Algèbre et Géométrie M1

Andrei Teleman

Aix-Marseille Université

18 janvier 2018

Je remercie mon étudiant Clément Verrier pour son aide à la rédaction et l'amélioration du texte de ce cours.

Table des matières

1 Applications bilinéaires et formes quadratiques

1.1 Applications bilinéaires. La matrice des coefficients, le noyau, le rang d'une application bilinéaire

Soit K un corps commutatif et soient 0_K, 1_K les éléments neutres de l'addition, respectivement la multiplication de K. Rappelons que la caractéristique de K est définie par

$$\mathrm{car}(K) := \begin{cases} \min\left\{m \in \mathbb{N}^* \mid \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m \text{ fois}} = 0_K\right\} & \text{si cet ensemble est non-vide} \\ 0 \text{ si } \left\{m \in \mathbb{N}^* \mid \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m \text{ fois}} = 0_K\right\} = \emptyset & \end{cases}$$

La caractéristique des corps élémentaires $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est 0. Si $\mathrm{car}(K) > 0$, alors $\mathrm{car}(K)$ est un nombre premier. Par exemple on a $\mathrm{car}(\mathbb{F}_p) = p$.

Pour un nombre naturel $m \in \mathbb{N}$ posons :

$$m_K := \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m \text{ fois}} \in K.$$

Ne pas faire la confusion entre le nombre naturel $m \in \mathbb{N}$ et l'élément associé $m_K \in K$. Par exemple, si $\mathrm{car}(K) = p$, alors on aura $m_K = 0_K$ si m est un multiple de p. En particulier, si $\mathrm{car}(K) = 2$, on aura $2_K = 0$ donc 2_K^{-1} n'existe pas dans K.

Soient E, F des K-espaces vectoriels.

Définition 1.1 *Une application $\varphi : E \times F \to K$ est dite forme bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chaque argument, c'est à dire si pour tout $x \in E$ l'application $\varphi(x, \cdot)$ est une forme linéaire sur F, et pour tout $y \in F$ l'application $\varphi(\cdot, y)$ est une forme linéaire sur E.*

L'espace des formes bilinéaires $E \times F \to K$ a une structure naturelle de K-espace vectoriel, espace qui est désigné par $L^2(E, F; K)$, ou $\mathrm{Bil}(E, F)$.

Définition 1.2 *Soit $\varphi : E \times F \to K$ une forme bilinéaire, $B = (v_1, \ldots, v_m)$ une base de E, $C = (w_1, \ldots, w_n)$ une base de F. Les coefficients de φ par rapport aux bases (B, C) sont définis par*

$$\varphi_{ij} := \varphi(v_i, w_j)$$

La matrice de la forme bilinéaire φ par rapport aux bases (B, C) est la matrice formée avec ces coefficients, donc la matrice $\Phi = (\varphi_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m, \\ 1\leq j\leq n}}$. Pour mettre en évidence les bases utilisées on va utiliser la notation $M_{BC}(\varphi)$ pour cette matrice.

Si on connait la matrice de la forme φ par rapport à une paire (B, C) de bases on peut reconstituer la forme. En effet, soient $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in E$, $y = \sum_{j=1}^n y_j w_j \in F$. En utilisant la propriété de bilinéarité on obtient

$$\varphi(x, y) = \varphi(\sum_{i=1}^m x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j w_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(v_i, w_j) = \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \varphi_{ij} x_i y_j \ . \tag{1}$$

Donc les scalaires $\varphi_{ij} \in K$ apparaissent comme coefficients dans l'expression de $\varphi(x, y)$ obtenue en décomposant x, y dans les bases choisies. En regardant la somme $\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \varphi_{ij} x_i y_j$ comme une matrice avec une ligne et une colonne, on peut l'écrire sous la forme

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \varphi_{ij} x_i y_j = (x_1 \ \ldots \ x_m)\Phi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \Phi Y,$$

où $X \in K^m$, $Y \in K^n$ sont les vecteurs formés avec les coordonnées de x et y respectivement. Réciproquement, pour toute matrice $\Phi = (\varphi_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(K)$, la formule (1) définit une forme bilinéaire sur $E \times F$.

Si on passe à une nouvelle paire de bases $B' = BP$, $C' = CQ$ où $P \in \mathrm{GL}(m, K)$, $Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sont les deux matrices de passage, alors les coefficients de φ par rapport à la paire (B', C') seront

$$\varphi'_{ij} = \varphi(v'_i, w'_j) = \varphi(\sum_{s=1}^{m} p_{si}v_s, \sum_{t=1}^{n} q_{tj}w_t) = \sum_{\substack{1\leq s\leq m\\ 1\leq t\leq n}} p_{si}\varphi_{st}q_{tj} = \sum_{\substack{1\leq s\leq m\\ 1\leq t\leq n}} p^T_{is}\varphi_{st}q_{tj}$$

et donc la matrice Φ' associée à φ dans la nouvelle base sera $\Phi' = P^T\Phi Q$. Donc

Remarque 1.3 *Soient B, C bases de E, respectivement F . Alors l'application $\varphi \mapsto M_{BC}(\varphi)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels $\mathrm{Bil}(E, F) \to M_{m,n}(K)$. Si on passe de (B, C) à une nouvelle paire de bases (B', C') où $B' = BP$, $C' = CQ$ on aura $M_{B'C}(\varphi) = P^T M_{BC}(\varphi)Q$.*

Une forme bilinéaire $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, F)$ définit une application linéaire $L(\varphi) : E \to F^*$ et une application linéaire $R(\varphi) : F \to E^*$ définies par

$$L(\varphi)(x) := \varphi(x, \cdot),\ \ R(\varphi)(y) := \varphi(\cdot, y).$$

Ici on a désigné par E^*, F^* les espaces duaux de E et F. Donc, pour $x \in E$ fixé, $L(\varphi)(x)$ est la forme linéaire sur F donnée par $y \mapsto \varphi(x, y)$. D'une manière similaire, pour $y \in F$ fixé, $R(\varphi)(y)$ est la forme linéaire sur E donnée par $x \mapsto \varphi(x, y)$.

Soient $B = (v_1, \dots, v_m)$, $C = (w_1, \dots, w_n)$ bases de E, respectivement F et soient $B^* = (v_1^*, \dots, v_m^*)$, $C^* = (w_1^*, \dots, w_m^*)$ les bases duales.

Remarque 1.4 *Soient E, F K-espaces vectoriels de dimensions finies m, n respectivement.*

1. *On a*
$$M_{BC^*}(L(\varphi)) = M_{BC}(\varphi)^T,\ \ M_{CB^*}(R(\varphi)) = M_{BC}(\varphi).$$
2. *Les applications $\mathrm{Bil}(E, F) \to L(E, F^*)$, $\mathrm{Bil}(E, F) \to L(F, E^*)$ définies par $\varphi \mapsto L(\varphi)$, $\varphi \mapsto R(\varphi)$ sont des isomorphismes de K-espaces vectoriels.*

Définition 1.5 *Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}(E, F)$. Le noyau à gauche de φ est le sous-espace vectoriel de E défini par*

$$N_l(\varphi) := \ker(L(\varphi)) = \{x \in E|\ \forall y \in F,\ \varphi(x, y) = 0\},$$

et le noyau à droite de φ est le sous-espace vectoriel de F défini par

$$N_r(\varphi) := \ker(R(\varphi)) = \{y \in F|\ \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\},$$

Remarque 1.6 *Soient $B = (v_1, \dots, v_m)$, $C = (w_1, \dots, w_n)$ bases de E, respectivement F, et soit $M_{BC}(\varphi)$ la matrice de φ par rapport à la paire de bases (B, C).*

1. *Le noyau $N_l(\varphi)$ est le sous-espace de E défini dans la base B par le système linéaire homogène*
$$M_{BC}(\varphi)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0_{K^n}.$$
2. *Le noyau $N_r(\varphi)$ est le sous-espace de F défini dans la base C par le système linéaire homogène*
$$M_{BC}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0_{K^n}.$$

A partir de ce paragraphe on va supposer $E = F$. Dans ce cas particulier important on va utiliser les notations simplifiées $L^2(E, K)$ ou $\mathrm{Bil}(E)$ pour l'espace des formes bilinéaires $E \times E \to K$.

Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ et $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. La matrice (des coefficients) de φ dans la base B est définie par

$$M_B(\varphi) := M_{BB}(\varphi),$$

donc $M_B(\varphi)$ est la matrice carrée $\Phi = (\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$.

Remarque 1.7 *Si on passe à une nouvelle base $B' = BP$ (où $P \in \mathrm{GL}(n, K)$ est la matrice de passage de B à B') on aura*

$$M_{B'}(\varphi) = P^T M_B(\varphi) P.$$

Définition 1.8 *Deux matrices A, $A' \in M_n(K)$ sont dites congruentes s'il existe $P \in \mathrm{GL}(K)$ telle que $A = P^T AP$.*

D'après la remarque 1.7 il résulte :

Remarque 1.9 *Les matrices $M_B(\varphi)$, $M_{B'}(\varphi)$ d'une forme bilinéaire $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ dans deux bases de E sont congruentes.*

Réciproquement :

Exercice 1 Soient A, $A' \in M_n(K)$ deux matrices congruentes et est soit B une base de E, alors il existe une forme bilinéaire $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ et une base B' de E telle que $A = M_B(\varphi)$, $A' = M_{B'}(\varphi)$.

