

## UE Algèbre 2 semestre 4

### Contenus :

**1. Rappel sur  $\mathbb{Z}$ , division euclidienne. Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers. Plus grand commun diviseur (PGCD) et plus petit commun multiple (PPCM). Théorème de Bachet-Bézout. Congruence modulo  $n$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Opérations sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Equations diophantiennes  $ax + by = c$ . Lemme chinois.**

**2. Groupes. Exemples :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , groupes de matrices, groupes de symétrie, groupes diédraux. Groupes symétriques, décomposition d'une permutation en cycles disjoints, signature. Homomorphismes, monomorphismes, épimorphismes, isomorphismes, automorphismes intérieurs. Ordre d'un élément, sous-groupe monogène. Groupe cyclique. Sous-groupe, sous-groupe distingué. Noyau et image. Centre d'un groupe. Classes à gauche et à droite suivant  $H$ . Groupe quotient. Théorèmes d'isomorphismes. Théorème de Lagrange. Applications : ordre d'un élément du groupe, le petit théorème de Fermat, l'indicatrice et le théorème d'Euler.**

### **3. Anneaux.**

**Définition (les anneaux sont supposés unitaires par définition).**

**Exemples :  $\mathbb{Z}$ ,  $K[X]$ ,  $M_{n,n}(K)$ ,  $\text{End}(V)$ , etc. Formule du binôme pour des éléments commutables. Idéaux d'un anneau commutatif. Classes remarquables d'idéaux (premiers, maximaux, principaux). Morphismes d'anneaux. Anneaux commutatifs intègres. Anneaux quotients. Anneaux principaux, anneaux euclidiens, anneaux factoriels.**

**L'anneau  $K[X]$ . Division euclidienne dans  $K[X]$ . Idéaux de  $K[X]$ . PGCD et PPCM dans  $K[X]$ . Théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide. Polynômes irréductibles. Décomposition en produit de facteurs irréductibles. Racines, ordre de multiplicité, polynômes scindés. Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes. Cas où  $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $p$  étant un nombre premier. Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé. Théorème de d'Alembert-Gauss (énoncé), polynômes irréductibles sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .**