Exo 16.

<u>Déf</u> Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Un endomorphisme de G est un morphisme $f : G \to G$

Soit $\varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$\varphi(f)$ est l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$x \longmapsto f(x) + f(-x)$$

1. M.q. φ est un endomorphisme de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$

φ est définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Il nous reste à vérifier que φ est un homomorphisme ;

i.e. à vérifier : $\forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\varphi(f+g)$ est donnée par $x \longmapsto (f+g)(x) + (f+g)(-x) =$

$= f(x) + g(x) + f(-x) + g(-x)$

$\varphi(f) + \varphi(g)$ est donnée par $x \longmapsto \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) =$

$f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x)$

On a bien égalité (pour tout $x \in \mathbb{R}$), donc

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

2. Décrire $\ker(\varphi)$, $\mathrm{im}(\varphi)$.

$\ker(\varphi) := \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \varphi(f) = 0_{\mathcal{F}} \}$ où $0_{\mathcal{F}}$ désigne l'application constante nulle $x \mapsto 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\ker(\varphi) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = 0 \} =$$

$$= \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(-x) = 0 \} =$$

$$= \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \} =$$

l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires

$$\operatorname{im}(\varphi) := \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \boxed{f = \varphi(g)} \}$$

$$= \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + g(-x) \}$$

Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paires. On a évidemment $\operatorname{im}(\varphi) \subset \mathcal{P}$. En effet, Si $f \in \operatorname{im}(\varphi)$, il existe $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = g(x) + g(-x)$$

On a donc $f(-x) = g(-x) + g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On va démontrer que $\mathcal{P} \subset \operatorname{im} \varphi$, donc on va conclure que $\operatorname{im}(\varphi) = \mathcal{P}$

M.q. $\mathcal{P} \subset \operatorname{im} \varphi$:

Soit $f \in \mathcal{P}$. À montrer $f \in \operatorname{im}(\varphi)$, i.e à montrer qu'il existe $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + g(-x)$

On va choisir $g = \frac{1}{2} f$. Avec ce choix on a bien :

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exo 17   1 Trouver les endomorphismes de $(\mathbb{Z},+)$

Pour $a \in \mathbb{Z}$ considérons l'application $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, donnée par

$f_a(k) = ak$

f_a est un endomorphisme :

$\forall (k,\ell) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\ f_a(k+\ell) = a(k+\ell) = ak + a\ell = f_a(k) + f_a(\ell)$

On va démontrer que $\mathrm{End}(\mathbb{Z},+) = \{ f_a \mid a \in \mathbb{Z} \}$

Soit $f \in \mathrm{End}(\mathbb{Z},+)$. Posons $a := f(1) \in \mathbb{Z}$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = f(k\cdot 1) = k f(1) = ka = ak = f_a(k)$

d'après le cours

Conclusion $f = f_a$, où $a = f(1)$

Conclusion : $\mathrm{End}(\mathbb{Z},+) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

Remarque $f_a \circ f_b = f_{ab}$ En effet :

$$f_a \circ f_b(k) = f_a(f_b(k)) = f_a(bk) = \underbrace{ab}\,k = f_{ab}(k)$$

Soit $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z},+) \Longrightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z},\ f = f_a$

$\Downarrow$

$f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z},+) \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{Z},\ f^{-1} = f_b$

$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{Z}} = f_1$; $f_a \circ f_b = f_1 \Longrightarrow f_{ab} = f_1 \Longrightarrow ab = 1$

$\Longrightarrow a \in \{\pm 1\} \Longrightarrow f = f_a \in \{\pm id_{\mathbb{Z}}\}$

Conclusion : $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z},+) = \{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}\} = \{\underset{\underset{-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}}{\parallel}}{f_{-1}}, \underset{\underset{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}}{\parallel}}{f_1}\}$

2. Trouver tous les endomorphismes de $(\mathbb{Q},+)$.

$\mathrm{End}(\mathbb{Q},+) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$, où $f_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est donnée par $f_a(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$

À continuer. Étudier le corrigé de la planche TD2.

