

Algèbre et Géométrie
Examen Partiel, mars 2015

Exercice 1. (11p)

1. (1p) Énoncer le lemme des noyaux.
2. (2p) Donner la démonstration du lemme des noyaux dans le cas $k = 2$.
3. Considérons les polynômes $Q_1(X) = X^2 + 1$, $Q_2(X) = X - 1$, $Q_3(X) = X - 2 \in \mathbb{R}[X]$ et posons

$$R_1(X) := Q_2(X)Q_3(X), \quad R_2(X) := Q_1(X)Q_3(X), \quad R_3(X) := Q_1(X)Q_2(X).$$

- (a) (2p) Calculer $\text{pgcd}(R_1(X), R_2(X))$ et exprimer le résultat sous la forme

$$A(X)R_1(X) + B(X)R_2(X).$$

Indication : Par convention on va supposer qu'un pgcd est toujours un polynôme unitaire.

- (b) (2p) Préciser $\text{pgcd}(R_1(X), R_2(X), R_3(X))$, trouver trois polynômes $U_1(X), U_2(X), U_3(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U_1(X)R_1(X) + U_2(X)R_2(X) + U_3(X)R_3(X) = 1$$

et vérifier votre réponse. *Indication : Utiliser (a) et l'égalité*

$$\text{pgcd}(R_1(X), R_2(X), R_3(X)) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(R_1(X), R_2(X)), R_3(X)).$$

- (c) (4p) Soit E un espace $\mathbb{R}$ -vectoriel de dimension 4 et $\phi \in \text{End}(E)$ tel que

$$m_\phi(X) = Q_1(X)Q_2(X)Q_3(X).$$

- i. Préciser $P_\phi(X)$, $\text{Spec}(\phi)$, $\text{Tr}(\phi)$ et $\det(\phi)$. (2p)
- ii. En utilisant le lemme des noyaux décomposer E en somme directe de sous-espaces ϕ -invariants et exprimer les projections associées à cette somme directe comme polynômes de ϕ . (1p)
- iii. Exprimer ϕ^{-1} comme polynôme de ϕ . (1p)

Exercice 2. (8p) Soient a, b des nombres complexes. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & a & a & b \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme $\phi \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$ associé à cette matrice.

1. (1p) Discuter, suivant les valeurs de a et b , le rang de M .
2. (1p) Déterminer $\ker(\phi)$ en discutant suivant les valeurs de a et b .
3. (2p) Calculer le polynôme caractéristique de M . On demande le détail des calculs.
4. (2p) Déterminer le polynôme minimal de M en discutant suivant les valeurs de a et b .
5. (2p) Montrer que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si on a $b^2 + 12a \neq 0$.

Exercice 3. (8p) Soient ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (2p) Calculer le polynôme caractéristique $P_\phi(X)$ et le spectre $\text{Spec}(\phi)$. *Indication : $(X - 2)^2 | P_\phi(X)$*
2. (2p) Déterminer les espaces propres de ϕ et les multiplicités géométriques des valeurs propres.
3. (1p) Préciser si ϕ est diagonalisable ou trigonalisable.
4. (2p) Déterminer le polynôme minimal et les espaces caractéristiques de ϕ .
5. (1p) Exprimer ϕ^{-1} et ϕ^3 comme polynômes du premier degré de ϕ .