Exo 12   1   Résoudre l'équation : $\boxed{4x - 9y = 108}$ (E)

$a = 4$

$b = -9$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Soit

$d := pgcd(4, 9) = 1$

$d \mid 108 \xRightarrow[\text{cons}]{}$ l'équation admet des solutions, i.e.

$S \neq \emptyset$

$\shortparallel$

l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

On va déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\boxed{4u - 9v = 1}$

$9 = 4 \cdot 2 + 1$ $q_1 = 2$, $r_1 = 1 = 9 - 4 \cdot 2 = 4 \cdot (-2) - (-1) 9$

$r_1 = pgcd(4, 9)$

On peut choisir $u = -2$; $v = -1$

Solution particulière de (E) : $x_0 = (-2) \cdot 108 = -216$

$y_0 = (-1) \cdot 108 = -108$

$4x_0 = -864$

$-9y_0 = 972$

$x_0 = -216 \ ; \ y_0 = -108$

$4x - 9y = \underbrace{108 = 4x_0} - 9y_0$

$4(x - x_0) = 9(y - y_0)$

$\text{pgcd}(4,9) = 1$

Rappel :

Soient m, n premiers entre eux.

$X, Y \in \mathbb{Z}$

$mX = nY \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},$

$X = kn, Y = km$

$x - x_0 = 9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$y - y_0 = 4k$

$243 -$
216

$S = \{(-216 + 9k, -108 + 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2. M.q. $S = \{(9(k+3), 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ $-216 + 9(\ell + 27)$

$S = \{(-216 + 9k, -\underbrace{108}_{= 4 \cdot 27} + 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(\underbrace{-216 + 9k}, 4(\overbrace{k - 27}^{\ell})) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{(27 + 9\ell, 4\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$

$$\boxed{= \{ (9(k+3), 4k) \mid k \in \mathbb{Z} \}}$$

3. M.q. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $pgcd(x,y) \mid 108$

Soit $\delta := pgcd(x,y)$ $\qquad 4x - 9y = 108$

$(\delta \mid x \wedge \delta \mid y) \Longrightarrow \delta \mid (4x - 9y) \Longrightarrow \delta \mid 108$

4. Préciser $S \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

Soit $x = 9(k+3)$ t.q. $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$y = 4k$ $\qquad$ (i.e. $x \geq 0, y \geq 0$)

$\Updownarrow$

$k \geq 0$

$\Longrightarrow x \geq 0$

$(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Longleftrightarrow k \in \mathbb{N}$

$S \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \{ (9(k+3), 4k) \mid k \in \mathbb{N} \}$

5. Preciser les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, $\text{pgcd}(x,y) = 18 = 2\cdot 3^2$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 9(k+3) \\ y &= 4k \end{aligned}}$$

$\text{pgcd}(x,y) \mid 108$; $108 = 2^2 \cdot 3^3$

$18 \mid y \Rightarrow 9 \mid y$

$9 \mid 4k \Rightarrow 9 \mid k$

(1) k est divisible par 9.

$\Updownarrow$

$k \in 9\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} 18 \mid x \Rightarrow 2 \mid x \\ 2 \mid 9(k+3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 \mid k+3, \text{ donc}$$

(2) k est impair

(3)

$k+3$ n'est pas divisible par 4

(sinon 4 serait diviseur commun)

(2), (3) $\Longleftrightarrow$ $k+3 \in 4\mathbb{Z}+2 \Longleftrightarrow k \in 4\mathbb{Z}+3$

Condition necessaire :

$$k \in 9\mathbb{Z} \cap (4\mathbb{Z}+3)$$

k n'est pas divisible par 27 (sinon $27 \mid y$ et $27 \mid x$, faux)

Conclusion :

$$pgcd(x,y) = 18 \Longleftrightarrow k \in 9\mathbb{Z} \cap (4\mathbb{Z}+3) \setminus 27\mathbb{Z}$$

13. $109x - 226y = 1 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1 $pgcd(109, 226)$

$$226 = 2 \cdot 109 + 8$$
$$109 = 13 \cdot 8 + 5$$
$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$r_1 = 8 = (-2) \cdot 109 + 226$$
$$r_2 = 5 = 109 - 13((-2) \cdot 109 + 226)$$
$$= 27 \cdot 109 - 13 \cdot 226$$
$$r_3 = 3 = r_1 - r_2 =$$

$$r_3 = 3 = r_1 - r_2 = (-2)\cdot 109 + 226 - (27\cdot 109 - 13\cdot 226)$$
$$= -29\cdot 109 + 14\cdot 226$$

