulement si $(F_n)_{n=n_0}^\infty$ converge uniformément sur A . La limite de $(F_n)_{n=n_0}^\infty$ s'appelle la *somme* de la série.

DÉFINITION. Soit $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ une série. Alors la suite des *restes* $(R_n)_{n=n_0}^\infty$ de cette série est définie par :

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^\infty f_k(x)$$

pour tout x dans le *domaine de convergence*.

PROPOSITION. Soient $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ une série de fonctions qui converge sur A et $(R_n)_{n=n_0}^\infty$ sa suite des restes. Alors

- (1) $(R_n)_{n=n_0}^\infty$ converge vers 0 sur A ,
- (2) si $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ converge uniformément sur A , alors $(R_n)_{n=n_0}^\infty$ converge vers 0 uniformément sur A .

DÉMONSTRATION. Soient $(F_n)_{n=n_0}^\infty$ la suite associée de $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ et F la somme de $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$. Alors pour tout $n \geq n_0$ et pour tout x dans le domaine de convergence,

$$R_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F_N(x) - F_n(x)) = F(x) - F_n(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall x \left(F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right), \\ \sup_A |F_n - F| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \sup_A |R_n - 0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad \square$$

3.2. Le critère de Cauchy uniforme.

DÉFINITION. On dit que la série $\sum a_n$ est *uniformément de Cauchy* si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \text{ tel que } \forall p \geq N \forall q \geq p \text{ on a } \left| \sum_{n=p}^q a_n \right| \leq \varepsilon.$$

THÉORÈME (Critère de Cauchy). *Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur A .*

DÉMONSTRATION. Une série de fonctions est uniformément de Cauchy si et seulement si sa suite associée est uniformément de Cauchy. $\square$

3.3. Convergence uniformément absolue et convergence normale.

DÉFINITION. Une série de fonctions $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ est dite *uniformément absolument convergente* sur A si et seulement si la série $\sum_{n=n_0}^\infty |f_n|$ converge uniformément sur A .

DÉFINITION. Une série de fonctions $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ est dite *normalement convergente* sur A si et seulement si la série numérique $\sum_{n=n_0}^\infty \sup_A |f_n|$ converge.

PROPOSITION. *Si une série de fonctions $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ converge **uniformément absolument** sur A , alors elle y converge uniformément. Si une série de fonctions $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ converge **normalement** sur A , alors elle y converge uniformément absolument.*

DÉMONSTRATION. Utiliser le critère de Cauchy et les inégalités

$$\left| \sum_{n=p}^q f_n(x) \right| \leq \sum_{n=p}^q |f_n(x)| \leq \sum_{n=p}^q \sup_A |f_n|$$

pour $n_0 \leq p \leq q$ et $x \in A$. $\square$

3.4. Règle d'Abel uniforme.

THÉORÈME (Règle d'Abel uniforme). *Soient $(f_n)_{n=n_0}^\infty$ et $(g_n)_{n=n_0}^\infty$ deux suites de fonctions définies sur un ensemble E qui vérifient les trois conditions suivantes :*

- (1) *il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \geq n_0 \forall x \in E \left| \sum_{k=n_0}^n g_k(x) \right| \leq M$,*
- (2) *la série $\sum_{n=n_0}^\infty |f_n - f_{n+1}|$ converge uniformément sur E ,*
- (3) *la suite $(f_n)_{n=n_0}^\infty$ converge vers 0 uniformément sur E .*

Alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformément sur E .

DÉMONSTRATION. Utiliser le critère de Cauchy uniforme et la transformation d'Abel.

Posons $G_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k(x)$ pour $n > n_0$ et $x \in E$, et $G_{n_0}(x) = 0$ pour $x \in E$. Posons $M = \sup_{n \geq n_0, x \in E} |G_n(x)|$, $R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(x) - f_{k+1}(x)|$ pour tout $n \geq n_0$ et $x \in E$. Alors, par la transformation d'Abel, pour tous $p \geq n_0$ et $q \geq p$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q f_n(x) g_n(x) &= \sum_{n=p}^q f_n(x) (G_{n+1}(x) - G_n(x)) \\ &= \sum_{n=p}^q (f_n(x) - f_{n+1}(x)) G_{n+1}(x) \\ &\quad - f_p(x) G_p(x) + f_{q+1}(x) G_{q+1}(x) \\ \sum_{n=p}^q |f_n(x) g_n(x)| &\leq R_p(x) M + |f_p(x)| M + |f_{q+1}(x)| M \\ &\leq \sup_{x \in E} R_p(x) M + \sup_{x \in E} |f_p(x)| M + \sup_{x \in E} |f_{q+1}(x)| M \xrightarrow{p \rightarrow \infty, q \geq p} 0. \quad \square \end{aligned}$$

THÉORÈME (Test uniforme pour les séries alternées de fonctions). Soit $(f_n)_{n=n_0}^{\infty}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble E qui vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))_{n=n_0}^{\infty}$ est monotone,
- (2) la suite $(f_n)_{n=n_0}^{\infty}$ converge vers 0 uniformément sur E .

Alors la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n f_n$ converge uniformément sur E , et pour tous $x \in E$ et $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k f_k(x) \right| \leq |f_n(x)|.$$

DÉMONSTRATION. Utiliser la règle d'Abel uniforme et l'estimation du reste d'une série numérique du test pour les séries alternées numériques. $\square$

3.5. Propriétés des sommes de séries.

PROPOSITION (Séries des applications linéaires). Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) et $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série d'applications **linéaires** $E \rightarrow \mathbf{K}$ convergeant simplement sur E vers une somme $F: E \rightarrow \mathbf{K}$. Alors F est linéaire.

THÉORÈME (Continuité des sommes). Soient E une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série d'applications $E \rightarrow \mathbf{C}$, et $x_0 \in E$. Supposons que pour tout n , f_n est **continue** en x_0 , et que $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ converge vers $F: E \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur un voisinage de x_0 dans E . Alors F est continue en x_0 .

COROLLAIRE. Si une série de fonctions $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur E et tous ses termes sont continue sur E , alors la somme de cette série est continue sur E .

