Algèbre et Géométrie - TD n^0 3

1 Formes Quadratiques

Exercice 1. Soit B' la base de $\mathbb{R}^2$ formée des deux vecteurs $e'_1 = \binom{1}{1}$, $e'_2 = \binom{1}{-1}$.

1. Déterminer la forme bilinéaire f dont la matrice *dans la base* B' est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et calculer $f\left(\binom{5}{4}, \binom{3}{2}\right)$.
2. Exprimer la forme quadratique associée à f par rapport à B' et par rapport à la base canonique.

Exercice 2. Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 6xz + 2yz$.

1. Déterminer sa matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que q est non dégénérée.
3. Déterminer la matrice de q dans la base (f_1, f_2, f_3) où $f_1 = (1, 2, -1)^T$, $f_2 = (2, 3, 1)^T$, $f_3 = (1, 1, 1)^T$.
4. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_3)$. Quelle est la dimension de $F^\perp$?
5. Déterminer une base de $F^\perp$.

Exercice 3. Pour chacune des formes quadratiques suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$, déterminer la forme polaire et la matrice dans la base canonique

$$q_0(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ , \ q_1(x) = \sum_{i<j} x_i x_j \ , \ q_2(x) = x_1^2 - x_2^2 \ , \ q_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - x_3x_4 \ .$$

Exercice 4. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$.

1. Déterminer la forme polaire f de q, la matrice de q dans la base canonique et en déduire que q est non-dégénérée.
2. Représenter par un dessin l'ensemble des points où q est respectivement positive, négative et nulle. Remarquer que ce dernier ensemble est un cône.
3. Quels sont les vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que v appartienne à son sous-espace orthogonal ?

Exercice 5. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

1. Déterminer la forme polaire g_q associée à q. Ecrire la matrice de g_q dans la base canonique. g_q est-elle dégénérée ? L'espace $\mathbb{R}^3$ admet-il une base orthogonale relativement à g_q ? Si oui, admet-il aussi une base orthonormale relativement à g_q ?
2. Utiliser la méthode de Gauss pour écrire q comme somme de carrés. En déduire une base q-orthogonale.
3. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de la matrice de g_q. Construire, à partir de ces vecteurs propres, une base orthonormale pour le produit scalaire canonique et g_q-orthogonale.

Exercice 6. Décomposer en carrés (par la méthode de Gauss) les formes quadratiques réelles suivantes. En déduire la signature puis donner une base orthogonale.

$$q_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz + yz, \qquad q_2(x, y, z) = xy + xz + yz, \qquad q_3(x, y, z, t) = x^2 - y^2 + 2xy - 2yz - 2zt$$

Exercice 7. Soit f l'application $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ par :

$$f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3 + 2x_3y_4 + 2x_4y_3 + 5x_4y_4 \ .$$

1. Justifier que f est bilinéaire symétrique et déterminer sa matrice A dans la base canonique, puis la forme quadratique q associée.
2. En utilisant la méthode de Gauss, déterminer le rang et le noyau de f. Est-ce-que (E, f) est un espace euclidien ?
3. Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de E, et $F := \mathrm{Vec}(u_1, u_2, u_3)$. Par la méthode de Schmidt, déterminer une base f-orthogonale de F, puis une base f-orthonormale.
4. Déterminer $F^\perp$ et en déduire une base orthonormale de E.
5. Donner la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle, et montrer que la nouvelle matrice de f est bien I_4.
6. Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ un vecteur de E. Donner les nouvelles coordonnées de v.

7. Déterminer $p_{F^\perp}$ la projection orthogonale sur $F^\perp$.
8. Soit $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, déterminer $p_F(V)$ et $p_{F^\perp}(V)$.

Exercice 8. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

1. Déterminer la forme polaire f_q de q, et la matrice A de f_q dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et le rang de f_q.
3. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le sous-espace orthogonal $\pi = v^{\perp_f} := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ f_q(v, x) = 0\}$ de v par rapport à la forme bilinéaire symétrique f_q. Quel type d'objet géométrique est π ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
5. Déterminer les valeurs propres de A, leur multiplicités algébriques.
6. Déterminer les espaces propres de A (associés à chaque valeur propre) et les multiplicités géométriques des valeurs propres. Préciser une base pour chaque espace propre.
7. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt orthonormaliser *par rapport au produit scalaire standard* les deux bases obtenues à la question précédente.
8. En déduire une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, qui sont orthogonaux deux à deux *par rapport au produit scalaire standard de* $\mathbb{R}^3$.
9. Déterminer la matrice de f_q, l'expression de f_q et l'expression de q dans la base (f_1, f_2, f_3) trouvée à la question précédente ; remarquer que cette base diagonalise à la fois le produit scalaire standard et la forme bilinéaire symétrique f_q.
10. Déterminer la signature de q. Est-ce que f_q est un produit scalaire ?
11. Préciser la matrice du produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base (f_1, f_2, f_3).
12. Déterminer le cône isotrope de q en utilisant la base (f_1, f_2, f_3),
13. Déterminer une forme diagonale (standard) de q en utilisant l'algorithme de Gauss. Utiliser cette forme pour déterminer la signature de q et comparer le résultat obtenu avec celui trouvé à la question 10.