Définition 1.10 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$, et B une base de E.*

1. *Le rang de φ est défini par*

$$\mathrm{Rang}(\varphi) = \mathrm{Rang}(L(\varphi)) = \mathrm{Rang}(R(\varphi)) = \mathrm{Rang}(M_B(\varphi)).$$

2. *φ est dite non-dégénérée si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
   - *(a)* $N_l(\varphi) = \{0_E\}$,
   - *(b)* $N_r(\varphi) = \{0_E\}$,
   - *(c)* $L(\varphi)$ *est un isomorphisme,*
   - *(d)* $R(\varphi)$ *est un isomorphisme,*
   - *(e)* $\mathrm{Rang}(\varphi) = n$.

Exercice 2 Justifier l'égalité $\mathrm{Rang}(L(\varphi)) = \mathrm{Rang}(R(\varphi)) = \mathrm{Rang}(M_B(\varphi))$ utilisée implicitement dans la définition 1.10 1. Démontrer les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ dans la définition 1.10 2.

Définition 1.11 *Une application bilinéaire $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ est dite*

1. *symétrique, si pour tous x_1, $x_2 \in E$ on a $\varphi(x_2, x_1) = \varphi(x_1, x_2)$,*
2. *anti-symétrique, si pour tous x_1, $x_2 \in E$ on a $\varphi(x_2, x_1) = -\varphi(x_1, x_2)$.*

L'espace des formes bilinéaires symétriques (respectivement anti-symétriques) sur E sera noté $\mathrm{Bil}_s(E)$ (respectivement $\mathrm{Bil}_a(E)$).

Remarque 1.12 *Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$, et B une base de E. Alors*

1. *φ est symétrique si et seulement si $M_B(\varphi)$ est symétrique, si et seulement si $L(\varphi) = R(\varphi)$.*
2. *φ est anti-symétrique si et seulement si $M_B(\varphi)$ est anti-symétrique, si et seulement si $L(\varphi) = -R(\varphi)$.*
3. *Si φ est symétrique ou anti-symétrique, alors $N_l(\varphi) = N_r(\varphi)$.*

En tenant compte de la remarque 1.12 3 on peut définir

Définition 1.13 *Soit φ une forme bilinéaire symétrique ou anti-symétrique. Le noyau de φ est le sous-espace vectoriel de E défini par :*

$$N(\varphi) = N_l(\varphi) = N_r(\varphi) = \{x \in E |\ \forall y \in E,\ \varphi(x, y) = 0\} = \{y \in E |\ \forall x \in E,\ \varphi(x, y) = 0\}.$$

Exercice 3 Démontrer la remarque 1.12. Exprimer les dimensions des espaces $\mathrm{Bil}(E)$, $\mathrm{Bil}_s(E)$, $\mathrm{Bil}_a(E)$ en fonction de $n := \dim(E)$. Faites attention au cas $\mathrm{car}(K) = 2$.

Exercice 4 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie. En appliquant le théorème du rang à l'application linéaire $L(\varphi)$ démontrer l'identité

$$\dim(E) = \mathrm{rang}(\varphi) + \dim(N(\varphi)).$$

Exemple 1 Dans les exemples concrets on a d'habitude $V = K^n$ et une forme bilinéaire φ sur $K^n \times K^n$ est donnée par une formule du type

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{ij} x_i y_j$$

qui est le développement (1) de φ dans la base canonique $B_{\mathrm{can}} = (e_1, \dots, e_n)$ de K^n.

1. Le produit scalaire canonique $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$ est donné par $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, donc les coefficients de cette forme bilinéaire sont $\varphi_{ij} = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$, donc la matrice de φ dans la base canonique coïncide avec la matrice unité I_n.

2. Considérons la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 6x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 + 3x_3y_2 - x_3y_3 \ .$$

La matrice des coefficients de cette forme dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -7 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Pour calculer la matrice Ψ de φ dans la base $B = (f_1, f_2, f_3) := (e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3)$ on peut procéder de deux manières :

(i) soit on utilise la définition de la matrice des coefficients, par exemple

$$\psi_{11} = \varphi(f_1, f_1) = \varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = \varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_2, e_1) + \varphi(e_2, e_2) = \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{21} + \varphi_{22} = 16 \ ,$$

(ii) soit on détermine la matrice de passage P de la base canonique à la base B et on utilise la formule $\Psi = P^T \Phi P$.

Notons que $\mathrm{Bil}_s(E)$, $Bil_a(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $Bil(E)$.

Proposition 1.14 *Supposons* $\mathrm{car}(K) \neq 2$. *Les sous-espaces* $\mathrm{Bil}_s(E)$, $\mathrm{Bil}_a(E)$ *donnent une décomposition en somme directe de* $Bil(E)$.

Démonstration: (i) On montre que $\mathrm{Bil}_s(E)$, $\mathrm{Bil}_a(E)$ sont en somme directe : En effet, si $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ est à la fois symétrique et anti-symétrique, alors on a pour tous vecteurs u, $v \in V$

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u) = -\varphi(u, v) \ ,$$

donc $2_K\varphi(u, v) = 0$. Puisque on a supposé $\mathrm{car}(K) \neq 2$, ceci implique $\varphi(u, v) = 0$.

(ii) On montre que $\mathrm{Bil}_s(E) + \mathrm{Bil}_a(E) = \mathrm{Bil}(E)$: En effet, soit $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$. Nous définissons $\varphi_s : E \times E \to K$, $\varphi_a : E \times E \to K$ par

$$\varphi_s(u, v) := 2_K^{-1}(\varphi(u, v) + \varphi(v, u)) \ , \ \varphi_a(u, v) := 2_K^{-1}(\varphi(u, v) - \varphi(v, u)) \ .$$

C'est facile de voir que $\varphi_s \in \mathrm{Bil}_s(E)$ et $\varphi_a \in \mathrm{Bil}_a(E)$. D'autre part on a évidemment $\varphi = \varphi_s + \varphi_a$. Donc tout élément $\varphi \in \mathrm{Bil}(E)$ s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Bil}_s(E)$ et d'un élément de $\mathrm{Bil}_a(E)$. Ceci montre que $\mathrm{Bil}_s(E) + \mathrm{Bil}_a(E) = \mathrm{Bil}(E)$. ■

Soit $\varphi : E \times E \to K$ une forme bilinéaire symétrique.

Définition 1.15 *Deux vecteurs* x, $y \in E$ *sont dits* φ*-orthogonaux (orthogonaux par rapport à* φ*), et on écrit* $x \perp_\varphi y$ *si* $\varphi(x, y) = 0$. *Une famille* $(v_1, \dots, v_k)$ *de* E *est dite* φ*-orthogonale si* $v_i \perp_\varphi v_j$ *pour* $i \neq j$*, donc si* $\varphi(v_i, v_j) = 0$ *pour* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$.

Remarquons qu'une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E est φ-orthogonale si et seulement si la matrice $M_B(\varphi)$ est diagonale. Pourquoi ?

Le sous-espace φ-orthogonal d'un vecteur $x \in E$ est défini par

$$x^{\perp_\varphi} := \{y \in E | \ \varphi(x, y) = 0\} \ .$$

Notons que $x^{\perp_\varphi}$ est soit un hyperplan vectoriel de E (si $x \notin N(\varphi)$), soit coïncide avec E (si $x \in N(\varphi)$). Plus généralement, pour un sous-ensemble $A \subset E$ on pose

$$A^{\perp_\varphi} = \{y \in E |\ \forall a \in A, \varphi(a, y) = 0\} = \bigcap_{a \in A} a^{\perp_\varphi}.$$

$A^{\perp_\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E (même si A n'est pas un sous-espace vectoriel). Dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ on a

$$F^{\perp_\varphi} = G^{\perp_\varphi}$$

pour tout sous-ensemble générateur $G \subset F$. En particulier, si $F = \mathrm{Vec}(w_1, \dots, w_k)$, donc si $(w_1, \dots, w_k)$ est un système de générateurs de F, on obtient :

$$F^{\perp_\varphi} = \{x \in E |\ \forall i \in \{1, \dots, k\}\ \varphi(w_i, x) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{k} w_i^{\perp_\varphi}\ .$$

Fixons une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E, et soit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

le vecteur formé avec les coordonnées de x par rapport à B. Le sous-espace $x^{\perp_\varphi}$ s'identifie à l'espace des solutions de l'équation linéaire

$$X^T \Phi Y = 0\,, \tag{2}$$

et le sous-espace orthogonal $F^{\perp_\varphi}$ s'identifie à l'espace des solutions du système linéaire homogène

$$W_i^T \Phi Y = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq k\ .$$

Notons finalement que

$$N(\varphi) = E^{\perp_\varphi}\ . \tag{3}$$

donc le noyau de φ coïncide avec le sous-espace φ-orthogonal à tout l'espace vectoriel E.

Exercice 5 (la dimension de l'orthogonal, biorthogonal) Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un K-espace vectoriel E de dimension finie, et soit $N(\varphi)$ son noyau. Démontrer que pour tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ on a les égalités :

1. $\dim(E) - \dim(F^{\perp_\varphi}) = \dim(F) - \dim(F \cap N(\varphi))$.
2. $(F^{\perp_\varphi})^{\perp_h} = F + N(\varphi)$.

Dans le cas particulier important $K = \mathbb{R}$ on peut mettre en évidence quelques classes de formes bilinéaires symétriques.

Définition 1.16 *Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ s'appelle*

1. *positive si pour tout $x \in E$ on a $\varphi(x, x) \geq 0$,*
2. *négative si pour tout $x \in E$ on a $\varphi(x, x) \leq 0$,*
3. *définie si pour tout $x \in E$ la relation $\varphi(x, x) = 0$ implique $x = 0_E$.*
4. *positive définie si elle est positive et définie, c'est à dire si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ on a $\varphi(x, x) > 0$,*
5. *négative définie si elle est négative et définie, c'est à dire si pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ on a $\varphi(x, x) < 0$.*

La notion de forme bilinéaire symétrique définie positive est très importante : on va voir qu'une telle forme s'appelle produit scalaire sur E. Pour décider si une forme bilinéaire symétrique est définie positive, nous avons un critère très simple.

Proposition 1.17 *Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$ une forme bilinéaire symétrique sur E, $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E et $\Phi := M_B(\varphi)$ la matrice de φ dans cette base. Alors φ est définie positive si et seulement si les n déterminants $\Delta_k = \mathrm{dét}((\varphi_{ij})_{1 \leq i,j \leq k})$ sont tous strictement positifs.*

Démonstration: Voir TD. ■

Les déterminants $\Delta_k = \text{dét}((\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq k})$ s'appellent *les mineurs principaux dominants* de la matrice Φ. Donc une forme $\varphi \in \text{Bil}_s(E)$ est définie positive si et seulement si les n mineurs principaux dominants de la matrice de φ sont strictement positifs. On va démontrer plus tard ce résultat, en utilisant le théorème sur la réduction des formes quadratiques.

Exemple 2 La matrice de la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 - 7x_3y_2 - x_3y_3 \ .$$

dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & -1 \end{pmatrix} ,$$

et les déterminants Δ_k qui nous intéressent sont :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9 > 0 \ , \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -7 \\ -3 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 11 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & 8 & -22 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & 11 \\ 8 & -22 \end{vmatrix} = -110 < 0 \ ,$$

donc φ n'est pas définie positive, parce que $\Delta_3 < 0$.

1.2 Formes quadratiques

Définition 1.18 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Une forme quadratique sur V est une application $q : E \to K$ telle qu'il existe $\varphi \in \text{Bil}(E)$ telle que pour tout $x \in V$ on a*

$$q(x) = \varphi(x,x).$$

Dans ce cas on va dire que $q : E \to K$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire φ, et on va la désigner par q_φ.

Remarquer donc qu'une forme quadratique est une application d'une seule variable vectorielle, tandis qu'une forme bilinéaire este une fonction de deux variables vectorielles. Le sous-espace $\{(x,x) |\ x \in E\} \subset E \times E$ s'appelle *la diagonale* du produit cartésien $E \times E$. On peut donc dire qu'une forme quadratique est donnée par *la restriction à la diagonale d'une forme bilinéaire.*

En coordonnées : si dans une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E la forme bilinéaire φ este donnée par

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} x_i y_j$$

alors la forme quadratique q_φ associée sera donnée par

$$q_\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \varphi_{ii} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} (\varphi_{ij} + \varphi_{ji}) x_i x_j \ , \tag{4}$$

donc par un polynôme homogène du 2me degré en $(x_1, \ldots, x_n)$. Réciproquement, en présence d'une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E, toute application $q : E \to K$ qui est donnée par une fonction polynomiale homogène du 2ème degré des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ associées à cette base, est une forme quadratique. La forme générale en coordonnées d'une forme quadratique est donc

$$q(\sum x_i v_i) = \sum_{i\leq j} a_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j .$$

Exemple 3 Considérons de nouveau la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 6x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 - 7x_2y_3 - 3x_3y_1 + 3x_3y_2 - x_3y_3 \ .$$

La forme quadratique associée sera

$$q_\varphi(x) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_1 + 5x_2^2 - 7x_2x_3 - 3x_3x_1 + 3x_3x_2 - x_3^2 = 2x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 \ .$$

Remarquer que q_φ est bien donné par un polynôme homogène du 2me degré de $(x_1, \ldots x_n)$.

Soit $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E, muni de sa structure naturelle de K-espace vectoriel. Nous avons implicitement défini une application linéaire surjective (donc un épimorphisme)

$$\mathcal{Q}_E : \mathrm{Bil}(E) \to Q(E)$$

donnée par $\mathcal{Q}_E(\varphi) := q_\varphi$. Cette application n'est pas injective.

Exercice 6 En utilisant la formule (4) montrer que $\ker(\mathcal{Q}_E) = \mathrm{Bil}_a(E)$.

Par contre, en supposant $\mathrm{car}(K) \neq 2$, la restriction

$$\mathcal{Q}_E|_{\mathrm{Bil}_s(E)} : \mathrm{Bil}_s(E) \to Q(E)$$

est à la fois injective et surjective, donc est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Plus précisément :

Proposition 1.19 *Supposons* $\mathrm{car}(K) \neq 2$. *La restriction*

$$\mathcal{Q}_E|_{\mathrm{Bil}_s(E)} : \mathrm{Bil}_s(E) \to Q(E)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier pour toute forme quadratique $q : E \to K$ *sur* V *il existe une unique forme bilinéaire symétrique* $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$ *dont la forme quadratique associée est* q *(i.e. telle que* $q = q_\varphi$*). Cette forme bilinéaire est donnée par la formule*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) \ ,$$

s'appelle la forme polaire de q *et sera désignée par* φ_q.

Démonstration: Exercice. ■

L'isomorphisme réciproque $\mathcal{P}_E : Q(E) \to \mathrm{Bil}_s(E)$ de l'isomorphisme $\mathcal{Q}_E|_{\mathrm{Bil}_s(E)} : \mathrm{Bil}_s(E) \to Q(E)$ est donné donc par la formule $q \mapsto \varphi_q$ qui associe à une forme quadratique $q \in Q(V)$ sa forme polaire $\varphi_q \in \mathrm{Bil}_s(E)$.

Pour le calcul de la polaire d'une forme quadratique nous avons deux méthodes :

1. En appliquant la formule donnée par la proposition 1.19 :

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)) \ ,$$

2. Par la méthode du dédoublement : Si $q : E \to K$ est donnée dans une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ par

$$q(\sum x_i v_i) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

alors, on remplace formellement chaque carré x_i^2 par $x_i y_i$ et chaque produit $x_i x_j$ $(i \neq j)$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$. L'expression obtenue sera celle de $\varphi_q(x, y) = \varphi_q(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j)$. On obtient donc

$$\varphi_q(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{i<j} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i) \ .$$

Exemple : Considérons la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x) = 2x_1^2 + 9x_1 x_2 - 9x_1 x_3 + 5x_2^2 - 4x_2 x_3 - x_3^2 \ .$$

En appliquant la première méthode on obtient :

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{2}\Big[2(x_1 + y_1)^2 + 9(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - 9(x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + 5(x_2 + y_2)^2$$

$$-4(x_2+y_2)(x_3+y_3)-(x_3+y_3)^2-(2x_1^2+9x_1x_2-9x_1x_3+5x_2^2-4x_2x_3-x_3^2)-(2y_1^2+9y_1y_2-9y_1y_3+5y_2^2-4y_2y_3-y_3^2)\Big] \ .$$

En réduisant cette expression et en remarquant que tous les carées se détruisent on obtient

$$\varphi_q(x, y) = 2x_1 y_1 + \frac{9}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) - \frac{9}{2}(x_1 y_3 + x_3 y_1) + 5x_2 y_2 - 2(x_2 y_3 + x_3 y_2) - x_3 y_3 \ .$$

qui coïncide avec l'expression obtenue plus rapidement par la méthode du dédoublement.

Définition 1.20 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $q : E \to K$ une forme quadratique sur E. On pose*

$$N(q) := N(\varphi_q),\ \mathrm{rang}(q) := \mathrm{rang}(\varphi_q).$$

Définition 1.21 *Le cône isotrope d'une forme quadratique $q : E \to K$ est défini par*

$$C(q) := \{x \in E|\ q(x) = 0\}\ .$$

Attention, ne pas faire confusion entre le cône isotrope de q et le noyau $N(q) := N(\varphi_q)$. Le noyau de q (ou de φ_q) est un sous-espace vectoriel de E, tandis que $C(q)$ est un "cône". La terminologie "cône" utilisée ici ne correspond pas à la notion élémentaire de cône. On va voir que $C(q)$ peut se réduire au sous-ensemble $\{0_V\}$ formé par l'origine de V [1], à une réunion de deux droites, à une réunion de deux plans, etc. On utilise la notion de "cône" pour mettre en évidence la propriété générale suivante de $C(q)$: si $v \neq 0_V$ est un point de $C(q)$ (c'est à dire $v \in C(q) \setminus \{0_V\}$) alors la droite vectorielle Kv est contenue en $C(q)$ (c'est à dire on a $Kv \subset C(q)$). Donc soit $C(q)$ se réduit à $\{0_V\}$, soit est une réunion de droites vectorielles.

Remarque 1.22 *Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$. Alors sont équivalentes*

1. *$x \in C(q_\varphi)$,*
2. *$x \perp_\varphi x$,*
3. *$x \in x^{\perp_\varphi}$.*

Exemple 4 1. (le cas $n = 2$) Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. Supposons $c \neq 0$.