THÉORÈME (Limites des sommes). Soient E une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série d'applications $E \rightarrow \mathbf{C}$, et x_0 un point d'accumulation de E . Supposons que pour tout n , $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbf{C}$, et que $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ converge vers $F: E \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voisinage de x_0 dans E . Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} l_n$ existent et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} l_n.$$

THÉORÈME (Intégrale des sommes). Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions **intégrables** $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Supposons que $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ converge vers $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ **uniformément** sur $[a, b]$. Alors F est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

THÉORÈME (Séries de fonctions continûment dérivables). Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série d'applications $I \rightarrow \mathbf{C}$ **continûment dérivables** sur I . Supposons que :

- (1) $\sum_{n=n_0}^{\infty} f'_n$ converge vers $G: I \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur I , et
- (2) $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge vers $S \in \mathbf{C}$.

Soit $F: I \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par :

$$F(x) = S + \int_{x_0}^x G(t) dt, \quad x \in I.$$

Alors pour tout $x \in I$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x) = F(x)$ et $F'(x) = G(x)$.

THÉORÈME (Séries de fonctions dérivables). Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ une série d'applications $I \rightarrow \mathbf{R}$ **dérivables** sur I . Supposons que :

- (1) $\sum_{n=n_0}^{\infty} f'_n$ converge vers $G: I \rightarrow \mathbf{C}$ **uniformément** sur I , et
- (2) $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x_0)$ converge vers $S \in \mathbf{C}$.

Alors $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ converge sur I vers une somme $F: I \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur I telle que $F' = G$ et $F(x_0) = S$.

REMARQUE. Dans les deux derniers théorèmes, si l'intervalle I est borné, alors la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur I .

4. Exercices

4.1. Suites de fonctions.

EXERCICE 3.1. On considère pour $n \geq 1$ les fonctions sur $\mathbf{R}$:

- (1) $f_n(x) = x(1 - \frac{1}{n})$,
- (2) $g_n(x) = x - \frac{\sin x}{n}$,
- (3) $\phi_n(x) = e^{-n|x|} \sin(nx)$,
- (4) $\psi_n(x) = e^{-n|x|} \cos(nx)$.

Examiner la convergence simple et uniforme de ces suites de fonctions.

EXERCICE 3.2. Examiner la convergence simple et uniforme des suites (f_n) suivantes

- (1) $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1[$,
- (2) $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}, x \in [0, +\infty[$,
- (3) $f_n(x) = x/(x^2 + n), x \in \mathbf{R}$,
- (4) $f_n(x) = x e^{x/n}, x \in [0, \infty[$,
- (5) $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{x \sin(x)}$ si $x \notin \pi \mathbf{Z}$, et $f_n(x) = 0$ si $x \in \pi \mathbf{Z}$.

EXERCICE 3.3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/2n[, \\ n - n^2 x & \text{si } x \in [1/2n, 1/n], \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1]. \end{cases}$$

- (1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ et calculer la limite.
- (2) On pose $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$ ou $]0, 1[$?
- (3) Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ et $\int_0^1 f(x) dx$.

EXERCICE 3.4. Soit $f_n(x) = x/(1 + e^{nx}), x \in \mathbf{R}$.

- (1) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ et calculer la limite.
- (2) Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$ et $\int_0^\infty f(x) dx$.
- (3) (f'_n) est-elle uniformément convergente sur un intervalle $[-a, a]$ avec $a > 0$?

EXERCICE 3.5. Une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions converge uniformément sur chacun des segments $[a, b]$ et $[b, c]$ ($a < b < c$). Montrer qu'elle converge uniformément sur $[a, c]$.

EXERCICE 3.6. On considère une fonction f dont la dérivée est uniformément continue sur un intervalle $[a, +\infty[$. Montrer que la suite de terme général $n[f(x + \frac{2}{n}) - f(x + \frac{1}{n})], n \geq 1$, converge uniformément vers $f'(x)$ sur le même intervalle.

EXERCICE 3.7. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la suite $f_n(x) = \min(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$.

EXERCICE 3.8. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}, x \in [0, 1], n \geq 1$. En déduire la nature de la suite numérique $u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} dx$.

4.2. Séries de fonctions.

EXERCICE 3.9. Montrer que la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est uniformément convergente, mais n'est pas normalement convergente, sur $[0, 1]$.

EXERCICE 3.10. Étudier (convergences simple, absolue, uniforme, normale) les séries $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ où :

$$(1) f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{si } x = n, \\ 0, & \text{si } x \neq n, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

$$(2) f_n(x) = n^{-\alpha} x^2 e^{-nx^2}; \alpha > 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$(3) f_n(x) = x^\alpha (1-x)^n; \alpha > 1, 0 \leq x \leq 1.$$

$$(4) f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n^2 + |x|}, x \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 3.11. On considère la série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$, $x \in [0, +\infty[$.

- (1) Étudier la convergence (simple, uniforme, absolue, normale) de cette série.
- (2) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- (3) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x)}{x} = \infty$. L'application S est-elle dérivable en 0 ?
- (4) Etablir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

EXERCICE 3.12. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, où $u_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Comparer la régularité de la somme avec la régularité du terme général pour montrer que cette série n'est pas uniformément convergente. Faire la même chose avec $u_n = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3.13. Montrer que la fonction $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{n^n}$ est de classe C^∞ .

EXERCICE 3.14. Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$.

EXERCICE 3.15. On définit, pour $x \geq 0$, $f(x)$ par : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$. Étudier la dérivabilité de f , notamment en 0, à droite.

Séries entières

1. Définition et convergence de séries entières

DÉFINITION (Série entière). On appelle *série entière* de la variable complexe toute série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

c'est à dire une série de fonctions de terme général $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in \mathbf{C}$. On dit que a_n est le *coefficient d'ordre n* ; a_0 est le *terme constant*.

Opérations sur les séries entières (formelles) :

— *somme* :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n,$$

— *multiplication par un nombre* :

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n,$$

— *produit* :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Observation évidente : toute série entière converge en 0.

DÉFINITION (Rayon de convergence). Le *rayon de convergence* d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est défini par

$$R \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \left\{ |z| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\} \in [0, \infty].$$

On utilisera la notation

$$D(z_0, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{ z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r \} \quad (\text{disque ouvert}),$$

$$\bar{D}(z_0, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \{ z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r \} \quad (\text{disque fermé}).$$

PROPOSITION. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors

- (1) la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge sur le disque ouvert $D(0, R)$,
- (2) pour tout r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\bar{D}(0, r)$,

(3) la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge grossièrement en tout $z \in \mathbf{C} \setminus \bar{D}(0, R)$.

