Algèbre 2 – Examen partiel du 21 mars 2019

durée : 2h

Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 (**4p**)

1. (**1,5p**) Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.
2. (**2,5p**) Énoncer et démontrer les cinq corollaires au théorème de Lagrange faits en cours.

Exercice 2 (**8p**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Désignons par $\mathbb{Z}_n^\times$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont inversibles par rapport à la multiplication.

1. (**1p**) Montrer que $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$ est un groupe.
2. (**1p**) Préciser un isomorphisme de groupes additifs $f : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$. Énoncer le théorème utilisé. Montrer que $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5, +)$ est un groupe cyclique et préciser un générateur de ce groupe.
3. (**1p**) Écrire explicitement $\mathbb{Z}_{20}^\times$ et la table de la lci de ce groupe multiplicatif.
4. (**2p**) Pour chaque élément $\xi = [k] \in \mathbb{Z}_{20}^\times$ préciser l'ordre de ξ et le sous-groupe cyclique engendré par ξ. Est-ce que $(\mathbb{Z}_{20}^\times, \cdot)$ est un groupe cyclique ?
5. (**1p**) Préciser un isomorphisme $\phi : \mathbb{Z}_{20}^\times \to \mathbb{Z}_4^\times \times \mathbb{Z}_5^\times$. Énoncer le théorème utilisé.
6. (**1p**) Montrer que $\mathbb{Z}_4^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$ sont des groupes cycliques, et préciser des isomorphismes
$$\alpha : (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_4^\times, \cdot),\ \ \beta : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_5^\times, \cdot).$$
7. (**1p**) Préciser un isomorphisme $\psi : (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{Z}_{20}^\times, \cdot)$, et justifier votre réponse.

Exercice 3 (**13p**) Soit $(\mathfrak{S}_4, \circ)$ le groupe symétrique de degré 4 (le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$).

1. (**2p**) Écrire explicitement les éléments de $\mathfrak{S}_4$ en décomposant chaque élément en produit de cycles disjoints. Préciser l'ordre et la signature de chaque élément de $\mathfrak{S}_4$.
2. (**1p**) Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$? Énoncer le corollaire utilisé.
3. (**1p**) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ admet un sous-groupe normal A d'ordre 12, et préciser un isomorphisme $\mu : \mathfrak{S}_4/A \to \mathrm{U}_2$.
4. (**2p**) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ admet plusieurs sous-groupes d'ordre 8. *Indication : Chercher des sous-groupes isomorphes au groupe des isométries d'un carré.*
5. (**2p**) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ admet plusieurs sous-groupes d'ordre 6. *Indication : Chercher des sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{S}_3$.*
6. (**2p**) Montrer (en précisant le corollaire utilisé) que tout sous-groupe $H \subset \mathfrak{S}_4$ d'ordre 2 ou 3, est cyclique, et donner la liste complète de ces sous-groupes.
7. (**1p**) Donner la liste complète de tous les sous-groupes *cycliques* d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$.
8. (**2p**) Donner la liste complète de tous les sous-groupes d'ordre 4 de $\mathfrak{S}_4$ *qui ne sont pas cycliques.*