Algèbre 2 – TD n°1
Divisibilité. Le Théorème de Bézout. Congruence mod n.

Rappel : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont congrus mod n et on écrit $a \equiv b \mod n$, si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. $b - a$ est divisible par n.
2. Le reste de la de la division euclidienne de a par n coïncide avec le reste de la division euclidienne de b par n.

Exercice 1 Soient a et b des entiers naturels tels que $a \equiv 5 \mod 7$, et $b \equiv 3 \mod 7$. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 de : $2a + 5b$, $a^2 + 11b$, $a^2 + 3b^2$.

Exercice 2 Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ? Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

Exercice 3 Démontrer que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 4
1. Prouver que $3^3 \equiv 1 \mod 13$. Déduisez-en que pour tout entier naturel n, $3^{3n} \equiv 1 \mod 13$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13.

Exercice 5 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $2^n - 1$ est divisible par 9 ?

Exercice 6 n désigne un entier naturel.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 3^n par 11 ?
2. Déduisez-en que $3^n + 7 \equiv 0 \mod 11$ si, et seulement si, $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Calculer $\mathrm{pgcd}(4539, 1958)$. Écrire une formule explicite pour $\mathrm{ppcm}(4539, 1958)$, et préciser le résultat en utilisant une calculette.

Exercice 8 Montrer que 59 et 27 sont premiers entre eux, puis déterminer un couple $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que : $59u + 27v = 1$.

Exercice 9 Trouver les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $10(x - 1) = 14y$.

Exercice 10
1. Soit n un entier naturel. Pour $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
2. Démontrer que pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.
3. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.
4. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

Exercice 11 On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \mod 4$. En déduire que pour tout entier naturel k,
$$u_{2k} \equiv 2 \mod 4 \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \mod 4.$$
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \mod 100$.
5. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
6. Montrer que le pgcd de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 12

1. Résoudre l'équation
$$4x - 9y = 108$$
dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'ensemble des solutions s'écrit sous la forme
$$S = \{(9(k+3), 4k) |\ k \in \mathbb{Z}\}.$$
3. Démontrer que, pour toute solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, on a $\text{pgcd}(x, y) | 108$.
4. Préciser les solutions $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
5. Pour quelles solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ on a $\text{pgcd}(x, y) = 18$?

Exercice 13 On considère l'équation (E) : $\quad 109x - 226y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut on en conclure pour l'équation (E) ?
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k, 68+109k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe un unique couple $(d, e) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $1 \leq d \leq 226$ et $109d = 1 + 226e$. Préciser ce couple.