DÉMONSTRATION. Il est évident que (1) résulte de (2). Pour montrer (2) et (3), il suffit de vérifier que si $w \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{R}$, $0 \leq r < |w|$, et que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ ne diverge pas grossièrement, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, r)$.

Soit donc $w \in \mathbf{C}$ tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ ne diverge pas grossièrement, et soit r tel que $0 \leq r < |w|$. Alors la suite $(a_n w^n)_{n=0}^{\infty}$ est bornée. Soit $M = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n w^n|$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0, r)$ par comparaison avec la série géométrique convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|w|}\right)^n$, car $\frac{r}{|w|} < 1$, et pour tout $z \in \bar{D}(0, r)$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n w^n| \left(\frac{r}{|w|}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{|w|}\right)^n. \quad \square$$

DÉFINITION (Disque de convergence). Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors le disque ouvert $D(0, R)$ s'appelle le *disque de convergence* de cette série, et le cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle d'incertitude*.

THÉORÈME (Formule d'Hadamard). Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad \text{si} \quad 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \infty$, alors $R = 0$. Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$, alors $R = \infty$.

DÉMONSTRATION. Si $z \in \mathbf{C}$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n|^{1/n} = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right) |z|.$$

Il reste à appliquer la règle de Cauchy pour conclure que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge si

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$$

et diverge si

$$|z| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}.$$

Donc

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}. \quad \square$$

COROLLAIRE. Pour tout suite de coefficients complexes $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

THÉORÈME. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Supposons que $a_n \neq 0$ pour tout n suffisamment grand, et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe comme une limite finie

ou infinie. Alors

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{si} \quad 0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \infty.$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, alors $R = 0$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, alors $R = \infty$. Donc, en général,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

DÉMONSTRATION. Résulte de la règle de d'Alembert et de l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \quad \square$$

PROPOSITION. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières, soit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ leur série somme ($c_n = a_n + b_n$), et soit $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ leur série produit ($d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$). Soient R_1, R_2, R_3, R_4 leurs rayons de convergence respectifs. Alors

$$R_3 \geq \min\{R_1, R_2\} \quad \text{et} \quad R_4 \geq \min\{R_1, R_2\}.$$

DÉMONSTRATION. La somme et le produit de deux séries numériques absolument convergentes sont (absolument) convergentes, d'où

$$\bar{D}(0, R_3) \supset D(0, R_1) \cap D(0, R_2) \quad \text{et}$$

$$\bar{D}(0, R_4) \supset D(0, R_1) \cap D(0, R_2).$$

Donc

$$R_3 \geq \min\{R_1, R_2\} \quad \text{et} \quad R_4 \geq \min\{R_1, R_2\}. \quad \square$$

2. Étude de la fonction somme d'une série entière

THÉORÈME. La somme d'une série entière est une fonction continue en tout point de son disque de convergence.

DÉMONSTRATION. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Si $|z_0| < R$, alors soit $|z_0| < r < R$. Les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues et la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $D(0, r)$. Donc la somme est continue en z_0 . $\square$

DÉFINITION (Rappel de dérivabilité complexe). Soient $f: E \rightarrow \mathbf{C}$, $E \subset \mathbf{C}$, $z_0 \in E$. Supposons que f est définie dans un voisinage $D(z_0, \varepsilon) \subset E$ de z_0 , $\varepsilon > 0$. On dit que f est *dérivable* (au sens complexe) au point z_0 si et seulement si il existe $d \in \mathbf{C}$ tel que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = d.$$

Cette limite est alors appelée la *dérivée de f au point z_0* et notée $f'(z_0)$.

DÉFINITION. La *série dérivée* formelle d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$.

LEMME. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence.

DÉMONSTRATION. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$ ont le même domaine de convergence car $(n+1)a_{n+1}z^{n+1} = z((n+1)a_{n+1}z^n)$. Clairement, les séries $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^n$ ont le même domaine de convergence. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ ont le même rayon de convergence car

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |na_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad \square$$

THÉORÈME. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ sa fonction somme. Alors f est dérivable dans $D(0, R)$, et pour tout $z_0 \in D(0, R)$,

$$f'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n.$$

DÉMONSTRATION. Soit r tel que $|z_0| < r < R$. Pour tout $z \in D(0, r) \setminus \{z_0\}$, on a :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}).$$

Posons $u_1(z) = a_1$, $u_n(z) = a_n(z^{n-1} + z_0z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1})$ pour $n \geq 2$. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbf{C}$ et

$$\sup_{D(0, r)} |u_n| \leq n |a_n| r^{n-1}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (n |a_n| r^{n-1})^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} r^{\frac{n-1}{n}} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \\ &= 1 \cdot r \cdot \frac{1}{R} = \frac{r}{R} < 1, \end{aligned}$$

la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}$ converge d'après la règle de Cauchy. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge normalement sur $D(0, r)$, et donc sa somme est continue en z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nz_0^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n. \quad \square$$

COROLLAIRE. Soit f la fonction somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est infiniment dérivable dans $D(0, R)$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in D(0, R)$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n.$$

En particulier, $f^{(n)}(0) = n!a_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

THÉORÈME. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$ une série entière de variable réelle de rayon de convergence $R > 0$, et soit f sa fonction somme. Alors f est continue et

donc localement intégrable sur l'intervalle de convergence $] - R, +R[$, et pour tous $\alpha, \beta \in] - R, +R[$ tels que $\alpha < \beta$, on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

DÉMONSTRATION. Utiliser la convergence normale sur $[\alpha, \beta]$. $\square$

PROPOSITION. Si f est la somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de variable complexe à coefficients réels, alors pour tout z dans le domaine de convergence, $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^N a_n \bar{z}^n = \overline{\sum_{n=0}^N a_n z^n}.$$

En passant à la limite $N \rightarrow \infty$, on obtient : $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. $\square$

3. Développement en série entière

Dans cette section, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Rappel : un *voisinage* de $x_0 \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est tout $E \subset \mathbf{R}$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset E$; un *voisinage* de $z_0 \in \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ est tout $E \subset \mathbf{C}$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon) \subset E$.

