Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2018/2019

Site : ☒ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques
Code du module : SMI4U02L Libellé du module : Alèbre 2
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (**8p**) Questions proches du cours :

1. (**2p**) Énoncer le théorème des restes chinois et la version multiplicative de ce théorème.
2. (**2p**) Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif. Donner les définitions des notions suivantes :
   (a) idéal de A,
   (b) idéal principal de A.
   (c) idéal maximal de A,
   (d) idéal premier de A.
3. (**2p**) Montrer que tout anneau euclidien est principal.
4. (**2p**) Montrer que l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i] := \{x + iy| \ x, \ y \in \mathbb{Z}\}$ (regardé comme sous-anneau de $\mathbb{C}$) est un anneau euclidien.

Exercice 2 (**10p**)

1. (**2p**) Écrire explicitement le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et spécifier l'ordre de chaque élément $\sigma \in \mathfrak{S}_3$.
2. (**2p**) Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$? Énoncer le corollaire au théorème de Lagrange utilisé.
3. (**2p**) Donner la liste de tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$. Justifier votre réponse.
4. (**2p**) Donner la liste de tous les sous-groupes normaux de $\mathfrak{S}_3$. Justifier votre réponse.
5. (**2p**) Donner la définition du centre $Z(G)$ d'un groupe G. Démontrer que $Z(\mathfrak{S}_3) = \{\mathrm{id}\}$.

Exercice 3 (**8p**) Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ et son idéal $I := 5\mathbb{Z}[X] + X\mathbb{Z}[X]$.

1. (**1,5p**) Montrer que les inclusions
$$5\mathbb{Z}[X] \subset I, \ X\mathbb{Z}[X] \subset I, \ I \subset \mathbb{Z}[X]$$
sont strictes.
2. (**1,5p**) Montrer que I n'est pas un idéal principal. *Indication : par l'absurde, I est engendré par $P(X)$, montrer d'abord que $P(X)$ est un polynôme constant, puis montrer que $P(X)$ est inversible. Ceci implique $I = \mathbb{Z}[X]$ (faux).*
3. (**2p**) Soit $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_5$ l'application définie par $\varphi(P(X)) = [a_0]_5$, où $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux, et $\ker(\varphi) = I$. Qu'est-ce qu'on peut en déduire en utilisant le premier théorème d'isomorphisme ?
4. (**1p**) Montrer que I est un idéal maximal. *Indication : On peut utiliser un critère général de maximalité qui utilise l'anneau quotient A/I.*
5. (**2p**) Montrer que $X\mathbb{Z}[X]$ est un idéal premier, mais n'est pas maximal.