2 Espaces hermitiens. Espaces euclidiens.

Exercice 9. (Cauchy-Schwarz) Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que

$$|\langle x, y \rangle_h| \leq \|x\|_h \|y\|_h \ \forall\ x, y \in E.$$

Exercice 10. (orthogonal, biorthogonal) Soit h une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. bilinéaire symétrique) sur l'espace complexe (resp. réel) de dimension finie E, et soit $N(h)$ le noyau de h. Démontrer que pour tout sous-espace $F \subset E$ on a

1. $\dim(E) - \dim(F^{\perp_h}) = \dim(F) - \dim(F \cap N(h))$.
2. $(F^{\perp_h})^{\perp_h} = F + N(h)$

Exercice 11. (le produit scalaire L^2). Démontrer que la formule $\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$ définit un produit scalaire hermitien sur l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur l'intervalle $[a, b]$. L'espace prehilbertien $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ est-il un espace hilbertien ? Justifier votre réponse.

Exercice 12. (classification des espaces euclidiens et hermitiens)
Soient (E, f) et (E', f') deux espaces euclidiens (resp. hermitiens) de même dimension. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $u : E \to E'$ tel que

$$\langle u(x), u(y) \rangle_{f'} = \langle x, y \rangle_f \ \forall x,\ y \in E.$$

Exercice 13. Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que $f := \mathrm{Re}(h)$ est un produit scalaire sur E, tandis que $\omega := \mathrm{Im}(h)$ est une forme antisymétrique non-dégénérée sur E.

Exercice 14.

1. Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que l'application

$$M_n(K) \times M_n(K) \to K\ ,\ (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$$

est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

2. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t\bar{A}\ B)$ est un produit scalaire hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA\ B)$ définit un produit scalaire euclidien sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15.

1. Soit u, $v \in \mathbb{R}^3$ deux vecteurs linéairement indépendants, et $\pi := \mathrm{Vec}(u, v)$.

2. Écrire une base orthonormale directe (i.e. compatible avec l'orientation standard) $B = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire standard) telle que (f_1, f_2) soit une base du plan π.
3. Écrire la matrice de la rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe orientée $d := \pi^\perp = \mathbb{R}f_3$ et d'angle θ. Cas particulier $u = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$.
4. Considérons les vecteurs $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.
   (a) Déterminer une base orthonormale (f_1, f_2, f_3, f_4) de $\mathbb{R}^4$ telle que $\mathrm{Vec}(f_1, f_2) = \mathrm{Vec}(v, w)$.
   (b) Écrire la matrice de la rotation d'angle θ autour du plan vectoriel $\pi := \mathrm{Vec}(v, w)$ et la matrice de la rotation d'angle η autour du plan vectoriel $\pi^\perp$.
   (c) Décrire explicitement l'ensemble de tous les éléments de $SO(4)$ qui laissent invariant le plan π. Décrire explicitement l'ensemble de toutes les éléments de $O(4)$ qui laissent invariant le plan π

Exercice 16. (groupes classiques compacts) Montrer que les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$, considérés comme sous-espaces topologiques de l'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), sont compacts. Les groupes $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

Exercice 17.
1. Soit $a \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\det(\exp(a)) = e^{\mathrm{Tr}(a)}$. *Indication : Vérifier d'abord cette identité pour les matrices supérieures triangulaires.*
2. Montrer que
$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SL(n, \mathbb{R})\}$$
$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset SL(n, \mathbb{C})\}$$
et donner l'interpretation géométrique de ces égalités.
3. Montrer que
$$\mathfrak{so}(n) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset \mathrm{O}(n)\}$$
$$\mathfrak{u}(n) = \{\dot\gamma(0) |\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}),\ \gamma(0) = I_n,\ \mathrm{im}(\gamma) \subset \mathrm{U}(n)\}$$
et donner l'interpretation géométrique de ces égalités.

Exercice 18. (diagonalisation simultanée d'une forme bilinéaire symétrique et un produit scalaire)
Soit (E, f) un espace euclidien et $g : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Démontrer que E admet une base qui est à la fois f-orthonormale et g-orthogonale. Donner l'équivalent de ce théorème pour un espace hermitien.
Indication : Montrer d'abord qu'il existe un endomorphisme f-symétrique ϕ unique tel que
$$f(x, \phi(y)) = g(x, y)\ \forall (x, y) \in E \times E\ .$$

Exercice 19. (diagonalisation simultanée des endomorphismes)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K.
1. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Démontrer qu'un sous-espace $F \subset E$ est ϕ-invariant (c'est à dire vérifie $u(F) \subset F$) si et seulement si F est de la forme
$$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(u)} F_\lambda\ ,\ F_\lambda \subset E_\lambda\ .$$
2. Soient u et $v \in \mathrm{End}(E)$ deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$ (qui commutent). Montrer que
   (a) Tout espace propre de v est u-invariant.
   (b) Si u et v sont diagonalisables, alors ils sont *simultanément* diagonalisables, i.e. il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Exercice 20. En utilisant le théorème de Gramm-Schmidt, démontrer que
1. toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{R})$ se décompose d'une façon unique comme $A = UT$, où $U \in O(n)$ et T est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs ;
2. toute matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ se décompose d'une façon unique comme $A = UT$, où $U \in U(n)$ et T est une matrice triangulaire supérieure (complexe) dont les éléments diagonaux sont (réels et) strictement positifs.

Exercice 21. Soit (E, h) un espace hermitien et $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que pour tout endomorphisme hermitien a à valeurs propres *positives* il existe un unique endomorphisme hermitien b à valeurs propres *positives* tel que $b^n = a$.
2. Démontrer que tout automorphisme $a \in GL(E)$ se décompose comme $a = b\phi$, où b est un endomorphisme hermitien à valeurs propres strictement positives et $\phi \in U(E)$.
3. Donner l'équivalent de ce résultat pour un espace euclidien.