A partir d'ici, on va considérer des séries entières de *centre* $z_0 \in \mathbf{C}$ arbitraire, c'est-à-dire les séries de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

DÉFINITION (Développement en série entière). Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, soit $z_0 \in \mathbf{K}$, et soit f une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de z_0 (dans $\mathbf{K}$). Un *développement de f en série entière au voisinage de z_0* est toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tel qu'il existe un voisinage D de z_0 (dans $\mathbf{K}$) tel que

$$\forall z \in D \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Un développement en série entière au voisinage de 0 s'appelle aussi un *développement à l'origine*.

EXEMPLE. $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ pour tout $z \in D(0, 1)$.

PROPOSITION. Si f est une fraction rationnelle de variable complexe, $z_0 \in \mathbf{C}$, et z_0 n'est pas un pôle de f , alors f est développable en série entière au voisinage de z_0 .

IDÉE DE DÉMONSTRATION. Décomposer f en éléments simples. $\square$

DÉFINITION. Soit $f: E \rightarrow \mathbf{C}$, $E \subset \mathbf{K}$. Supposons f est définie et infiniment dérivable au voisinage de $z_0 \in \mathbf{K}$. Alors on définit la *série de Mac Laurin* (ou *série de Taylor*) de f en z_0 comme la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

THÉORÈME. Soit $f: E \rightarrow \mathbf{C}$, $E \subset \mathbf{K}$. Supposons que f est définie et développable en série entière au voisinage de 0. Alors

- (1) f est infiniment dérivable dans un voisinage de 0,
- (2) il existe un seul développement de f en série entière au voisinage de 0, qui coïncide avec sa série de Taylor en 0.

DÉMONSTRATION. Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et D un voisinage ouvert de 0 tels que

$$\forall z \in D \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors, par le corollaire du théorème de dérivation de la somme d'une série entière, f est infiniment dérivable dans l'intersection de D avec le disque de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, et $f^{(n)}(0) = n!a_n$, donc $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. $\square$

REMARQUE. Si $f: E \rightarrow \mathbf{C}$, $E \subset \mathbf{C}$, et si f est définie et dérivable au sens complexe dans un voisinage de z_0 , alors la théorie de fonctions complexes dit que f est développable en série entière au voisinage de z_0 . Cela n'est pas le cas si $E \subset \mathbf{R}$, même si on suppose que f est infiniment dérivable (au sens réel) dans un voisinage de z_0 .

EXEMPLE. Soit

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) & \text{si } t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que f est infiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. La série de Mac Laurin de f est donc nulle et f ne peut coïncider avec elle sur aucun voisinage de l'origine.

Rappel : formule de Taylor-Lagrange. Soit $f:]-r, r[\rightarrow \mathbf{R}$ continûment dérivable sur $] -r, r[$ jusqu'à l'ordre $(n+1)$. Alors

$$\forall t \in]-r, +r[\quad \exists \theta \in [0, 1] \quad f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}.$$

THÉORÈME. Soient $r > 0$, $E \subset \mathbf{R}$ tel que $] -r, r[\subset E$, et $f: E \rightarrow \mathbf{C}$ telle que :

- (1) f est infiniment dérivable sur $] -r, +r[$,
- (2) il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\sup_{]-r, +r[} |f^{(k)}| \leq M$.

Alors pour tout $t \in]-r, +r[$, $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$.

DÉMONSTRATION. Il résulte de la formule de Taylor-Lagrange que pour tout $t \in]-r, +r[$,

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \\ & \leq \left| \operatorname{Re} f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{Re} f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| + \left| \operatorname{Im} f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{Im} f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \\ & \leq \frac{2Mr^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(où $\operatorname{Re} f$ est la partie réelle de f et $\operatorname{Im} f$ est sa partie imaginaire). $\square$

EXEMPLE. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ satisfont les conditions du théorème précédent pour tout $r > 0$. Donc on en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On peut utiliser ces formules pour définir les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sur $\mathbf{C}$.

PROPOSITION. Soit f la fonction somme d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de variable réelle ou complexe de rayon de convergence non nul. Alors

- (1) f est paire si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n impair,
- (2) f est impaire si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n pair.

4. La fonction exponentielle complexe

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

DÉFINITION (Exponentielle complexe). La fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ s'appelle la *fonction exponentielle complexe*, notée $\exp(z)$ ou e^z . On définit aussi $e \stackrel{\text{déf}}{=} \exp(1)$.

PROPOSITION. La fonction $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $\exp' = \exp$, $\exp(0) = 1$;
- (2) pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$; il en résulte que $\exp(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ et que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$;
- (3) pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ et $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z) > 0$.

DÉMONSTRATION. (1) La série dérivée formelle de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est encore $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, et on applique le théorème de dérivation de la somme d'une série entière.

(2) On a $e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$ avec (d'après la formule du binôme)

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}.$$

(3) Comme $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $|\exp(z)| = \sqrt{\exp(z) \overline{\exp(z)}} = \sqrt{\exp(z + \bar{z})} = \sqrt{\exp(2 \operatorname{Re} z)} = \sqrt{(\exp(\operatorname{Re} z))^2} = \exp(\operatorname{Re} z)$ car $\exp(\operatorname{Re} z) > 0$. $\square$

PROPOSITION. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

DÉMONSTRATION. Résulte des développements de $\cos$ et $\sin$ à l'origine et $e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}$. $\square$

La formule dans la proposition reste vraie pour tout $t \in \mathbf{C}$.

THÉORÈME. L'application $z \mapsto e^z$, $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^*$, est un morphisme continu surjectif (mais non-injectif) du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbf{C}^*, \times)$. Son noyau est l'ensemble $2\pi i\mathbf{Z}$.

IDÉE DE DÉMONSTRATION. Pour la surjectivité, utiliser la formule

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad x, y \in \mathbf{R}. \quad \square$$

5. Quelques développements standards

5.1. Développement de $\ln(1+x)$ à l'origine. Par dérivation de $\ln(1+x)$, on trouve que, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{d}{dx} x^{n+1}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ est la série dérivée de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, le rayon de convergence commun de ces deux séries est 1. Soit f la fonction somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ dans $] -1, 1[$. Alors les dérivées de f et de $x \mapsto \ln(1+x)$ coïncident sur $] -1, 1[$, et $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 = \ln(1+0)$, donc (par corollaire du théorème des accroissements finis) $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$. Donc

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{pour } -1 < x < 1.$$

5.2. Développement de $(1+x)^\alpha$ à l'origine. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors pour tout x tel que $|x| < 1$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

où

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + 1 - k}{k}$$

sont les *coefficients binomiaux généralisés*.