Exo 18 Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Soit $\iota : G \to G$ définie par $\iota(x) = x^{-1}$

1. M.q ι est un morphisme ssi G est abélien

$(G,\cdot)$ est abélien $\Longrightarrow$ ι est un morphisme

Supposons $(G,\cdot)$ abélien. Soient $x, y \in G$

$$\iota(x\cdot y) = (x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1} \underset{ab}{\overset{G\text{ est}}{=}} x^{-1}\cdot y^{-1} = \iota(x)\cdot\iota(y)$$

ι est un morphisme $\Longrightarrow$ $(G,\cdot)$ est abélien

Supposons que ι est un morphisme. Soient $x, y \in G$

on a $x^{-1}, y^{-1} \in G$

$$\begin{array}{ccc} \iota(x^{-1}\cdot y^{-1}) & = & \iota(x^{-1})\cdot\iota(y^{-1}) \\ \| & & \| \\ (x^{-1}\cdot y^{-1})^{-1} & & x\cdot y \\ \| & & \\ y\cdot x & & \end{array}$$

Conclusion

$x\cdot y = y\cdot x$ pour tous $x, y \in G$, donc $(G,\cdot)$ est abélien

2. En supposant $(G,\cdot)$ abélien, m.q. ι est un isomorphisme.

<u>Rappel</u> Soient $f : A \to B$, $g : B \to A$ t.q. $g\circ f = id_A$, $f\circ g = id_B$. Alors f, g sont bijectives et $g = f^{-1}$

En particulier, soit $f : A \to A$ une involution (i.e. $f \circ f = \mathrm{id}_A$). Alors f est bijective et $f^{-1} = f$

L'application ι est une involution (parce que $\forall x \in G$, $\iota \circ \iota(x) = (x^{-1})^{-1} = x$), donc est bijective

On a supposé $(G, \cdot)$ est abélien, donc ι est un morphisme. Puisque ι est bijectif, il en résulte que ι est un isomorphisme

3. Supposons $(G, \cdot)$ abélien. Préciser le sous-groupe cyclique $\langle \iota \rangle \subset \mathrm{Aut}(G)$ engendré par ι.

$$\iota^2 = \iota \circ \iota = id_G \Longrightarrow ord(\iota) \in \{1, 2\}$$

Cas 1

$$ord(\iota) = 1 \Longleftrightarrow \iota = id_G \Longleftrightarrow \forall x \in G,\ \underset{\underset{x^{-1}}{\parallel}}{\iota(x)} = x$$

Dans l'exo 3 nous avons vu que tout groupe fini qui satisfait cette condition est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2^k, +)$

Dans ce cas $\langle \iota \rangle = \{ id_G \}$

Cas 2

$ord(\iota) = 2$ $\qquad \langle \iota \rangle = \{ id_G, \iota \}$

Exo 19

1. M.q $(\mathbb{R}^*_+, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$, $\exp(x) = e^x$

exp est bijective et $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

exp definit un isomorphisme $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$

2 $U_n \simeq \mathbb{Z}_n$

U_n est cyclique engendré par $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $\mathrm{ord}(\zeta) = n$

$$\overset{U_n}{\overset{\|}{\left\{ e^{\frac{2\pi i k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}}} = \left\{ \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^k \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\} = \langle \zeta \rangle$$

D'après le cours il en résulte $U_n \simeq \mathbb{Z}_n$. Plus précisément, l'application

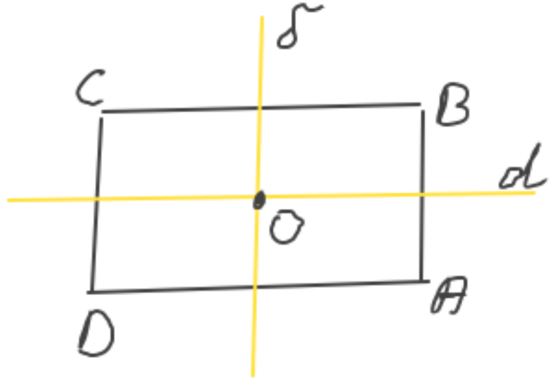
$g_\zeta : \mathbb{Z}_n \longrightarrow U_n$, donnée par

$$g_\zeta([k]_n) = \zeta^k$$

3. Soit $\overset{R_{''}}{ABCD}$ un rectangle (qui n'est pas un carré) dans le plan euclidien

À dém: $Iso(R) = \{ f \in Iso(\mathbb{R}^2, d) \mid f(\{A, B, C, D\}) = \{A, B, C, D\} \}$

$(Iso(R), \circ) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$



$Iso(R) = \{ id, s_d, s_\delta, R_\pi \}$ où R_θ désigne la rotation d'angle θ et centre O (le centre de symétrie du rectangle)

Soit $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow Iso(R)$

définie par :

$f(([0],[0])) = id$

$f(([1],[0])) = s_d$

$f(([0],[1])) = s_\delta$

$f(([1],[1])) = s_d \circ s_\delta = R_\pi$

Exercice f ainsi définie est bien un isomorphisme de groupes.