Exo 2.3 (cours)

$n_1 = 4 \quad n_2 = 5 \quad n_3 = 7$ (Rq : ces nbs sont premiers entre eux deux à deux)

$y_1 = 2 \quad y_2 = 3 \quad y_3 = 3$

On cherche $x \in \mathbb{Z}$ tq $\begin{cases} x \equiv y_1 [4] \\ x \equiv y_2 [5] \\ x \equiv y_3 [7] \end{cases}$

Dans l'ennoncé du cours on a écrit q au lieu de x

Par definition $n = \prod_{i=1}^{3} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 140$

$\hat{n}_1 = n_2 \cdot n_3 = 35$

$\hat{n}_2 = n_1 \cdot n_3 = 28$

$\hat{n}_3 = n_1 \cdot n_2 = 20$

D'après le cours $pgcd(n_i, \hat{n}_i) = 1$ donc $\exists (u_i, v_i) \in \mathbb{Z}^2$ tq $u_i n_i + v_i \hat{n}_i = 1$

(1) on cherche $(u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tq $4u_1 + 35 v_1 = 1$

on peut prendre $u_1 = 9$ et $v_1 = -1$ alors $x_1 = 35 v_1 = -35$

(2) on cherche $(u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tq $5u_2 + 28v_2 = 1$
On peut prendre $U_2 = -11$ et $v_2 = 2$, donc $x_2 = 28v_2 = 56$

(3) on cherche $(u_3, v_3) \in \mathbb{Z}^2$ tq $7u_3 + 20v_3 = 1$
On peut prendre $U_3 = 3$ et $v_3 = -1$
donc $x_3 = 20v_3 = -20$

D'après le cours, une solution de congruences $x \equiv y_i [n_i]$
et $x = \sum_{i=1}^{3} y_i x_i = 2\cdot(-35) + 3\cdot(56) + 3(-20) = -70 + 168 - 60$
Pour répondre à la question du cours $= 38$
on peut prendre $m = x_1$; $n = x_2$; $p = x_3$

Exo 3 TD2

$[x] \in \mathbb{Z}_{330}$ tq $\begin{cases} x \equiv 2\,[6] \\ x \equiv 3\,[5] \\ x \equiv 10\,[11] \end{cases}$

$n_1 = 6$ $n_2 = 5$ $n_3 = 11$ sont bien premier entre eux deux à deux. $y_1 = 2$ $y_2 = 3$ $y_3 = 10$

$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 330$

$\hat{n}_1 = n_2 \cdot n_3 = 55$

$\hat{n}_2 = n_1 \cdot n_3 = 66$

$\hat{n}_3 = n_1 \cdot n_2 = 30$

(I) on cherche $(u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tq $6u_1 + 55v_1 = 1$

$u_1 = -9$; $v_1 = 1$ donc $x_1 = 55 v_1 = 55$

(II) on cherche $(u_2 ; v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tq $5u_2 + 66 v_2 = 1$

$u_2 = -13$; $v_2 = 1$ donc $x_2 = 66 v_2 = 66$

(III) — $(u_3 ; v_3) \in \mathbb{Z}^2$ tq $11 u_3 + 30 v_3 = 1 \Rightarrow u_3 = 11$; $v_3 = -4$

$x_3 = 30 v_3 = -4 \cdot 30 = -120$

$$x = \sum_{i=1}^{3} y_i x_i = 2 \cdot 55 + 3 \cdot 66 + 10 \cdot (-120) = 110 + 198 - 1200$$
$$= -892$$

On prendre ainsi la solution $x' = x + 3 \times 330 = 98$

<u>Proposition 1.15</u> (cours p. 20)

Soit $(G, \circ)$ groupe, soit $H \subset G$. H est un sous-groupe de $(G, \circ)$ ssi

(1) $e \in H$

(2) $\forall (x, y) \in H^2, (x \circ y) \in H$

(3) $\forall x \in H, x' \in H$

<u>Rappel</u> Par déf H est sous-groupe ssi

(i) $H \neq \emptyset$

(ii) $\forall (x, y) \in H^2, xy' \in H$

I

$$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}(i)\\(ii)\end{array}\right.$$

Supposons que (1), (2), (3) sont vérifiées

Démontrons :

(i) : $\underbrace{e \in H}_{\text{d'après } (1)} \Rightarrow H \neq \emptyset$

(ii) : Soient $x, y \in H$

A démontrer : $x \circ y' \in H$

$$\left.\begin{array}{l} y \in H \xRightarrow[(3)]{} y' \in H \\ \qquad\qquad\quad x \in H \end{array}\right\} \xRightarrow[(2)]{} x \circ y' \in H$$

II

$$\left.\begin{array}{l}(i)\\(ii)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\right.$$

Supposons que (i), (ii) sont vérifiées.

Démontrons :

(1) : $\underbrace{H \neq \emptyset}_{\text{d'après } (i)} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\exists x \in H\\ x \in H\end{array}\right\} \xRightarrow[(ii)]{}$

$$\xRightarrow[(ii)]{} x \circ x' \in H \Rightarrow e \in H$$

(3) : Soit $\left.\begin{array}{l}x \in H\\ e \in H\end{array}\right\} \xRightarrow[(ii)]{} e \circ x' \in H \Rightarrow x' \in H$

(2) : Soient $x, y \in H \overset{(3)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} y' \in H \\ x \in H \end{array}\right\} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \underbrace{x \circ (y')'}_{= \, x \circ y} \in H$