Démonstration : posons $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ pour $x \in D(0, 1)$, alors

$$(1+x)u'(x) = \alpha u(x) \quad \text{et} \quad u(0) = 1, \quad \text{donc} \quad u(x) = (1+x)^\alpha.$$

On a utilisé que $\binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha}{n} \frac{\alpha-n}{n+1}$.

6. Exercices

EXERCICE 4.1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ suivantes :

- (1) $a_n = \frac{\cosh(n)}{\sinh^2(n)}$,
- (2) $a_n = \arccos(1 - \frac{1}{n^2})$,
- (3) $a_n = (1 + ne^{-n})^{n^2+1} - 1$,
- (4) $a_n = \arcsin(\frac{n+1}{1+n\sqrt{2}}) - \frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 4.2. Après avoir déterminé leur rayon de convergence R , sommer les séries entières suivantes :

- (1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$,
- (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ (pour $x > 0$),
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ (pour $x \in \mathbf{R}$),
- (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \frac{x^n}{n!}$.

EXERCICE 4.3. Soit c_n , pour $n \in \mathbf{N}$, le nombre de couples $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ tels que $x + 2y = n$.

- (1) Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ où $a_n = 1$ pour tout n et où $b_n = 1$ si n est pair et $b_n = 0$ si n est impair.
- (2) Calculer les rayons de convergence et les sommes à l'intérieur du disque de convergence de ces trois séries.
- (3) Soit $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $C(z)$ et en déduire l'expression explicite de c_n en fonction de n .

EXERCICE 4.4. Former le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

- (1) $f(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(x)}$ si $\sin(x) \neq 0$, $f(x) = 5$ sinon,
- (2) $f(x) = \ln(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$ (indication : factoriser $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$),
- (3) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1+x})$,
- (4) $f(z) = \cos(z) \cosh(z)$, $z \in \mathbf{C}$.

EXERCICE 4.5. Former le développement en série entière en 1 de la fonction arctan.

EXERCICE 4.6. Dans cet exercice, on évitera d'utiliser le développement en série entière explicite de la fonction arcsin.

- (1) Développer en série entière la fonction $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto (\arcsin x)^2$. Pour ce faire, on pourra montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 2.$$

- (2) Montrer que la fonction $g: [0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$, $x \neq 0 \mapsto \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$, $0 \mapsto 1$ coïncide avec la somme d'une série entière, et calculer ses coefficients. Pour ce calcul, on pourra dériver la relation $x(1-x)g(x)^2 = (\arcsin \sqrt{x})^2$ afin d'obtenir l'équation différentielle

$$2x(1-x)g'(x) + (1-2x)g(x) = 1.$$

EXERCICE 4.7. Calculer par récurrence les intégrales $I_{k,l} = \int_0^1 x^k (\ln x)^l dx$ ($k, l \in \mathbf{N}$). En déduire l'égalité $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$. (Indication : développer $x^{-x} = e^{-x \ln x}$ en série entière de $y = -x \ln x$.)

EXERCICE 4.8. (1) Développer en série entière la fonction arcsin. Montrer que la série de fonctions qui développe arcsin converge normalement sur $[-1, 1]$.

- (2) Du calcul de $\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t)) dt$ de deux façons, déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

EXERCICE 4.9. Soit $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

- (1) Montrer que S est continue sur $] -1, 1[$.
- (2) Montrer que pour tout $t \in] -1, 1[$, $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1-t^{k+1}}$. (Indication : utiliser le théorème d'interversion des sommations des séries doubles.)
- (3) En déduire que $S(t) \sim_{t \rightarrow 1-} \frac{\ln(2)}{1-t}$.

EXERCICE 4.10 (Inverse d'une série entière). Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Supposons que $a_0 \neq 0$.

- (1) Montrer qu'il existe une suite unique $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $a_0 b_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$ pour tout $n \leq 1$. Quel est le produit de Cauchy des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$?
- (2) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est de rayon de convergence > 0 . (Méthode : Se ramener au cas $a_0 = 1$. Soit $0 < r < R$, il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|a_n r^n| \leq M$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|b_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.)

EXERCICE 4.11. Soient $t \in \mathbf{R}$ et $\lambda > 0$. On considère $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $tq_{n+1} = (n+2)q_{n+2} + (\lambda+n)q_n$ avec $q_0 = 1$ et $q_1 = t$.

- (1) Soient $\epsilon > 0$ et $v_n = |q_n|$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $v_{n+2} \leq \epsilon v_{n+1} + (1+\epsilon)v_n$.
- (2) Montrer que le rayon de convergence de $\sum v_n z^n$ est $\geq \frac{1}{1+\epsilon}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum q_n z^n$ est ≥ 1 .
- (3) On considère la fonction $f_t:] -1, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$. Montrer que $tf_t(x) = \lambda x f_t(x) + (x^2 + 1)f_t'(x)$. Quelle est la valeur de $f_t(x)$?

Séries de Fourier

1. Séries trigonométriques

DÉFINITION. Soient $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ et $T > 0$. On dit que f est *périodique de période T* , ou encore *T -périodique*, si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

EXEMPLE. $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de périodes 2π , 4π , 6π , etc., et $x \mapsto e^{2\pi i x}$ est périodique de périodes 1 , 2 , 3 , etc.

REMARQUE. Si f est périodique de période T , alors $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ est périodique de période 2π . On peut donc ramener l'étude d'une fonction périodique au cas où elle est 2π -périodique.

REMARQUE. Pour donner une fonction périodique de période 2π , il suffit de la donner sur $[0, 2\pi[$ ou sur n'importe quel intervalle (semi-)fermé de longueur 2π .

