Algèbre et Géométrie - TD n^0 1

1 Polynômes

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Rappeler la définition de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ et le théorème sur la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que, pour $a \in \mathbb{K}$ et $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ on a l'équivalence
$$(X-a)|P(X) \Leftrightarrow P(a) = 0 \ .$$
3. Montrer que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine réelle.
4. Introduire le pgcd des deux polynômes $P(X)$, $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ *non tous nuls*, et indiquer un algorithme pour le calcul de $\mathrm{pgcd}(P(X), Q(X))$. *Indication : Par convention on va supposer qu'un* pgcd *est toujours un polynôme unitaire.*
5. Montrer que pour deux polynômes $P(X)$, $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ *non tous nuls* il existe des polynômes $U(X)$, $V(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que
$$\mathrm{pgcd}(P(X), Q(X)) = U(X)P(X) + V(X)Q(X) \ .$$
6. Étendre la notion de pgcd pour k polynômes $P_1(X), \ldots, P_k(X) \in \mathbb{K}[X]$ *non tous nuls* et indiquer un algorithme pour le calcul de $\mathrm{pgcd}(P_1(X), \ldots, P_k(X))$. Montrer qu'il existe des polynômes $U_1(X), \ldots, U_k(X)$ tels que
$$\mathrm{pgcd}(P_1(X), \ldots, P_k(X)) = \sum_{i=1}^{k} U_i(X)P_i(X) \ .$$
Indication : Justifier et utiliser l'égalité
$$\mathrm{pgcd}(P_1(X), \ldots, P_k(X)) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(P_1(X), \ldots, P_{k-1}(X)), P_k(X)) \ .$$
7. Considérons les polynômes $Q_1(X) = X$, $Q_2(X) = X-1$, $Q_3(X) = X-2 \in \mathbb{R}[X]$ et posons
$$R_1(X) := Q_2(X)Q_3(X) \ , \ R_2(X) := Q_1(X)Q_3(X) \ , \ R_3(X) := Q_1(X)Q_2(X) \ .$$
   (a) Calculer $\mathrm{pgcd}(R_1(X), R_2(X))$ et exprimer le résultat sous la forme
$$A(X)R_1(X) + B(X)R_2(X) \ .$$
   (b) Trouver trois polynômes $U_1(X)$, $U_2(X)$, $U_3(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$U_1(X)R_1(X) + U_2(X)R_2(X) + U_3(X)R_3(X) = 1$$
   et vérifier votre réponse. *Indication : Utiliser (a) et l'égalité*
$$\mathrm{pgcd}(R_1(X), R_2(X), R_3(X)) = \mathrm{pgcd}\big(\mathrm{pgcd}(R_1(X), R_2(X)), R_3(X)\big) \ .$$

Exercice 2.
1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 + X + 2$ par $X^2 + 3X + 1$.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 3. 1. Soient $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ et a, b deux nombres complexes *distincts*.

(a) Montrer l'équivalence

$$P(X) \text{ est divisible par } (X-a)(X-b) \Leftrightarrow P(a) = P(b) = 0 \ .$$

(b) Donner une formule explicite pour le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par le produit $(X-a)(X-b)$.

(c) En déduire le reste de la divion euclidienne de $(\cos(\alpha) + X\sin(\alpha))^n$ par X^2+1 ($\alpha \in \mathbb{R}$).

2. Montrer que le polynôme $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$ est divisible par X^2+X+1. Ici m, n, $p \in \mathbb{N}$.

3. Pour quelles valeurs de l'entier n le polynôme $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par X^2+X+1 ?

Exercice 4. Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Préciser les éléments inversibles (par rapport à la multiplication) dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

2. Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d \geq 1$ est dit *irréductible* s'il n'existe aucune décomposition de la forme $P(X) = Q(X)R(X)$ avec $\deg(Q(X)) \geq 1$, $\deg(R(X)) \geq 1$ (i.e. aucune décomposition en facteurs non-inversibles). Montrer que tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d \geq 1$ s'écrit comme produit de polynômes irréductibles, et que cette décomposition est essentiellement unique, au sens que les facteurs irréductibles sont uniques à ordre près et à multiplication par les scalaires non-nuls près.

3. En utilisant le théorème de Gauss-d'Alembert montrer q'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement si $\deg(P(X)) = 1$.

4. En utilisant les théorèmes de Gauss-d'Alembert montrer q'un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible si et seulement si soit $\deg(P(X)) = 1$, soit $\deg(P(X)) = 2$ et le discriminant Δ de $P(X)$ est négatif.

Exercice 5. Factoriser (c'est à dire exprimer comme produit de facteurs irréductibles) chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4+1 \ , \ X^3-1 \ , \ X^5-1 \ , \ X^4+X^2+1 \ .$$

2 Valeurs et vecteurs propres. Diagonalisation.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Reprendre la définition connue de la fonction

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \ .$$

Montrer que, via l'identification naturelle $M_n(\mathbb{K}) = [\mathbb{K}^n]^n$ qui associe à une matrice la famille de vecteurs formée par ses colonnes, la fonction det est une forme n-linéaire alternée.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la correspondance connue entre endomorphismes et matrices carrées, introduire une fonction det sur $\mathrm{End}(E)$, et vérifier que cette fonction est bien définie.

3. Donner les définitions de

(a) valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme (d'une matrice), espace propre associé à une valeur propre, multiplicité algébrique, multiplicité géométrique.

(b) polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme.

4. Préciser le coefficient de X^{n-1} et le terme de degré 0 du polynôme caractéristique $P_A(X)$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7. 1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Dans chaque cas préciser si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner, le cas échéant, explicitement une matrice semblable diagonale (respectivement triangulaire).

Exercice 8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre *complexe* de A. Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et que, si l'on désigne par $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ l'espace propre de A considerée comme matrice complexe, alors on a $E_{\bar{\lambda}} = \bar{E}_\lambda$.

Application : diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice C de l'exercice précédent et la matrice $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique. Déterminer $\ker(f)$, $\ker(f^2)$, $\ker(f^3)$.

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M. Est-elle diagonalisable ?
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique. Déterminer $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Soit v_1 un vecteur non nul de $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Déterminer $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$, puis un vecteur v_2 tel que (v_1, v_2) soit une base de $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Exercice 11. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que 1 et 2 sont les seules valeurs propres de g. Calculer les sous-espaces propres associés. En déduire que g n'est pas diagonalisable.
2. Trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $v_3 = (x, 1, 0, 0)$ est un vecteur de $\ker(g - id)^3 \setminus \ker(g - id)^2$.
3. Soient $v_2 = (g - \mathrm{id})(v_3)$, $v_1 = (g - \mathrm{id})^2(v_3)$ et v_4 le vecteur de $\ker(g - 2\mathrm{id})$ dont la dernière coordonnée vaut 1. Vérifier que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base et donner la matrice de g dans cette base.

Exercice 12. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (-y, x)$.

1. Déterminer les endomorphismes f^2, f^3 et f^4.
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ la trace de l'endomorphisme $P(f)$ est $P(i)+P(-i)$.

Exercice 13. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ définit, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, un endomorphisme que l'on notera u .

1. Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (préciser, bien sûr, cette matrice).
2. Déterminer enfin une base dans laquelle la matrice de u devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables ou non :

1. les matrices de l'exercice 7 ;
2. la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ (discuter selon les valeurs de a, b et c).

Exercice 15. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et inversible. En déduire le polynôme minimal $m_A(X)$ et, en utilisant celui-ci, déterminer A^{-1}.