Exercice :

Préciser $\mathbb{Z}^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, $\mathbb{Z}[X]^\times$, $\mathbb{R}[X]^\times$

$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ $\quad k \in \mathbb{Z}^\times \Longrightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{Z}, \ k\ell = 1 \Rightarrow |k|\cdot|\ell| = 1$

$\Downarrow$

$|k| = 1$

$\Downarrow$

$k \in \{\pm 1\}$

$\mathbb{Z}_{12}^\times = \{[1], [5], [7], [11]\}$

$\mathbb{Z}[X]^\times = \{\pm 1\}$ où on a identifié un élément $a \in A$ avec le polynôme constant associé

Si $\deg(P(X)) \geq 1$, alors pour un polynome $Q(X) \neq 0$ on a

$\deg(P(X)\,Q(X)) \geq 1 \Rightarrow P(X)\cdot Q(X) \neq 1$

$\mathbb{R}[X]^* = \mathbb{R}^*$ (où un élément $a \in \mathbb{R}$ est identifié au polynome constant $(a, 0, \ldots, 0 \ldots)$ associé)

Généralisation :

Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif intègre.

Alors $A[X]^\times = A^\times$