DÉFINITION. On appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions de variable réelle de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

En utilisant la formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, on peut écrire tout terme d'une série trigonométrique sous la forme exponentielle :

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, & b_n &= i(c_n - c_{-n}), \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \end{aligned}$$

On pose aussi $a_0 = 2c_0$, $b_0 = 0$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$. Alors la série trigonométrique ci-dessus s'écrit comme

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}).$$

Parfois au lieu de cette série on considère encore la série formelle

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

DÉFINITION. On dit que une série formelle $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ converge (resp. converge uniformément, normalement, etc.) si et seulement si les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(x)$ convergent (resp. convergent uniformément, convergent normalement, etc.), et dans ce cas on définit sa somme par

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n}(x) \\ &= f_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + f_{-n}(x)). \end{aligned}$$

DÉFINITION. On appelle *série trigonométrique de période T* toute série de fonctions de variable réelle de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega n x) + b_n \sin(\omega n x)).$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

DÉFINITION. Une fonction périodique de période $T > 0$ s'appelle aussi une fonction de *pulsation* $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

LEMME. Pour tous $k, n \in \mathbf{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{int}} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par calcul. $\square$

THÉORÈME. Supposons que la série $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Soit f sa fonction somme. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Alors

(1) f est continue et 2π -périodique, et pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

(2) f est aussi la somme de la série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

DÉMONSTRATION. Le fait que f est périodique est immédiat. Elle est continue comme la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, considérons la somme partielle

$$f_p(x) = c_0 + \sum_{k=1}^p (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{k=-p}^p c_k e^{ikx}.$$

Alors $(f_p)_{p=0}^\infty$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$. Puisque

$$|f_p(x)e^{-inx} - f(x)e^{-inx}| = |f_p(x) - f(x)| |e^{-inx}| = |f_p(x) - f(x)|,$$

la suite $(f_p(x)e^{-inx})_{p=0}^\infty$ converge uniformément vers $f(x)e^{-inx}$ sur $\mathbf{R}$ aussi. Par le théorème d'intégration de limites uniformes,

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f_p(t)e^{-int} dt = 2\pi c_n,$$

car d'après le lemme précédent, pour tout $p \geq |n|$,

$$\int_0^{2\pi} f_p(t)e^{-int} dt = \sum_{k=-p}^p c_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt = 2\pi c_n.$$

Les formules pour a_n et b_n résultent de la formule pour c_n et des relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$. $\square$

PROPOSITION. *Si la série numérique $\sum_{n=1}^\infty (|c_n| + |c_{-n}|)$ converge, alors la série $c_0 + \sum_{n=1}^\infty (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$ converge normalement sur $\mathbf{R}$, et sa fonction somme est continue et 2π -périodique.*

DÉMONSTRATION. Utiliser la majoration

$$|c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}| \leq |c_n| + |c_{-n}| \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}. \quad \square$$

2. Séries de Fourier

DÉFINITION. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique et localement intégrable sur $\mathbf{R}$ (où intégrable sur $[0, 2\pi]$). On appelle *coefficients de Fourier exponentiels* de f les nombres complexes

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbf{Z},$$

et *coefficients de Fourier trigonométriques* de f les nombres complexes

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbf{N}.$$

On appelle la *série de Fourier* de f la série trigonométrique

$$\begin{aligned} SF(f) &\stackrel{\text{déf}}{=} c_0(f) + \sum_{n=1}^\infty (c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx}) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)). \end{aligned}$$

REMARQUE. On déduit immédiatement de la définition de coefficients de Fourier que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Dans le cas particulier où f est à valeurs réelles, $a_n(f) \in \mathbf{R}$, $b_n(f) \in \mathbf{R}$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

LEMME. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique et localement intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t) + f(-t)) \cos(nt) dt, \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t) - f(-t)) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Comme f est 2π -périodique,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos(nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(-t) \cos(-nt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t) + f(-t)) \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

D'une façon analogue on obtient la formule pour $b_n(f)$. $\square$

COROLLAIRE. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique et localement intégrable sur $\mathbf{R}$.

(1) Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = 0.$$

(2) Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n(f) = 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

EXEMPLES. (1) Soit f_1 la fonction 2π -périodique sur $\mathbf{R}$ définie par : $f_1(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f_1(t) = -1$ pour $t \in]-\pi, 0[$, et $f_1(0) = f_1(\pi) = 0$. Alors

$$SF(f_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \sin((2n+1)t)}{\pi(2n+1)}.$$

(2) Soit f_2 la fonction 2π -périodique sur $\mathbf{R}$ définie par : $f(t) = t^2$ pour $|t| \leq \pi$. Alors

$$SF(f_2) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cos(nt)}{n^2}.$$

LEMME. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique et localement intégrable sur $\mathbf{R}$. Supposons que f est de pulsation $p \in \mathbf{N}^*$ (i.e. de période $\frac{2\pi}{p}$). Alors pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$, $c_n(f) = 0$, et pour tout $n \in p\mathbf{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{p}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) e^{-int} dt.$$

DÉMONSTRATION. Comme f est $\frac{2\pi}{p}$ -périodique, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned}
 c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\frac{2\pi k}{p}}^{\frac{2\pi(k+1)}{p}} f(t) \overline{e^{int}} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \overline{e^{in(t + \frac{2\pi k}{p})}} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \overline{\left(\sum_{k=0}^{p-1} e^{in(t + \frac{2\pi k}{p})} \right)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \overline{e^{int} \left(\sum_{k=0}^{p-1} e^{in \cdot \frac{2\pi k}{p}} \right)} dt \\
 &= \frac{\overline{\sum_{k=0}^{p-1} e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p} \cdot k}}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) e^{-int} dt.
 \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p} \cdot k} = \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p}} \right)^k = \begin{cases} p & \text{si } n \in p\mathbf{Z}, \\ 0 & \text{si } n \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}, \end{cases}$$

car pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p}} \right)^k = \frac{1 - e^{i \cdot 2\pi n}}{1 - e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i \cdot \frac{2\pi n}{p}}} = 0. \quad \square$$

Il résulte de ce lemme que pour toute fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et $\frac{2\pi}{p}$ -périodique avec $p \in \mathbf{N}^*$ (i.e. de pulsation p),

$$SF(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{pk}(f) \cos(pkx) + b_{pk}(f) \sin(pkx)),$$

où pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
 a_{pk}(f) &= \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \cos(pkt) dt, \\
 b_{pk}(f) &= \frac{p}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{p}} f(t) \sin(pkt) dt.
 \end{aligned}$$

3. Théorème de Dirichlet

Question : La série de Fourier de f , a-t-elle pour somme la fonction f elle-même ?

Notation : Soient $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$. Définissons

$$f(x_0^+) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_0^-) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

THÉORÈME (Théorème de Dirichlet). Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique, localement intégrable sur $\mathbf{R}$. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Supposons que les limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^-)}{h}$$

existent et sont finies. Alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers $\frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$:

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(f)e^{inx_0} + c_{-n}(f)e^{-inx_0}) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

COROLLAIRE. Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction 2π -périodique et continue sur $\mathbf{R}$, et que f possède les dérivées à droite et à gauche en tout point, alors f est la fonction somme de sa série de Fourier.

