Exo 5 planche TD2

faites : Q1, Q2

Rappel Q2. $(\mathbb{R}[X], +)$ groupe abélien

muni de + et de la multiplication avec les scalaires, $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel réel (de dimension infinie)

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel (de dim finie $n+1$) de $\mathbb{R}[X]$, en particulier est un sous-groupe de $(\mathbb{R}[X], +)$, donc, muni de l'addition, est un groupe abélien.

$(\mathbb{R}^n, +)$ groupe abélien $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$. On peut utiliser la construction du groupe produit.

3, 4. $(U, \cdot)$ où $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

D'après le cours : $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ groupe abélien

$U_n \subset U \subset \mathbb{C}^*$ sont des inclusions de sous-groupe

Donc U_n, U deviennent des groupes (si munis de la lci induite, c'est à dire de la multiplication)

5. $(S(E), \circ)$, où $S(E) := \{f : E \to E \mid f \text{ bijective}\}$, $\circ$: la composition

est un groupe : id_E est l'élément neutre

le symétrique de $f \in S(E)$ est f^{-1}

voir le cours.

6. (X,d) espace métrique

$Iso(X) := \{ f : X \to X \mid f$ est une isométrie bijective $\} \subset S(X)$

Rappel $f : X \to X$ est dite isométrie si

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \quad d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \quad (*)$$

Il suffit de montrer que $Iso(X)$ est un sous-groupe de $S(X)$. À vérifier:

(1) $id_X \in Iso(X)$. vraie, parce que $id_X(x_1) = x_1$

$id_X(x_2) = x_2$

donc id_X vérifie $(*$

(2) $\forall f, g \in Iso(X)$, $f \circ g \in Iso(X)$

Soient f et $g \in Iso(X)$. Mq $f \circ g \in Iso(X)$. Soit $(x_1, x_2) \in X \times X$.

$$d((f\circ g)(x_1), (f\circ g)(x_2)) = d(f(\underbrace{g(x_1)}_{y_1}), f(\underbrace{g(x_2)}_{y_2})) =$$

$$\underset{f \text{ est iso}}{=} d(y_1, y_2) = d(g(x_1), g(x_2)) \underset{g \text{ est iso}}{=} d(x_1, x_2)$$

Donc $f\circ g$ est bien une Isométrie, i.e $f\circ g \in Iso(X)$

(3) Soit $f \in Iso(X)$. Mq $f^{-1} \in Iso(X)$, i.e

$$\forall (x_1, x_2) \in X\times X, \ d(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

Posons $U_1 := f^{-1}(x_1)$, $U_2 := f^{-1}(x_2)$. On a donc

$$x_1 = f(U_1) \text{ et } x_2 = f(U_2)$$

L'égalité à démontrer devient $d(U_1, U_2) = d(f(U_1), f(U_2))$
qui est vrai car $f \in Iso(X)$.

D'après le cours, $Iso(X)$ est un sous-groupe de $S(X)$ donc, munie de la loi induite (la composition des isométries) devient un groupe.

7) $GL(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0 \}$

D'après le cours $(GL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe.

élément neutre : I_n

symétrique de $A \in GL(n,\mathbb{R})$ est $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{Com}(A)$

Pareil pour $GL(n, \mathbb{C})$

8) $SL(n,\mathbb{R}) := \{ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$

D'après le cours $SL(n,\mathbb{R})$ est un sous groupe normal de $GL(n,\mathbb{R})$.

Pareil pour $SL(n, \mathbb{C})$

9) Déjà traitée à Q4) exo 4.

Exercice 6 :

2) Sur $G :=]-1, 1[$. Considérons la loi $*$ définie par $x * y := \frac{x+y}{1+xy}$. A montrer que $(G, *)$ est un groupe.

(0) Vérifions que $*$ est bien une lci sur G.

. Soient $x, y \in G :=]-1, 1[$ A démontrer que $x * y \in]-1, 1[$

i.e, $\quad -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 \quad$ Rq : $x \in]-1, 1[\Leftrightarrow |x| < 1$

$y \in]-1, 1[\Leftrightarrow |y| < 1$

$|xy| = |x||y| < 1 \Rightarrow -1 < xy < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + xy > 0$

Donc les inégalités $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ sont équiv.

à $\begin{cases} -1 - xy < x + y & (i) \\ x + y < 1 + xy & (ii) \end{cases}$

(i) : est équiv à

$$x + y + xy + 1 > 0$$

$$x + 1 + y(x+1) > 0$$

$$\underbrace{(x+1)}_{\substack{>0 \\ \text{car } x > -1}} \underbrace{(1+y)}_{\substack{>0 \\ \text{car } y > -1}} > 0 \text{ donc vrai.}$$

(ii) similaire $(x-1)(y-1) > 0$ car $x < 1$ et $y < 1$.

(1) $*$ est associative : Soient $x, y, z \in G$.

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z = \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}} =$$

$$= \frac{\frac{x+y+z+zxy}{1+xy}}{\frac{1+xy+zx+zy}{1+xy}} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+zx+zy}$$

calcul similaire $x*(y*z) = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+zx+zy}$

donc $*$ est bien associative.

(2) 0 est élts neutre pour $*$: $x*0 = 0*x = \dfrac{x+0}{1+x\cdot 0} = \dfrac{x}{1} = x$

(3) le symétrique de x est $(-x)$ parce que $\underset{\underset{(-x)*x}{\shortparallel}}{x*(-x)} = 0$