Exo 9. TD2

ΔABC triangle equilatéral du plan

1 Déterminer l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A, B, C\}$

Remarque Soit O le centre du ΔABC.

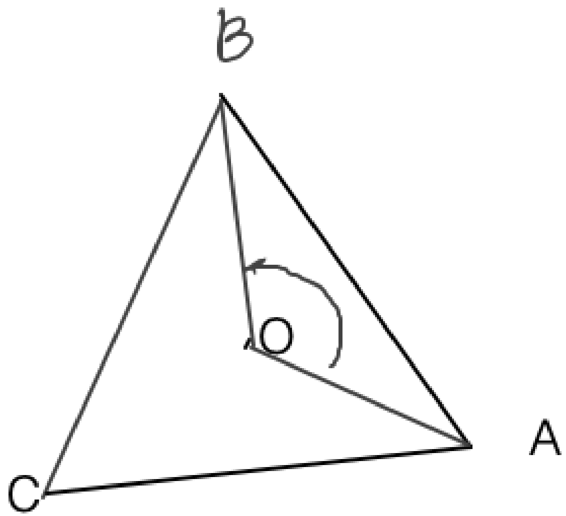
Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie du plan euclidien

t.q $f(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$.

Alors $f(O) = O$.

(voir le TD précédent) -

En particulier, si f est une rotation, alors le centre de rotation sera O.



l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A, B, C\}$ est

$\mathcal{R} := \{ id_{\mathbb{R}^2}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}} \}$, où

R_θ désigne la rotation de centre O et angle θ

$\circ$	id	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$
id	id	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$
$R_{2\pi/3}$	$R_{2\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	id
$R_{4\pi/3}$	$R_{4\pi/3}$	id	$R_{2\pi/3}$

Le tableau montre que la composition $\circ$ définit une lci sur $\mathcal{R}$. On peut vérifier que les 3 axiomes d'un groupe sont vérifiés..

Il s'agit d'une lci commutative

Autre méthode :

On met en bijection $\{A, B, C\}$ avec $\{1, 2, 3\}$

$A \mapsto 1$
$B \mapsto 2$
$C \mapsto 3$

toute isométrie f du plan qui laisse invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$ définit (induit) une permutation de $\{A, B, C\}$, donc une permutation $\sigma(f) \in S_3$ de $\{1, 2, 3\}$

f	$\sigma(f)$
id	$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$
$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$

L'application $f \mapsto \sigma(f)$ définit une bijection entre $\mathcal{R}$ et le sous-group A_3 de S_3

Cette bijection est compatible avec la composition

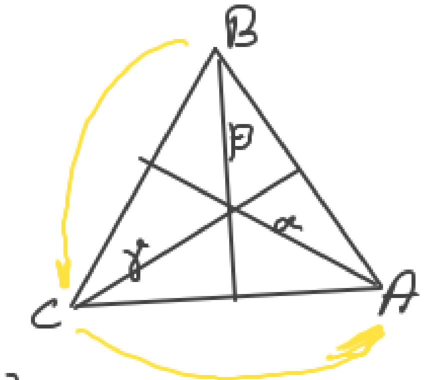
$$\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ \sigma(g)$$

D'après une remarque expliquée à l'exo 6 Q2 la composition sur $\mathcal{R}$ définit une structure de groupe qui rend l'application $\underset{\in \mathcal{R}}{f} \longmapsto \underset{\in A_3}{\sigma(f)}$ isomorphisme

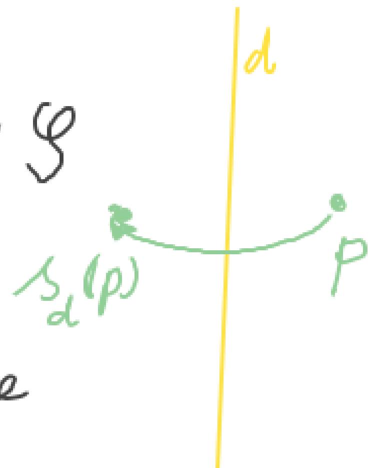
A_3 est le sous-groupe cyclique de S_3 engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $\mathcal{R}$ est un groupe cyclique engendré par $R_{\frac{2\pi}{3}}$

D'après le cours $\mathcal{R} \simeq U_3$, $\mathcal{R} \simeq \mathbb{Z}_3$

2 L'ensemble des réflexions (symétries axiales) laissant invariant $\{A, B, C\}$



$s_\beta \circ s_\alpha = R_{\frac{4\pi}{3}} \notin \mathcal{S}$



donc la composition $\circ$ ne définit pas une l c i sur $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S} = \{s_\alpha, s_\beta, s_\gamma\}$

l'ensemble des symétries axiales qui laissent invariant $\{A, B, C\}$

$\circ$ ne définit pas une structure de groupe sur $\mathcal{S}$

$\mathcal{J} := \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ $\quad$ $\mathcal{J}$ est l'ensemble de toutes les isometries qui laissent invariant $\{A, B, C\}$

$\sigma : \mathcal{J} \longrightarrow S_3$ $\quad$ $\sigma(f) :=$ la permutation définie par f sur $\{A, B, C\}$ identifié avec $\{1, 2, 3\}$