Pour démontrer le théorème de Dirichlet, on a besoin du lemme de Riemann-Lebesgue.

LEMME (Riemann-Lebesgue). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Alors

$$\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)e^{i\mu t} dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(\mu t) dt = 0.$$

DÉMONSTRATION. On va calculer seulement la première limite car la deuxième en résulte par la relation

$$\int_a^b f(t) \sin(\mu t) dt = \frac{1}{2i} \left(\int_a^b f(t)e^{i\mu t} dt - \int_a^b f(t)e^{-i\mu t} dt \right)$$

(ou elle peut être calculée d'une façon analogue).

(1) Supposons que f soit une fonction caractéristique d'un sous-intervalle $[c, d]$ dans $[a, b]$:

$$f(x) = \chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [c, d], \\ 0 & \text{si } x \in [a, b] \setminus [c, d], \end{cases}$$

$$\left| \int_a^b f(t)e^{i\mu t} dt \right| = \left| \int_c^d e^{i\mu t} dt \right| = \left| \left[\frac{e^{i\mu t}}{i\mu} \right]_c^d \right| = \frac{|e^{i\mu d} - e^{i\mu c}|}{|\mu|} \leq \frac{2}{|\mu|}$$

$$\xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} 0.$$

(2) Supposons que f soit réelle en escalier ou complexe constante par morceaux. Alors f s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de sous-intervalles de $[a, b]$: il existe des sous-intervalles $I_1, \dots, I_n$ de $[a, b]$ et des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \alpha_1 \chi_{I_1}(x) + \dots + \alpha_n \chi_{I_n}(x).$$

Alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\mu t} dt = \alpha_1 \int_a^b \chi_{I_1}(t)e^{i\mu t} dt + \dots + \alpha_n \int_a^b \chi_{I_n}(t)e^{i\mu t} dt$$

$$\xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} 0$$

d'après (1).

(3) Supposons que f soit réelle (et intégrable). Soit $\varepsilon > 0$. Alors soit $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ en escalier telle que

$$\int_a^b |f(t) - \phi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit N tel que pour tout μ tel que $|\mu| > N$,

$$\left| \int_a^b \phi(t) e^{i\mu t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(on a utilisé (2) ici). Alors pour tout μ tel que $|\mu| > N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{i\mu t} dt \right| &= \left| \int_a^b \phi(t) e^{i\mu t} dt + \int_a^b (f(t) - \phi(t)) e^{i\mu t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \phi(t) e^{i\mu t} dt \right| + \int_a^b |f(t) - \phi(t)| |e^{i\mu t}| dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\mu t} dt \right| \xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} 0.$$

(4) Le cas général (f complexe intégrable) :

$$\int_a^b f(t) e^{i\mu t} dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) e^{i\mu t} dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) e^{i\mu t} dt \xrightarrow{|\mu| \rightarrow \infty} 0$$

d'après (3). □

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DIRICHLET. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, posons

$$S_n = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx_0} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Il reste à prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la fonction $t \mapsto f(t) e^{-int}$ est 2π -périodique, et donc

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(t) e^{-int} dt, \\ S_n &= \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx_0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x_0-t)} dt. \end{aligned}$$

Posons $\phi_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$. Remarquons immédiatement que ϕ_n est une fonction paire $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ et que

$$\int_0^\pi \phi_n(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \phi_n(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^\pi e^{ikt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi e^0 dt = \pi.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(t) \phi_n(x_0 - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - h) \phi_n(h) dh \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 + h) \phi_n(-h) dh + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x_0 - h) \phi_n(h) dh \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h)) \phi_n(h) dh. \end{aligned}$$

(on a effectué les changements de variable $x_0 - t = h$ et $h \leftrightarrow -h$, et utilisé le fait que ϕ_n est paire). Comme $\int_0^{\pi} \phi_n(t) dt = \pi$, on a

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - f(x_0^+) - f(x_0^-)) \phi_n(h) dh.$$

Comme

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \phi_n(x) &= \frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{2i} \left(\sum_{k=-n}^n e^{ikx} \right) \\ &= \frac{e^{\frac{ix}{2}+inx} - e^{-\frac{ix}{2}-inx}}{2i} = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \end{aligned}$$

on trouve

$$\phi_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{pour } x \in]0, 2\pi[.$$

Posons

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+) + f(x_0 - h) - f(x_0^-)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)} \quad \text{pour } h \in]0, \pi]$$

et $g(0) = 0$ (valeur arbitraire). Comme g est bornée sur $[0, \pi]$ et intégrable sur tout intervalle $[a, \pi]$ avec $a \in]0, \pi]$, elle est intégrable sur $[0, \pi]$ (à vérifier!).

Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(h) \sin\left(\frac{2n+1}{2}h\right) dh \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

par le lemme de Riemann-Lebesgue. $\square$

EXEMPLE. Les deux fonctions f_1 et f_2 de l'exemple de la section 2 vérifient les hypothèses du théorème de Dirichlet en tout $t \in \mathbf{R}$. Aussi dans les deux cas on a $\frac{f_i(t^+) + f_i(t^-)}{2} = f_i(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$. Donc f_1 et f_2 sont les fonctions sommes de ses séries de Fourier, qui convergent simplement sur $\mathbf{R}$. On peut maintenant déduire les identités remarquables suivantes :

(1) en appliquant le théorème de Dirichlet à f_1 en $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = [SF(f_1)]\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{f_1\left(\frac{\pi}{2}^+\right) + f_1\left(\frac{\pi}{2}^-\right)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4};$$

(2) en appliquant le théorème de Dirichlet à f_2 en 0, on a

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = [SF(f_2)](0) = \frac{f_2(0^+) + f_2(0^-)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0,$$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}.$$

4. Formule de Parseval

THÉORÈME (Formule de Parseval). *Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique, localement intégrable sur $\mathbf{R}$. Soient $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels, et $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ses coefficients de Fourier trigonométriques (définis comme d'habitude). Alors la formule suivante, dite formule de Parseval, est vérifiée :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \\ &= \frac{1}{4} |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2). \end{aligned}$$

REMARQUE. (1) La formule de Parseval est vraie même si $SF(f)$ ne converge pas simplement vers f . En plus, elle est vraie même si f n'est pas bornée, sous la condition que l'intégrale généralisée $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ converge.