Puisque $c \neq 0$ on constate que le seul point $x \in C(q)$ avec $x_1 = 0$ est l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$. On va déterminer donc les points $x = (x_1, x_2) \in C(q)$ avec $x_1 \neq 0$. En divisant l'equation $q(x) = 0$ par $x_1^2 \neq 0$ on obtient

$$a + b\frac{x_2}{x_1} + c\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = 0\ .$$

En posant $p := \frac{x_2}{x_1}$ (la pente de la droite vectorielle $\mathbb{R}x$) on obtient $a + bp + cp^2 = 0$, qui est une équation du 2me degré pour p, donc le discriminant Δ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) $\Delta < 0$. Dans ce cas l'équation $a + bp + cp^2 = 0$ obtenue pour la pente $p = \frac{x_2}{x_1}$ n'admet pas de solutions réelles, donc $C(q) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

b) $\Delta = 0$. Dans ce cas notre équation a une seule solution, disons p_0, et le cône isotrope $C(q)$ se réduit à la droite vectorielle d'équation $x_2 = p_0x_1$ (soit, en utilisant la notation traditionnelle pour les coordonnées dans le plan, $y = p_0x$).

c) $\Delta > 0$. Dans ce cas notre équation a deux solutions distinctes p_1, p_2 et le cône isotrope $C(q)$ se réduit à la réunion des deux droites vectorielles

$$C(q) = d_1 \cup d_2\ ,$$

où $d_i \subset \mathbb{R}^2$ est la droite vectorielle d'équation $x_2 = p_ix_1$, $i = 1, 2$.

2. (le cas $n = 3$) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\ .$$

Pour décrire le cône isotrope $C(q)$ de cette forme quadratique, on étudie l'intersection de ce cône avec :

1. le plan "du tableau", à savoir le plan d'équation $x_1 = 0$ (donc le plan de coordonnées x_2Ox_3).
2. les plans horizontaux, donc les plans d'équation $x_3 = c$, où c est un paramètre (l'altitude du plan par rapport au plan de coordonnées x_1Ox_2).

Dans notre cas, l'intersection $C(q) \cap (x_2Ox_3)$ est donnée par l'équation $x_2^2 - x_3^2 = 0$, soit $(x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = 0$, donc cette intersection coïncide avec la réunion $d_1 \cup d_2$ des deux droites

$$d_1 : x_3 = x_2\ ,\ d_2 : x_3 = -x_2\ .$$

1. On appelle *singleton* est un ensemble qui a un seul élément. Il na faut pas faire la confusion entre un singleton $\{a\}$ et son unique élément a. Donc $\{0_V\}$ est un singleton, pas un point.

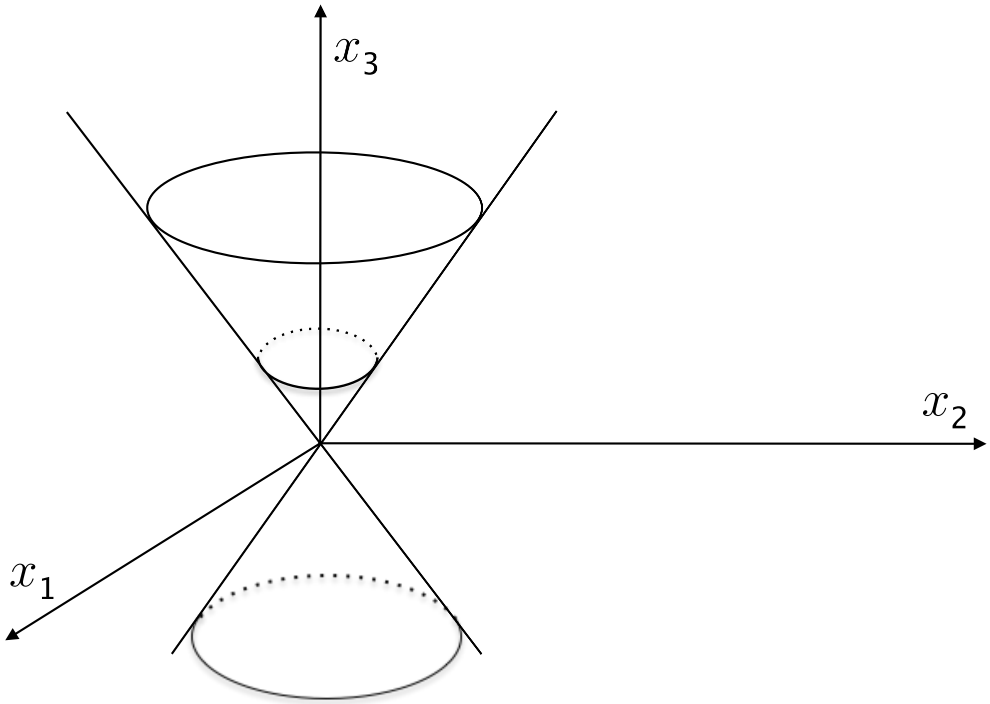

Figure 1 – Cone isotrope de $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

L'intersection de $C(q)$ avec le plan $x_3 = c$ (le plan horizontal d'altitude $x_3 = c$) est la courbe d'équation $x_1^2 + x_2^2 - c^3$ située dans de plan. La projection de cette courbe sur le plan x_1Ox_2 est le cercle d'équation $x_1^2 + x_2^2 = c^2$, donc le cercle de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon $|c|$ (attention, c peut être négatif !). On obtient donc un vrai cône avec deux nappes, dont le sommet est l'origine $0_{\mathbb{R}^3}$, dont l'axe de symétrie est la droite Ox_3, et dont la base est un cercle.

Remarquer que le cône isotrope de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se réduit au singleton $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, le cône isotrope de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$, $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se réduit à la droite vectorielle $Ox_3 = \mathbb{R}e_3$, et le cône cône isotrope de la forme quadratique $q(x) = x_1^2$, $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se réduit au plan d'équation $x_1 = 0$.

Remarque 1.23 *Soit K un corps avec $\mathrm{car}(K) \neq 2$, E un K-espace vectoriel, et $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $\varphi = 0$,
2. $q_\varphi = 0$,
3. $N(\varphi) = E$,
4. $C(q_\varphi) = E$.

Démonstration: Exercice. ∎

Théorème 1.24 (existence des bases orthogonales) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K avec $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Alors E admet une base φ-orthogonale.*

Démonstration: Récurrence par rapport à $n = \dim(E)$.

Initialisation : L'affirmation est vraie pour $\dim(E) \leq 1$.

Hérédité : Soit $n > 1$. O peut supposer que $\varphi \neq 0$, parce que, si $\varphi = 0$, alors toute base de E sera φ-orthogonale. En utilisant la remarque 1.23 il en résulte $C(q_\varphi) \neq E$, donc il existe un vecteur $v \in E \setminus C(q)$. D'après la remarque

1.22 on a $v \notin v^{\perp_\varphi}$ donc $F := v^{\perp_\varphi}$ est un hyperplan vectoriel de E qui ne contient pas le vecteur v. On obtient une décomposition en somme directe

$$E = v^{\perp_\varphi} \oplus Kv$$

Puisque $\dim(F) = n-1$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction $\psi := \varphi_{|F\times F} : F \times F \to K$, donc F admet une base ψ-orthogonale. Soit $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ une base ψ-orthogonale de F. Alors $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$ sera une base orthogonale de E. Pourquoi ? ■

Remarque 1.25 *Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$ une base φ-orthogonale. Alors, en posant $\alpha_i := \varphi(v_i, v_i)$.*

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_j v_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i, \ \ M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$q_\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

Donc une base φ-orthogonale *réduit* φ et la forme quadratique associée q_φ à une forme diagonale. Une forme quadratique de la forme $q_\varphi(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$ s'appelle forme quadratique réduite (à une somme de carrés multipliés avec des coefficients).

Dans le cas $K = \mathbb{R}$ on peut amener φ et q_φ à une forme encore plus simple. Après une permutation convenable de la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ fournie par le théorème 1.24, on peut supposer que les premiers s coefficients α_i sont strictement positifs, les suivants t coefficients sont strictement négatifs, et les derniers coefficients sont tous nuls. On aura donc $\alpha_i > 0$ pour $1 \leq i \leq s$, $\alpha_i < 0$ pour $s+1 \leq i \leq s+t$ et $\alpha_i = 0$ pour $i > s+t$. Dans ce cas on aura nécessairement $\mathrm{rang}(\varphi) = s+t$ (pourquoi ?). En plus, en posant

$$w_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_i|}} v_i & \text{pour} \quad 1 \leq i \leq s+t \\ v_j & \text{pour} \quad\ \ j > s+t \end{cases}$$

on obtient une base $(w_1, \ldots, w_n)$ de E (qui sera aussi φ-orthogonale), dans laquelle φ et q_φ ont une forme encore plus simple :

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_i w_i, \sum_{i=1}^n y_j w_j) = \sum_{i=1}^s x_i y_i - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i y_i,$$

$$q_\varphi(\sum_{i=1}^n x_i w_i) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} x_j^2.$$

On obtient donc le corollaire important suivant concernant la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.26 *(la loi d'inertie de Sylvester, cas réel) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur E. Alors*

1. *Il existe une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E par rapport à laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q(\sum_{i=1}^n x_i v_i) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} x_j^2, \ \ \text{où } s+t = \mathrm{rang}(q). \tag{5}$$

2. *Une telle base n'est pas unique, mais la paire (s, t) d'entiers positifs dépend seulement de q, donc est indépendante de la base B.*

Donc le théorème de Sylvester affirme qu'il existe une base B de E dans laquelle q est réduite à une somme (et différence) de carrés, les nombres des termes positifs et les nombres des termes négatifs étant des invariants de q.