$5 = 1\cdot 3 + 2$

$$r_4 = 2 = 5 - 1\cdot 3 = r_2 - r_3 = 27\cdot 109 - 13\cdot 226 - (-29\cdot 109 + 14\cdot 226) = 56\cdot 109 - 27\cdot 226$$

$3 = 1\cdot 2 + 1$

$$r_5 = 1 = 3 - 2 = r_3 - r_4 = -29\cdot 109 + 14\cdot 226 - (56\cdot 109 - 27\cdot 226) = -\underbrace{85\cdot 109}_{9265} + \underbrace{41\cdot 226}_{9266}$$

$\mathrm{pgcd}(109, 226) = 1$

$\overset{\shortparallel}{d}$ $\quad d \mid 1$. D'après le cours

$S \neq \emptyset$

2. À montrer $S = \{(141 + 226k, 68 + 109k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

solution particulière : $x_0 = -85$, $y_0 = -41$

$$S = \{(-85+226k, -41+109k) \mid k \in \mathbb{Z}\} =$$

$$\| \; k = \ell+1$$

$$= \{(-85+226(\ell+1), -41+109(\ell+1)) \mid \ell \in \mathbb{Z}\} =$$

$$= \{(141+226\ell, 68+109\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$$

En déduire $\exists! (d,e) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $1 \leq d \leq 226$ et $109d = 1+226e$

$$\underline{141+226\ell} \in \{1,\dots,226\} \Longleftrightarrow \ell = 0$$

$$(d,e) = (141, 68)$$

Planche TD 2

1. Donner la liste des couples $(\lambda, \eta) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$ t.q $\lambda \cdot \eta = [0]_{12}$

$\lambda = [k]_{12}$, $\eta = [\ell]_{12}$, où $k, \ell \in \{0, 1, \dots 11\}$

Il suffit de donner la liste des couples
$(k, \ell) \in \{0, \dots 11\}^2$ t.q. $\boxed{12 \mid k\ell}$

A. La liste des solutions (k, ℓ) avec $3 \mid k$, $3 \nmid \ell$

(i) Si $k = 0$: $(0,1), (0,2), (0,4), (0,5), (0,7), (0,8), (0,10), (0,11)$

(ii) Si $k = 3$: $(3,4), (3,8)$
$(4 \mid \ell)$

(iii) Si $k = 6$: $(6,2), (6,4), (6,8), (6,10)$
$(2 \mid \ell)$

(iv) $k = 9$ $(4 \mid \ell)$: $(9,4), (9,8)$

<u>Conclusion</u> les solutions (k, ℓ) avec $3 \mid k$, $3 \nmid \ell$:

$(0,1), (0,2), (0,4), (0,5), (0,7), (0,8), (0,10), (0,11), (3,4), (3,8),$
$(6,2), (6,4), (6,8), (6,10), (9,4), (9,8)$

B. La liste des solution (k, ℓ) avec $3 \nmid k$, $3 \mid \ell$:
$(1,0), (2,0), (4,0) \ldots$ on permute les composantes des couples de la liste A

C. La liste des solutions (k, ℓ) t.q $3 \mid k$ et $3 \mid \ell$:
$(0,0), (0,3), (0,6), (0,9), (3,0), (6,0), (9,0), (6,6)$

Conclusion : Nous avons $2 \cdot 16 + 8 = 40$ solutions.

2. Résoudre l'équation $x^2 - [5]_{12} x + [6]_{12} = [0]_{12}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$

$$x^2 - [5] x + [6] = \boxed{(x - [2])(x - [3])}$$

$$\| $$

$$x^2 - ([2] + [3]) x + [2] \cdot [3]$$

$x = [k]$, où $k \in \{0, \dots, 11\}$

$$[k]^2 - [5][k] + [6]$$

$$\| $$

problème équivalent :

Trouver $k \in \{0, \dots 11\}$ t.q $[k^2 - 5k + 6] = [0]$,

$$\Updownarrow$$

$$k^2 - 5k + 6 \equiv 0 \quad [12]$$

$$\Updownarrow$$

$$12 \mid k^2 - 5k + 6$$

$$k^2 - 5k + 6 = (k - 2)(k - 3)$$

on va utiliser un tableau :

$(k-2)(k-3)$

k	k^2-5k+6	$x^2-[5]x+[6]$
0	6	[6]
1	2	[2]
2	0	[0]
3	0	[0]
4	2	[2]
5	6	[6]
6	12	[0]
7	20	[8]
8	30	[6]
9	42	[6] (Zélie)
10	56	[8]
11	72	[0]

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{[2], [3], [6], [11]\}$$