(2) L'égalité

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{4} |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

résulte des relations

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)).$$

On peut commencer par vérifier la formule de Parseval lorsque f est une fonction trigonométrique de la forme $f(x) = S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$.

Définissons une *forme sesquilinéaire* $(\bullet|\bullet)$ (semi-linéaire en première variable et linéaire en deuxième) sur l'espace de fonctions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 2π -périodiques et localement intégrables sur $\mathbf{R}$ comme suit :

$$(f|g) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Notons que $(f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$. Il a été déjà remarqué que pour tous $k, l \in \mathbf{Z}$, $(x \mapsto e^{ikx} | x \mapsto e^{ilx}) = \delta_{kl}$, où δ_{kl} est le *symbole de Kroneker* :

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt &= (S_n|S_n) = \left(x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \middle| x \mapsto \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx} \right) \\
&= \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \sum_{l=-n}^n c_l (x \mapsto e^{ikx} | x \mapsto e^{ilx}) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \sum_{l=-n}^n c_l \delta_{kl} \\
&= \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Pour comprendre d'où vient la formule de Parseval, on peut démontrer le lemme suivant, analogue au théorème de Pythagore.

LEMME. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction 2π -périodique, localement intégrable sur $\mathbf{R}$, et soient $(c_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ses coefficients de Fourier exponentiels. Posons $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt \\
&= \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt \geq \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
(S_n|f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{S_n(t)} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) dt \\
&= \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \\
&= (S_n|S_n)
\end{aligned}$$

d'après un calcul précédent.

Donc $(S_n|f - S_n) = (S_n|f) - (S_n|S_n) = 0$, $(f - S_n|S_n) = \overline{(S_n|f - S_n)} = \overline{0} = 0$, et ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= (f|f) = (S_n + (f - S_n)|S_n + (f - S_n)) \\
&= (S_n|S_n) + (S_n|(f - S_n)) + ((f - S_n)|S_n) + ((f - S_n)|(f - S_n)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(t)|^2 dt + 0 + 0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt. \quad \square
\end{aligned}$$

Le lemme précédent implique immédiatement l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Pour démontrer la formule de Parseval, il reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0.$$

Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour cela est que la série de Fourier de f converge uniformément vers f ; ceci est le cas, par exemple, si f est continûment dérivable. Dans le cas général, on peut approximer f par des fonctions continûment dérivables.

La formule de Parseval dans le cas général est admise.

EXEMPLE. Reprenons les fonctions f_1 et f_2 de l'exemple de la section 2.

(1) Pour f_1 , la formule de Parseval donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n+1)} \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f_1)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(2) Pour f_2 , la formule de Parseval donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \right)^2 &= \frac{1}{4} |a_0(f_2)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_2)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{5}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

LEMME. Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction 2π -périodique, continue sur $\mathbf{R}$ et continûment dérivable par morceaux, alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} c(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (-in) e^{-int} dt \\ &= 0 + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = inc_n(f). \quad \square \end{aligned}$$

THÉORÈME. Si $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction 2π -périodique, continue sur $\mathbf{R}$ et continûment dérivable par morceaux, alors la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ converge, et donc $SF(f)$ converge vers f normalement sur $\mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION. Comme $c_n(f) = \frac{-ic_n(f')}{n}$, on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Bessel pour f' et le théorème de Dirichlet pour f . $\square$

5. Exercices

EXERCICE 5.1. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t) = |\sin(t)|$.

EXERCICE 5.2. Soit f définie pour tout t par $f(t) = \sup(\cos t, 0)$. Calculer le développement en série de Fourier de f .

EXERCICE 5.3. Soit p un nombre entier strictement positif, et soit $f(t)$ une fonction continue périodique de période $\frac{2\pi}{p}$ sur $\mathbf{R}$. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, n n'est pas divisible par p , alors les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier de f sont nuls.

EXERCICE 5.4. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $g(t) = |\sin(t)| + |\cos(t)|$. (Remarque : cette fonction est paire et périodique de période $\pi/2$).

EXERCICE 5.5. Soit f périodique de période 2π : $f(t) = a$ pour $t \in]0, L]$, $0 < L < 2\pi$, $f(t) = 0$ pour $t \in]L, 2\pi]$. Calculer le développement en série de Fourier de f .

EXERCICE 5.6. Développement en série de Fourier de $t \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 t}$.

EXERCICE 5.7. Soit f périodique de période 2π : $f(t) = t$ pour $t \in]-\pi, \pi[$, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

(1) Calculer le développement en série de Fourier de f .

(2) En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ (utiliser l'égalité de Parseval).

EXERCICE 5.8. Soit f impaire, périodique de période 2π : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f(0) = f(\pi) = 0$.

(1) Calculer le développement en série de Fourier de f . En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(2) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (utiliser l'égalité de Parseval).

EXERCICE 5.9. Soit f périodique de période 2π : $f(t) = |t|$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.

(1) Calculer le développement en série de Fourier de f . En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

(2) Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ (utiliser l'égalité de Parseval).

EXERCICE 5.10. Soit f impaire, périodique de période 2π : $f(t) = t(\pi - t)$ pour $t \in [0, \pi]$.

(1) Calculer le développement en série de Fourier de f . En déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

- (2) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ (utiliser l'égalité de Parseval).

EXERCICE 5.11. Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Soit f périodique de période 2π définie par : $f(t) = \cos(at)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.

- (1) Calculer le développement en série de Fourier de f .

- (2) Montrer que $\frac{\pi}{\tan(\pi a)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$. Par dérivation en déduire

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(a\pi))^2}.$$

EXERCICE 5.12. Soit $u \in]-1, 1[$ et $f(t) = \frac{1}{1 - 2u \cos t + u^2}$. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement. On note a_n ses coefficients. Montrer que les a_n satisfont la relation

$$ua_{n+1} - (1 + u^2)a_n + ua_{n-1} = 0 \quad \forall n > 0.$$

Calculer a_0 et trouver α et β tels que pour tout n on ait $a_n = \alpha u^n + \frac{\beta}{u^n}$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1 - u^2}{1 - 2u \cos t + u^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u^n \cos nt.$$

EXERCICE 5.13. Chercher une solution développée en série de Fourier de l'équation différentielle : $y'' - y = f(t)$ avec f paire de période 2π : $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi}$ pour $t \in [0, \pi]$.