Définition 1.27 *La paire $(s, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s'appelle la signature de q (ou de φ_q). Le nombre t de termes à coefficient négatif s'appelle l'indice de q.*

La proposition suivante donne une interprétation géométrique importante de la signature de q. La démonstration de l'invariance de la signature (corollaire 5 2.) s'appuie sur cette proposition

Proposition 1.28 *(interprétation géométrique de la signature d'une forme quadratique) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle et $(s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sa signature. Alors :*

1.
$$s = \max\{\dim(F) |\ F \textit{ sous-espace vectoriel de } E,\ \varphi_{q\,|F\times F} \textit{ est définie positive}\},$$
$$t = \max\{\dim(G) |\ G \textit{ sous-espace vectoriel de } E,\ \varphi_{q\,|G\times G} \textit{ est définie négative}\},$$

2. *Pour toute paire (F,G) de sous-espaces vectoriels de E tels que $\varphi_{q\,|F\times F}$ est définie positive, $\varphi_{q\,|G\times G}$ est définie négative, $\dim(F) = s$, $\dim(G) = t$ on a une décomposition en somme directe*
$$E = F \oplus G \oplus N(\varphi_q).$$

Réduire une forme quadratique réelle $q : E \to \mathbb{R}$ signifie trouver sa forme réduite (5), en particulier spécifier sa signature et son rang. On demande parfois aussi de spécifier une base B dans laquelle q s'écrit sous forme réduite. Pour réduire une forme quadratique réelle il suffit de la diagonaliser, c'est à dire l'écrire (dans une base B convenable) sous la forme
$$q(\sum x_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2\ ,\quad \alpha_i \neq 0. \tag{6}$$

Après cette étape on pose
$$y_i := \begin{cases} \sqrt{|\alpha_i|}\ x_i & \text{si} \quad i \leq r \\ x_i & \text{si} \quad i > r \end{cases} \quad \text{ce qui correspond au changement de base : } w_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|a_{ii}|}}\ v_i & \text{si} \quad i \leq r \\ v_i & \text{si} \quad i > r\ , \end{cases}$$

et on arrive facilement à une expression de la forme (5) dans une nouvelle base $(w_1, \ldots, w_n)$. Ecrire une forme quadratique q sous la forme (6) s'appelle réduction de Gauss (ou diagonalisation) de q. En utilisant une telle réduction, la signature de q s'obtient facilement en comptant le nombre des coefficients α_i positifs et le nombre des coefficients α_i négatifs.

L'algorithme de Gauss fournit une méthode pour réduire une forme quadratique q à la forme diagonale (6). Nous expliquons cette méthode en détail :

Supposons que q est donnée dans une base initiale $(f_1, \ldots, f_n)$ par
$$q(\sum x_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} x_i x_j\ .$$

L'algorithme de réduction de Gauss consiste en l'application successive des deux opérations fondamentales :

I. (s'applique dès que dans l'expression de q il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$, donc dès qu'il existe un carré à coefficient non-nul.) Supposons pour simplicité que $a_{11} \neq 0$. Dans l'expression de q nous écrivons d'abord la somme de *tous* les termes contenant la variable x_1, et on factorise cette somme par le facteur commun a_{11}. En utilisant l'identité $x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2$ on obtient :
$$q(\sum x_i f_i) = a_{11}\Big(x_1^2 + 2x_1 \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i}_{L(x_2,\ldots,x_n)}\Big) + \sum_{j=2}^{n} a_{jj} x_j^2 + \sum_{2\leq j<k\leq n} a_{jk} x_j x_k =$$
$$= a_{11}\Big(x_1 + L(x_2,\ldots,x_n)\Big)^2 + \underbrace{\Big[- a_{11} L(x_2,\ldots,x_n)^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{jj} x_j^2 + \sum_{2\leq j<k\leq n} a_{jk} x_j x_k \Big]}_{Q(x_2,\ldots,x_n)}\ ,$$
où l est une forme linéaire et Q est une forme quadratique des $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$. Les formules
$$\begin{cases} y_1 &= \quad x_1 + L(x_2,\ldots,x_n) \\ y_j &= \quad x_j\ ,\quad 2 \leq j \leq n\ , \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{2a_{11}} & \frac{a_{13}}{2a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{2a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

définissent un nouveau système de coordonnées dans V, qui correspond à une nouvelle base $(g_1,\dots,g_n)$ de V. Pour trouver explicitement cette base on utilise la formule de passage

$$(g_1,\dots,g_n)=(f_1,\dots,f_n)P\ ,$$

où

$$P=\begin{pmatrix}1 & \frac{a_{12}}{2a_{11}} & \frac{a_{13}}{2a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{2a_{11}}\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}^{-1}\ .$$

Dans cette base q aura la forme

$$q(\sum y_ig_i)=a_{11}y_1^2+Q(y_2,\dots,y_n)\ ,\ Q(y_2,\dots,y_n)=\sum_{j=2}^n b_{jj}y_j^2+\sum_{2\le j<k\le n} b_{jk}y_jy_k\ ,$$

et le problème se réduit à la diagonalisation de la forme quadratique de $n-1$ variables définie par Q. On continue, an appliquant à cette forme l'une des opérations I, II.

II. (s'applique *seulement* si dans l'expression de q *tous* les coefficients a_{ii} sont nuls, donc seulement s'il n'existe aucun carré à coefficient non-nul.) Dans ce cas, si $q\neq 0$, il existe dans l'expression de q un terme de la forme $a_{ij}x_ix_j$ où $i<j$ et $a_{ij}\neq 0$. Supposons pour simplicité que $i=1$, $j=2$. Dans l'expression de q on regroupe *tous* les termes contenant x_1 et x_2 et on utilise les identités :

$$x_1x_2+Ax_1+Bx_2=(x_1+B)(x_2+A)-AB\ ,\ UV=\frac{1}{4}((U+V)^2-(U-V)^2)$$

On obtient :

$$q(\sum x_if_i)=a_{12}x_1x_2+x_1\sum_{k\ge 3}a_{1k}x_k+x_2\sum_{k\ge 3}a_{2k}x_k+\sum_{k=3}^n a_kx_k^2+\sum_{3\le k<l\le n}a_{kl}x_kx_l=$$

$$a_{12}\Big(x_1x_2+x_1\underbrace{\sum_{k\ge 3}\frac{a_{1k}}{a_{12}}x_k}_{L_1(x_3,\dots,x_n)}+x_2\underbrace{\sum_{k\ge 3}\frac{a_{2k}}{a_{12}}x_k}_{L_2(x_3,\dots,x_n)}\Big)+\sum_{k=3}^n a_kx_k^2+\sum_{3\le k<l\le n}a_{kl}x_kx_l=$$

$$a_{12}(x_1+L_2(x_3,\dots,x_n))(x_2+L_1(x_3,\dots,x_n))+\Big[-a_{12}L_1(x_3,\dots,x_n)L_2(x_3,\dots,x_n)+\sum_{k=3}^n a_kx_k^2+\sum_{3\le k<l\le n}a_{kl}x_kx_l\Big]\ ,$$

$$\frac{a_{12}}{4}\Bigg[\Big(x_1+x_2+L_1(x_3,\dots,x_n)+L_2(x_3,\dots,x_n)\Big)^2-\Big(x_1-x_2-L_1(x_3,\dots,x_n)+L_2(x_3,\dots,x_n)\Big)^2\Bigg]+$$

$$+\underbrace{\Big[-a_{12}L_1(x_3,\dots,x_n)L_2(x_3,\dots,x_n)+\sum_{k=3}^n a_kx_k^2+\sum_{3\le k<l\le n}a_{kl}x_kx_l\Big]}_{Q(x_3,\dots,x_n)}\ ,$$

où L_1, L_2 sont des formes linéaires et Q une forme quadratique de $x_3,\dots,x_n$. En utilisant l'identité $AB=\frac{1}{4}((A+B)^2-(A-B)^2)$.

Les formules

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1+x_2+L_1(x_3,\dots,x_n)+L_2(x_3,\dots,x_n)\\ y_2 &=& x_1-x_2-L_1(x_3,\dots,x_n)+L_2(x_3,\dots,x_n)\\ y_j &=& x_j\ ,\qquad 3\le j\le n\ ,\end{array}\right.\ \text{soit}\ \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}+a_{24}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}+a_{2n}}{a_{12}}\\ 0 & 1 & \frac{a_{23}-a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{24}-a_{14}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{2n}-a_{1n}}{a_{12}}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

définissent un nouveau système de coordonnées dans V, qui correspond à une nouvelle base $(g_1,\dots,g_n)$ de V. Pour trouver explicitement cette base on utilise la formule de passage

$$(g_1,\dots,g_n)=(f_1,\dots,f_n)P\ ,$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_{13}+a_{23}}{a_{12}} & \frac{a_{14}+a_{24}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{1n}+a_{2n}}{a_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}-a_{13}}{a_{12}} & \frac{a_{24}-a_{14}}{a_{12}} & \dots & \frac{a_{2n}-a_{1n}}{a_{12}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Dans cette base q aura la forme

$$q(\sum y_i g_i) = \frac{a_{12}}{4} y_1^2 - \frac{a_{12}}{4} y_2^2 + Q(y_3, \dots, y_n) \ , \ Q(y_3, \dots, y_n) = \sum_{k=3} b_{kk} y_j^2 + \sum_{3 \leq k < l \leq n} b_{kl} y_k y_l \ ,$$

et le problème se réduit à la diagonalisation de la forme quadratique de $n-2$ variables définie par Q. On continue, an appliquant à cette forme l'une des opérations I, II.