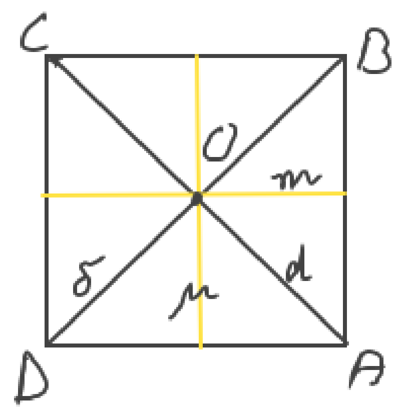
σ est une bijection

σ est compatible avec les lci données par la composition

D'après la remarque expliquée à l'exo 6 il en resulte que $\circ$ definit une structure de groupe sur $\mathcal{J}$ qui rend σ isomorphisme.

$f \in J$	$\sigma(f) \in S_3$
$id_{\mathbb{R}^2}$	$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$
$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$
s_α	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)$
s_β	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$
s_γ	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$

4. Les mêmes questions pour un carré



$\mathcal{R} = \{ id_{\mathbb{R}^2}, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}} \}$

$\mathcal{S} = \{ s_d, s_\delta, s_m, s_\mu \}$

$(\mathcal{R}, \circ)$ est un groupe cyclique engendré par $R_{\frac{\pi}{2}}$

$\circ$ n'est pas une lci sur $\mathcal{S}$

$\mathcal{I} := \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\sigma : \mathcal{I} \longrightarrow S_4$ injectif, compatible avec les lci définis par la composition

$(\mathcal{I}, \circ)$ est un groupe et σ définit un isomorphisme entre ce groupe et un sous-groupe d'ordre 8 de S_4

A faire : les tables des lci sur les groupes d'isométries $\mathcal{I}$ dans les deux cas
la table de σ pour un carré.

Exo 10 Soit $(G, \cdot)$ groupe, $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G \ x \cdot y = y \cdot x\}$

1). $Z(G)$ est un sous-groupe abélien et normal.

a) $Z(G)$ est un sous-groupe :

1. M.q. $e \in Z(G)$
$\forall x \in G,\ e \cdot x = x \cdot e = x$
donc $e \in Z(G)$

2. M.q. $\forall x, y \in Z(G)$
on a $x \cdot y \in Z(G)$

Soient $x, y \in Z(G)$ et montrons que $x \cdot y \in Z(G)$. Pour $z \in G$
on a $(x \cdot y) z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (z \cdot y) = (x \cdot z) \cdot y =$

$(z \cdot x) \cdot y = z \cdot (x \cdot y)$

Donc $x \cdot y \in Z(G)$

b) $Z(G)$ est abélien :

Soient $x, y \in Z(G)$

On a $x \cdot y = y \cdot x$ (parce que $x \in G$)

3. M.q. $\forall x \in Z(G)$, $x^{-1} \in Z G$

Soit $y \in G$.

$x^{-1} \cdot y = (y^{-1} \cdot x)^{-1} = (x \cdot y^{-1})^{-1} =$

$= y \cdot x^{-1}$. Donc $y \in Z(G)$

c) $Z(G)$ est normal :

Soit $h \in Z(G)$ et soit $x \in G$. À démontrer :

$\underbrace{x \cdot h}_{=} \cdot x^{-1} \in Z(G)$

$h \cdot x \cdot x^{-1} = h \in Z(G)$

2. Soit $H \subset G$ un sous-groupe, soit $a \in G$

$a H a^{-1} := \{ a \cdot h \cdot a^{-1} \mid h \in G \}$

À demontrer aHa^{-1} est un sous-groupe de G.

1. M.q. $e \in aHa^{-1}$. En effet $e \in H$ (parce que H est un sous-groupe)

$$\Rightarrow \underbrace{a e a^{-1}}_{e} \in aHa^{-1}.$$

2. M.q $\forall x, y \in aHa^{-1}$, on a $x \cdot y \in aHa^{-1}$

$x \in aHa^{-1} \Longrightarrow \exists h \in H,\ x = a \cdot h \cdot a^{-1}$

$y \in aHa^{-1} \Longrightarrow \exists \chi \in H,\ y = a \cdot \chi \cdot a^{-1}$

Donc $x \cdot y = (a \cdot h \cdot \underbrace{a^{-1}) \cdot (a}_{e} \chi \cdot a^{-1}) = a \underbrace{(h \chi)}_{\in H} a^{-1} \in aHa^{-1}$

3. M.q. $\forall x \in aHa^{-1}$, $x^{-1} \in aHa^{-1}$

$x \in aHa^{-1} \Longrightarrow \exists h \in H,\ x = a h a^{-1}$. Donc

$$x^{-1} = (a \cdot h \cdot a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} h^{-1} a^{-1} = a \overset{\in H}{h^{-1}} a^{-1} \in H$$

Si $a \in Z(G)$, alors

$$aHa^{-1} = \{\underbrace{a \cdot h}_{= ha} \cdot a^{-1} \mid h \in H\} = \{h \mid h \in H\} = H$$