Algèbre et Géométrie - TD n^0 2

1 Forme canonique de Jordan. Applications

Exercice 1. (puissance d'une matrice, l'exponentielle sur l'espace des matrices)

1. Soient $g \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, λ_i ($1 \leq i \leq k$) ses valeurs propres et $m_i := \mathrm{mult}_a(\lambda_i)$. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E dans laquelle la matrice de g est

$$D^{m_1,\ldots m_k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de g^N dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ en utilisant la matrice de passage $P \in M_n(K)$ définie par

$$(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)P \ .$$

Application : Déterminer les puissances n-ièmes des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

où a, b, $c \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. La matrice

$$J^r_\lambda := \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{r}$$

s'appelle *bloc de Jordan* de valeur propre λ et de taille r. Calculer les puissances n-ièmes de J^r_λ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Calculer les puissances n-ièmes de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

4. (l'exponentielle sur l'espace des matrices)
   (a) Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} \frac{Y^k}{k!}$ est convergente (avec la convention $Y^0 = I_n$).
   Indication : Utiliser la norme

$$\| \cdot \| : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+ \ , \ \|Y\| := \sup\{\|Y(v)\| | \ v \in \mathbb{C}^n, \ \|v\| = 1\}$$

   sur l'espace des matrices complexes carrées et le fait que cette norme est sous-multiplicative.
   (b) On pose $\exp(Y) := \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!}$. Calculer $\exp(D^{m_1,\ldots m_k}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k})$ et $\exp(J^r_\lambda)$.
   Indication : Observer que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ si $AB = BA$, écrire $J^r_\lambda = J^r_0 + \lambda I_r$ et enfin utiliser le fait que J^r_0 est une matrice nilpotente.

Exercice 2. Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation matricielle

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \ .$$

Calculer, pour chaque solution, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal comparer les avec le polynôme $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 3. Classifier, a similitude près, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 5. Dans chaque cas, préciser le polynôme minimal.

Exercice 4. Soit $A \in M_6(\mathbb{C})$ telle que $P_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2$, $m_A(X) = (X-1)^2(X-2)$. Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ? Quelles sont les formes de Jordan possibles ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension 6 et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que

$$P_u(X) = (X-2)^6 \ , \ \deg(m_u(X)) = 3$$

1. Est-ce que u est diagonalisable ? Est-ce que u est trigonalisable ?
2. Préciser le polynôme minimal $m_u(X)$.
3. Considérons les noyaux $K_i := \ker\left[(u - 2\mathrm{id}_E)^i\right]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Préciser K_i pour $i \geq 3$ et justifier votre réponse.
4. Préciser comment peut on utiliser les noyaux K_1, K_2, K_3 pour obtenir une base dans laquelle la matrice de u est canonique.
5. Comparer les trois nombres $\dim(K_3) - \dim(K_2)$, $\dim(K_2) - \dim(K_1)$ et $\dim(K_1)$ et justifier votre réponse.
6. Donner la liste de paires $(\dim(K_1), \dim(K_2))$ possibles.
7. Pour chaque paire $(\dim(K_1), \dim(K_2))$ de cette liste préciser la forme canonique de Jordan de u qui correspond à cette paire. Dans chaque cas préciser aussi la dimension de l'espace propre E_2.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à d. Soit $\delta : \mathbb{K}_d[X] \to \mathbb{K}_d[X]$ l'endomorphisme donné par la dérivation formelle $P(X) \mapsto P'(X)$. Montrer que δ est nilpotent, calculer son indice de nilpotence, $P_\delta(X)$ et $m_\delta(X)$; enfin, trouver une base dans laquelle la matrice de δ est sous forme de Jordan.

Exercice 7. En utilisant leur forme normale de Jordan calculer les puissances n-ièmes des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 8. (systèmes différentiels linéaires ordinaires)

1. Démontrer que l'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ est différentiable et citer le théorème concernant les séries de fonctions utilisé. Démontrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la dérivée de l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ est
$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A \ .$$
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\dot{x} = Ax$ (où $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$) le système différentiel linéaire associé à A. Démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \exp(tA)x_0$ est l'unique solution maximale du système qui vérifie la condition initiale $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.
3. Résoudre explicitement le système de la question 2 dans les cas $A = D^{m_1,\dots m_k}_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}$ et $A = J^r_\lambda$. Généraliser les résultats obtenus à une matrice A semblable à l'une de ces deux matrices.
4. Résoudre l'équation différentielle $y''' = 6y'' - 12y' + 8y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$. *Indication : Poser* $x := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ *et écrire un système différentiel linéaire pour l'application vectorielle* $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9. On pose $F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Donner la forme normale de Jordan, J, de F et donner une matrice de passage P telle que $J = P^{-1}FP$.
2. On définit la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions : $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$. Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Donner le terme général de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence $u_0 = -1$; $u_1 = 9$; $u_2 = 13$; $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$.

Exercice 11.

1. Montrer que toutes les matrices carrées réelles de taille 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 + 4$ sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Donner deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique et qui ne sont pas semblables.
3. Donner deux matrices de même taille qui ont le même polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $m_f(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$.

1. Donner les valeurs propres réelles et complexes de f.
2. En déduire le polynôme caractéristique de f et la dimension de ses sous espaces propres et caractéristique E_2 et N_2.
3. Montrer qu'il existe une base B de E pour laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. (sous-espaces de $\mathbb{C}^n$) Soit $^- : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire défini par $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$, et $F \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel *complexe* de $\mathbb{C}^n$.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $F \cap \mathbb{R}^n = \{0\}$.
   (b) $F \cap \bar{F} = \{0\}$ (c. à d. F et $\bar{F}$ sont en somme directe).
   (c) L'application $\varphi : F \to (F+\bar{F})\cap\mathbb{R}^n$ donnée par $\varphi(z) = z+\bar{z}$ est bijective (donc est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire).
2. Supposons que F satisfait les conditions équivalentes de la question 1. Soit $(f_1, \ldots f_k)$ une base de F sur $\mathbb{C}$, et soient $u_i := f_i + \bar{f}_i$ et $v_i := i(f_i - \bar{f}_i)$. Démontrer que le système $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$ est une base du sous-espace réel $(F + \bar{F}) \cap \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Exercice 14. (valeurs propres complexes d'un endomorphisme réel) Posons $E := \mathbb{R}^n$, $E^{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^n$, soit $f \in \mathrm{End}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre complexe non-réelle de f et soient $E^{\mathbb{C}}_\lambda$, $E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}} \subset \mathbb{C}^n$ les sous-espaces propres associés à λ et $\bar{\lambda}$ respectivement. Démontrer que

1. $E^{\mathbb{C}}_\lambda \cap E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}} = \{0\}$, $\dim_{\mathbb{R}}[(E^{\mathbb{C}}_\lambda + E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}) \cap E)] = 2\mathrm{mult}_g(\lambda)$
2. Le sous-espace $E_{\lambda,\bar{\lambda}} := (E^{\mathbb{C}}_\lambda + E^{\mathbb{C}}_{\bar{\lambda}}) \cap E \subset E$ est f-invariant.
3. En utilisant l'exercice précédent, montrer que $E_{\lambda,\bar{\lambda}}$ admet une base $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k)$ telle que
$$f(u_i) = Re(\lambda)u_i + Im(\lambda)v_i \ , \ f(v_i) = -Im(\lambda)u_i + Re(\lambda)v_i$$
4. Calculer $\det(f|_{E_{\lambda,\bar{\lambda}}})$.