Attention : L'opération II doit être appliquée seulement si dans l'expression de la forme quadratique considérée il n'existe aucun carré à coefficient non-nul. Autrement dit : L'opération I est prioritaire, donc on est obligé de l'appliquer si c'est possible de l'appliquer.

Exemple 5 Réduire la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique $q(x) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$, et spécifier sa signature et son rang.

Notons que la forumule donnée exprime q dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, qui est notre base de départ. Puisque l'expression de q ne contient aucun carré à coefficient non-nul, on est obligé d'appliquer l'opération II :

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i) = 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - 2x_3^2 = \frac{1}{2}\Big[(x_1 - x_3 + x_2 - x_3)^2 - (x_1 - x_3 - x_2 + x_3)^2\Big] - 2x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2\Big] - 2x_3^2 \ .$$

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \ , \end{cases}$$

qui correspond à une nouvelle base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$. (*Exercice : Déterminer cette base.*) On obtient

$$q(\sum y_i f_i) = \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 - 2y_3^2 \ .$$

Donc $\mathrm{rang}(q) = 3$ et $\mathrm{sign}(q) = (1, 2)$. Notre forme quadratique n'est ni positive, ni négative.

Exemple 6 Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2 - 2xy - 4xz + 4xt$$

On applique successivement l'opération I :

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2x(-y + 2z + 2t) + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2 = (x - y + 2z + 4t)^2 - (-y + 2z + 2t)^2 + 3y^2 + 5z^2 + 5t^2$$
$$= (x - y + 2z + 4t)^2 + 2y^2 + z^2 + t^2 + 4yz + 4yt - 8zt = (x - y + 2z + 4t)^2 + 2(y^2 + 2yz + 2y) + z^2 + t^2 - 8zt =$$
$$(x - y + 2z + 4t)^2 + 2\big((y + z + t)^2 - z^2 - t^2 - 2zt\big) + z^2 + t^2 - 8zt = (x - y + 2z + 4t)^2 + 2(y + z + t)^2 - z^2 - t^2 - 12zt =$$
$$(x - y + 2z + 4t)^2 + 2(y + z + t)^2 - (z^2 + 12zt) - t^2 = (x - y + 2z + 4t)^2 + 2(y + z + t)^2 - \big((z + 6t)^2 - 36t^2\big) - t^2 =$$
$$(x - y + 2z + 4t)^2 + 2(y + z + t)^2 - (z + 6t)^2 + 35t^2.$$

On pose

$$u = x - y + 2z + 4t \ , \ v = y + z + t \ , \ w = z + 6t \ , s = t \ .$$

Dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) qui correspond à ce nouveau système de coordonnées on a

$$q(uf_1 + vf_2 + wf_3 + sf_4) = u^2 + 2v^2 - w^2 + 35s^2,$$

donc $\mathrm{rang}(q) = 4$ et $\mathrm{sign}(q) = (3, 1)$.

Définition 1.29 *Soit $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$ une forme bilinéaire symétrique. Une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E est dite φ-orthonormale (orthonormée) si $\varphi(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, i.e. si $M_B(\varphi) = I_n$.*

Le théorème d'inertie de Sylvester montre que :

Corollaire 1.30 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et $\varphi \in \mathrm{Bil}_s(E)$. E admet une base φ-orthonormée si et seulement si la signature de φ est $(n, 0)$.*

Remarquons que la signature de φ est $(n, 0)$ si est seulement si φ est définie positive. Pourquoi ?

Le version complexe de la loi d'inertie de Sylvester est très simple. Attention, il est important à cet égard qu'il n'y ait pas de confusion entre ce théorème de classification pour les formes quadratiques complexes, et le théorème d'inertie de Sylvester pour les formes hermitiennes.

Théorème 1.31 *(la classification des formes bilinéaires quadratiques complexes) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n, et $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique sur E. Alors Il existe une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E par rapport à laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q(\sum_{i=1}^{n} z_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2 \ , \tag{7}$$

où $r := \mathrm{rang}(q)$.

Pour trouver une base dans laquelle q est donnée par la formule $q(\sum_{i=1}^{n} z_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} z_i^2$, on peut utiliser la même méthode que dans le cas réel : dans une première étape on utilise le théorème 1.24 (où la méthode de Gauss) pour arriver à une base dans laquelle q s'écrit sous la forme diagonale (6) avec $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, puis on choisit une racine carrée $\beta_i \in \mathbb{C}^*$ de α_i pour $i \leq i \leq r$, et on pose :

$$\zeta_i := \begin{cases} \beta_i z_i & \text{si} \quad i \leq r \\ z_i & \text{si} \quad i > r \end{cases} \quad \text{ce qui correspond au changement de base : } w_i := \begin{cases} \frac{1}{\beta_i} v_i & \text{si} \quad i \leq r \\ v_i & \text{si} \quad i > r \ . \end{cases}$$

Exercice 7 (Exercice récapitulatif) Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3$.

1. Déterminer la forme polaire f_q de q, et la matrice A de f_q dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau et le rang de f_q.
3. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le sous-espace orthogonal $\pi = v^{\perp_f} := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ f_q(v, x) = 0\}$ de v par rapport à la forme bilinéaire symétrique f_q.
4. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
5. Déterminer les valeurs propres de A, leur multiplicités algébriques.
6. Déterminer les espaces propres de A (associés à chaque valeur propre) et les multiplicités géométriques des valeurs propres. Préciser une base pour chaque espace propre.
7. En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt orthonormaliser *par rapport au produit scalaire standard* les deux bases obtenues à la question précédente.
8. En déduire une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A, qui sont orthogonaux deux à deux *par rapport au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$.*
9. Déterminer la matrice de f_q, l'expression de f_q et l'expression de q dans la base (f_1, f_2, f_3) trouvée à la question précédente ; remarquer que cette base diagonalise à la fois le produit scalaire standard et la forme bilinéaire symétrique f_q,
10. Déterminer la signature de q. Est-ce que f_q est un produit scalaire ?
11. Préciser la matrice du produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base (f_1, f_2, f_3).
12. Déterminer le cône isotrope de q dans la base (f_1, f_2, f_3),
13. Déterminer une forme diagonale (standard) de q en utilisant l'algorithme de Gauss. Utiliser cette forme pour déterminer la signature de q et comparer le résultat obtenu avec celui trouvé à la question 10.

Solution :

1. Avec la méthode du dédoublement on obtient :

$$f_q(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 \ ,$$

et la matrice de cette forme bilinéaire symétrique dans la base canonique est la matrice des coefficients par rapport dans cette base, donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le noyau de f_q est le sous-espace des solutions du système linéaire homogène associé à la matrice A, donc du système

$$\begin{cases} & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & & = & 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{cases} x_1 & & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & & -2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

qui une seule solution $x = 0$. Donc

$$N(f_q) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \ , \ \text{rang}(f_q) = \text{rang}(A) = 3 \ .$$

3. Par la définition de l'orthogonal et en utilisant la formule connue (2) on obtient

$$\pi = v^{\perp_{f_q}} = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ f_q(v,x) = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 | \ (1,1,1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 | \ (0,0,-2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \big\{ x \in \mathbb{R}^3 | \ x_3 = 0 \big\} = \text{Vec}(e_1, e_2) \ .$$

4. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & -1 \\ 1 & -X & -1 \\ -1 & -1 & -X \end{vmatrix} \overset{\substack{L_1 \to L_1 + XL_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 - X^2 & -1 - X \\ 1 & -X & -1 \\ 0 & -1 - X & -1 - X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 - X^2 & -1 - X \\ -1 - X & -1 - X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X^2 - 1 & X + 1 \\ X + 1 & X + 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\big[(X-1)(X+1)^2 - (X+1)^2\big] = -(X+1)^2(X-2) \ .$$

5. Les racines du polynôme caractéristique sont -1 et 2, donc $\text{Spec}(A) = \{-1, 2\}$. On a évidemment $m_a(-1) = 2$, $m_a(2) = 1$.

6. Pour les espaces propres :

$$E_{-1} = \ker(A - (-1)I_3) \text{ qui est l'espace des solutions du système } \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} .$$

Les trois équations sont équivalentes, donc on peut garder seulement la première et, en choisissant $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ comme inconnues secondaires, on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

donc $E_{-1} = \text{Vec}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $m_g(-1) = 2 = m_a(-1)$.

$E_2 = Ker(A - 2I_3)$ qui est l'espace des solutions de $\left\{\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 + 2L_1} \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On prend $x_3 = \alpha$ comme inconnue secondaire, et on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $E_2 = \text{Vec}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $m_g(2) = 1 = m_a(2)$.

7.

Posons

$$g_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt on pose $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2 + \alpha f_1$ et la condition $f_1 \perp f_2$ donne

$$\alpha = -\frac{\langle g_2, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} = \frac{1}{2}, \; f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs f_1, f_2 on obtient la base orthonormée cherchée (h_1, h_2) de E_1 :

$$h_1 := \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; h_2 := \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Une base orthonormée de la droite vectorielle E_2 est (h), où $h := \frac{1}{\|g\|} g_3$ où $g = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le générateur de cette droite. Donc

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. Les deux espaces propres E_{-1} et E_2 sont orthogonaux par rapport au produit scalaire standard (à vérifier !) et donne une décomposition en somme directe (orthogonale) de $\mathbb{R}^3$. Nous avons déterminé une base orthonormée de chacun des deux sous-epaces ; la base concaténée $B := (h_1, h_2, h)$ des deux bases ainsi obtenues sera donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ par rapport au produit scalaire standard.

9. Notons $h_3 := h$, donc la base trouvée à la question précédente s'écrit $B = (h_1, h_2, h_3)$. La matrice de f_q dans la base B (voir la question 8) est $\Phi = (\varphi_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$, où $\varphi_{ij} := f_q(h_i, h_j)$. Notons par λ_i la valeur propre qui correspond à h_i, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. On a

$$f_q(h_i, h_j) = h_i^T(Ah_j) = \langle h_i, Ah_j \rangle = \langle h_i, \lambda_j h_j \rangle = \lambda_j \langle h_i, h_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} = \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_i & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{array}\right.,$$

donc

$$\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. On a $\text{sign}(q) = (1, 2)$, donc f_q n'est pas un produit scalaire.

11. La base B est orthonormée par rapport au produit scalaire standard, donc la matrice du produit scalaire standard dans cette base est I_3.

12. On a

$$q(\sum y_i h_i) = f_q(\sum y_i h_i, \sum y_j h_j) = \sum f_q(h_i, h_j) y_i y_j = \sum \varphi_{ij} y_i y_j = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2 \ .$$

Le cône isotrope de q dans cette base peut être décrit avec les mêmes méthodes que pour la forme quadratique donnée par la formule $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (voir la figure 1), et le résultat sera similaire. La seule différence est que l'intersection de $C(q)$ avec le plan $y_3 = c$ est un cercle de rayon $\sqrt{2c^2} = \sqrt{2}|c|$, tandis que pour la forme étudiée avant on a obtenu un câne de rayon $|c|$.

13.

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{3} x_i e_i) = 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) - 2x_3^2 = \frac{1}{2}\Big[(x_1 - x_3 + x_2 - x_3)^2 - (x_1 - x_3 - x_2 + x_3)^2\Big] - 2x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_1 - x_2)^2\Big] - 2x_3^2 \ .$$

Nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ z_2 = x_1 - x_2 \\ z_3 = x_3 \ , \end{cases}$$

qui correspond à une nouvelle base (k_1, k_2, k_3) de $\mathbb{R}^3$. (*Exercice : Déterminer cette base.*) On obtient

$$q(\sum z_i k_i) = \frac{1}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 - 2z_3^2 \ .$$

Donc $\mathrm{rang}(q) = 3$ et $\mathrm{sign}(q) = (1, 2)$ (le même résultat que celui obtenu à la question 10).

2 Espaces euclidiens

2.1 Définition et exemples. Bases orthonormées. Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale. La formule de la projection

Définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire, définie positive $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ (voir la définition 1.16). Un espace euclidien de dimension n est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'un produit scalaire, donc une paire (E, φ), où E est un espace vectoriel réel de dimension n et φ est un produit scalaire sur E.*

On va utiliser la notation

$$\langle u, v \rangle_\varphi := \varphi(u, v).$$

Remarque 2.2 *Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E de dimension n. Alors les condition suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est définie positive,*
2. *la forme quadratique associée $q_\varphi : E \to \mathbb{R}$ satisfait*

$$\forall v \in E \setminus \{0\} \text{ on a } q_\varphi(v) > 0 \ ,$$

3. $\mathrm{sign}(q_\varphi) = (n, 0)$*, donc si le rang de q_φ est $n = \dim(E)$ et tous les coefficients dans une forme réduite de q_φ sont strictement positifs.*

Exercice : Démontrer cette remarque.

Nous avons donc deux méthodes pour vérifier si une forme bilinéaire symétrique est un produit scalaire : soit en utilisant le critère donné par la Proposition 1.17, soit en réduisant la forme quadratique q_φ et vérifier si sa signature est $(\dim(E), 0)$.

Exemples : 1. Nous avons déjà introduit le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle_{\mathrm{st}} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \ \langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathrm{st}} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ .$$

2. La forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, y) := x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + x_2 y_2$$

est un produit scalaire, parce que la, forme quadratique associée est donnée par

$$q_\varphi(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + \frac{1}{2} x_2)^2 + \frac{3}{4} x_2^2 \ ,$$

et sa signature est bien $(2, 0)$.

Soit φ un produit scalaire sur E. Considérons l'application $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|v\|_\varphi := \sqrt{\varphi(v, v)} = \sqrt{q_\varphi(v)} \ ,$$

et la distance associée à φ est définie par

$$d_\varphi(u, v) := \|v - u\|_\varphi \ .$$

Nous rappelons les deux inégalités fondamentales suivantes

Proposition 2.3 *Soit E un espace vectoriel réel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur E. Alors*

1. *(l'inégalité de Cauchy-Schwartz) :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, |\langle x, y\rangle_\varphi| \leq \|x\|_\varphi \|y\|_\varphi.$$

2. *(l'inégalité de Minkowski) :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, |\|x + y\|_\varphi| \leq \|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi.$$

L'inégalité de Minkowski montre que $\| \cdot \|_\varphi : E \to \mathbb{R}$ satisfait l'inégalité triangulaire. En utilisant cette remarque

Exercice 8 Montrer que $\| \cdot \|_\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur E.

Soit φ un produit scalaire sur E et x, $y \in E \setminus \{0_E\}$. L'angle non-orienté $\angle(x, y)$ est défini par

$$\angle(x, y) := \arccos \frac{\langle x, y\rangle_\varphi}{\|x\|_\varphi \|y\|_\varphi}.$$

Exercice 9 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz montrer que $\frac{\langle x,y\rangle_\varphi}{\|x\|_\varphi \|y\|_\varphi} \in [-1, 1]$, donc l'expression qui définit $\angle(x, y)$ est bien définie.

Une famille de vecteurs $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthogonale si $\varphi(f_i, f_j) = 0$ (soit $f_i \perp_\varphi f_j$) pour $i \neq j$. Notons que

Exercice 10 Toute famille φ-orthogonale de vecteurs non-nuls est libre.

Une famille $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthonormale (ou φ-orthonormée) si elle est φ-orthogonale et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ on a $\|f_i\|_\varphi = 1$. Autrement dit, $(f_1, \ldots, f_k)$ est dite φ-orthonormale si

$$\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij} \ \forall i, \ j \in \{1, \ldots, k\}$$

Une base est dite φ-orthogonale (φ-orthonormale) si elle est φ-orthogonale (respectivement φ-orthonormale) en tant que famille. S'il s'agit d'un espace euclidien (E, φ) fixé, on dit simplement "orthogonale" et "orthonormale" au lieu de "φ-orthogonale" et "φ-orthonormale".

Soit (E, φ) un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le sous-espace orthogonal

$$F^{\perp_\varphi} := \{v \in \ , \ \forall w \in F \text{ on a } v \perp_\varphi w\}$$

est un supplémentaire de F, donc on a une décompositon en somme directe (plus précisément somme directe orthogonale)

$$E = F \oplus F^{\perp_\varphi} \ .$$

Puisqu'il s'agit d'une décomposition en somme directe, pour tout $v \in E$ il existe une unique paire $(w, w') \in F \times F^{\perp_\varphi}$ telle que $v = w + w'$. L'application $\mathrm{pr}_F : E \to F$ qui associe à tout $v \in E$ le premier terme $w \in F$ de cette somme est linéaire et s'appelle *la projection orthogonale* sur F. Nous avons évidemment

$$\ker(\mathrm{pr}_F) = F^{\perp_\varphi} \ , \ \mathrm{im}(\mathrm{pr}_F) = F \ , \ \mathrm{pr}_{F\,|F} = \mathrm{id}_F.$$

Proposition 2.4 *(la formule de la projection) Soit (E, φ) un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \dots, f_k)$ une base orthonormée de F. Alors*

$$\mathrm{pr}_F(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle f_i, v \rangle f_i \ .$$

Proposition 2.5 *[Les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base orthonormée] Soient (E, φ) un espace euclidien de dimension n, $(h_1, \dots, h_n)$ une base orthonormée de E.*

(1) Pour tout $v \in E$ on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, v \rangle_\varphi h_i,$$

donc les coordonnées de v par rapport à $(h_1, \dots, h_n)$ coïncident avec les produits scalaires $\langle h_i, v \rangle_\varphi$.

(2) Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base arbitraire de V, et P la matrice de passage de $(h_1, \dots, h_n)$ à $(f_1, \dots, f_n)$. Alors

$$p_{ij} = \langle h_i, f_j \rangle_\varphi \text{ pour } 1 \le i, j \le n. \tag{8}$$

Démonstration: (1) Soit $v = \sum_{i=1}^n v_s h_s$ la décomposition de v par rapport à la base $(h_1, \dots, h_n)$. En appliquant $\langle h_i, \cdot \rangle_\varphi$ à cette égalité on obtient

$$\langle h_i, v \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_s \langle h_i, h_s \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^{n} v_s \delta_{is} = v_i,$$

donc $v = \sum_{i=1}^n v_i h_i = \sum_{i=1}^n \langle h_i, v \rangle_\varphi h_i$.

2. D'après la définition de la matrice de passage on a :

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} h_i \text{ pour } 1 \le j \le n.$$

D'autre part, en appliquant (1) à f_j il en résulte $f_j = \sum_{i=1}^n \langle h_i, f_j \rangle_\varphi h_i$. En comparant les deux décompositions, on obtient $p_{ij} = \langle h_i, f_j \rangle_\varphi$. ■

2.2 L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

L'algorithme de Gram-Schmidt donne une méthode de construire une base orthonormée $(h_1, \dots, h_n)$ à partir d'une base arbitraire $(f_1, \dots, f_n)$. Dans une première étape on construit une base orthogonale $(g_1, \dots, g_n)$ en utilisant la démonstration du théorème 2.6 ci-dessous, puis on obtient une base orthonormée $(h_1, \dots, h_n)$ en normalisant les vecteurs g_i.

Théorème 2.6 *Soient (E,φ) un espace euclidien et $(f_1,\dots,f_n)$ une base arbitraire de E. Alors il existe une unique famille de nombres réels $(a_{ik})_{1\le i<k\le n}$ tel que la base $(g_1,\dots,g_n)$ donnée par les relations*

$$\begin{array}{lcl} g_1 & = & f_1 \\ g_2 & = & f_2 + a_{12}g_1 \\ \vdots & & \vdots \\ g_k & = & f_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik}g_i \\ \vdots & & \vdots \\ g_n & = & f_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}g_i \ . \end{array} \tag{9}$$

soit orthogonale.

L'algorithme de Gram-Schmidt consiste en déterminer par récurrence (par rapport à $i \ge 2$) la famille $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{i-1,i})$ des coefficients qui interviennent dans la décomposition de g_i. Cet algorithme donne implicitement une démonstration du théorème 2.6. Posons $g_1 := f_1$. La condition $g_1 \perp_\varphi g_2$ devient

$$0 = \langle g_1, f_2 + a_{12}g_1\rangle_\varphi = \langle g_1, f_2\rangle_\varphi + a_{12}\langle g_1, g_1\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{12} = -\frac{\langle g_1, f_2\rangle_\varphi}{\langle g_1, g_1\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_1, f_2\rangle_\varphi}{\|g_1\|^2_\varphi} \ ,$$

donc on obtient une unique solution, et g_2 est déterminé. Supposons maintenant g_1 et g_2 connus. Les conditions $g_1 \perp_\varphi g_3$, $g_2 \perp_\varphi g_3$ deviennent

$$0 = \langle g_1, f_3 + a_{13}g_1 + a_{23}g_2\rangle_\varphi = \langle g_1, f_3\rangle_\varphi + a_{13}\langle g_1, g_1\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{13} = -\frac{\langle g_1, f_3\rangle_\varphi}{\langle g_1, g_1\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_1, f_3, \rangle_\varphi}{\|g_1\|^2_\varphi} \ ,$$

$$0 = \langle g_2, f_3 + a_{13}g_1 + a_{23}g_2\rangle_\varphi = \langle g_2, f_3\rangle_\varphi + a_{23}\langle g_2, g_2\rangle_\varphi \Leftrightarrow a_{23} = -\frac{\langle g_2, f_3\rangle_\varphi}{\langle g_2, g_2\rangle_\varphi} = -\frac{\langle g_2, f_3\rangle_\varphi}{\|g_2\|^2_\varphi} \ ,$$

Par récurrence on obtient

$$a_{ik} = -\frac{\langle g_i, f_k\rangle_\varphi}{\|g_i\|^2_\varphi} \ , \ i \in \{1,\dots,k-1\} \ .$$

Remarque 2.7 *Pour obtenir une base orthonormée il suffit d'orthonormaliser la base orthogonale fournit par le théorème 2.6, donc de poser $h_i := \frac{1}{\|g_i\|_\varphi} g_i$.*

Cette base sera sera appelée *la base orthonormée obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(f_1,\dots,f_k)$*

Interprétation géométrique : Nous avons une version alternative équivalente de l'algorithme de orthonormalisation de Gram-Schmidt, méthode qui utilise la formule de la projection (la proposition 2.4) : Considérons les sous-espaces vectoriels $W_i \subset E$ donnés par

$$W_i := \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_i) \ .$$

W_i est donc le sous-espace engendré par les premiers i vecteurs de la base donnée. Nous avons évidemment

$$W_1 = \mathbb{R}f_1, \ W_i \subset W_{i+1}, \ W_n = E \ .$$

Nous construisons, par récurrence, une base orthogonale $(g_1,\dots,g_i)$ et une base orthonormée $(h_1,\dots,h_i)$ de W_i $(1 \le i \le n)$ de la manière suivante :

i	le calcul de g_i	le calcul de h_i
1	$g_1 := f_1$	$h_1 := \frac{1}{\Vert g_1\Vert_\varphi} g_1$
2	$g_2 := f_2 - \mathrm{pr}_{W_1}(f_2) = f_2 - \langle h_1, f_2\rangle_\varphi h_1$	$h_2 := \frac{1}{\Vert f_g\Vert_\varphi} g_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$g_k := f_k - \mathrm{pr}_{W_{k-1}}(f_k) = f_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle h_i, f_k\rangle_\varphi h_i$	$h_k := \frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi} g_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$g_n := f_n - \mathrm{pr}_{W_{n-1}}(f_n) = f_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle h_i, f_n\rangle_\varphi h_i$	$h_n := \frac{1}{\Vert g_n\Vert_\varphi} g_n$

(10)

Donc, à la $k$ème étape de l'algorithme, *on soustrait de f_k sa projection sur W_{k-1}, et on normalise le résultat.*

Proposition 2.8 *Soit (E,φ) un espace euclidien, et soit $(f_1,\dots,f_n)$ une base de E.*

1. *La base orthonormée $(h_1,\dots,h_n)$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(f_1,\dots,f_n)$ satisfait les conditions*
   (a) $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)=\mathrm{Vect}(h_1,\dots,h_k)$,
   (b) $\forall k\in\{1,\dots,n\},\ \langle h_k,f_k\rangle_\varphi>0$.
2. *La base orthonormée $(h_1,\dots,h_n)$ obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(f_1,\dots,f_n)$ est l'unique base orthonormée de E satisfaisant les propriétés (a), (b) ci-dessus.*

Démonstration: 1 (a) En utilisant les formules (9), ou des formules (10) on obtient par récurrence

$$h_i\in W_k := \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k) \text{ pour tout } i\le k.$$

Mais alors $(h_1,\dots,h_k)$ est une famille libre du sous-espace W_k. Puisque $\dim(W_k)=k$, la famille $(h_1,\dots,h_k)$ sera une base de ce sous-espace, en particulier on a $\mathrm{Vect}(h_1,\dots,h_k)=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$.

1 (b) On a

$$\langle h_k,f_k\rangle_\varphi=\frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi}\langle g_k,f_k\rangle_\varphi=\frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi}\langle f_k-\mathrm{pr}_{W_{k-1}}(f_k),f_k\rangle_\varphi=\frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi}\langle \mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k),f_k\rangle_\varphi=$$

$$=\frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi}\langle \mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k),\mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k)\rangle_\varphi=\frac{1}{\Vert g_k\Vert_\varphi}\Vert \mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k)\Vert_\varphi^2\ ,$$

qui est strictement positif, parce que $\mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k)\neq 0$. En effet, si (par l'absurde) $\mathrm{pr}_{W_{k-1}^\perp}(f_k)=0$, on obtiendrait $f_k\in W_{k-1}=\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_{k-1})$, ce qui contredit le fait que $(f_1,\dots,f_n)$ est une famille libre.

2. En utilisant la récurrence par rapport à k, supposons que l'unicité a été établie pour les vecteurs $(h_1,\dots,h_k)$. Le vecteur h_{k+1} doit être un générateur *unitaire* de la droite orthogonale à W_k dans W_{k+1}. Il y a précisément deux vecteurs avec ces propriétés. C'est facile de voir qu'un seul de ces deux vecteurs satisfait la condition $\langle h_k,f_k\rangle_\varphi>0$.

Corollaire 2.9 *Soient (E,φ) un espace euclidien, et $(f_1,\dots,f_n)$ une base de E. La base orthonormée $(h_1,\dots,h_n)$ fournie par le théorème 2.6 est l'unique base orthonormée de E telle que la matrice de passage R de $(h_1,\dots,h_n)$ à la base $(f_1,\dots,f_n)$ soit supérieure triangulaire à éléments diagonaux strictement positifs.*

Démonstration:
Il suffit de remarquer que la condition (1a) de la proposition 2.8 est équivalente à la condition "la matrice de passage de la base $(h_1, \ldots, h_n)$ à la base $(f_1, \ldots, f_n)$ est supérieure triangulaire". Vérifier cette équivalence. D'autre part, d'après la proposition 2.5, le $k$ème élément diagonal de cette matrice de passage est $\langle h_k, f_k \rangle_\varphi$, donc la condition (1b) de la proposition 2.8 est équivalente la positivité stricte des éléments diagonaux de la matrice de passage. ■

Remarquons que la relation entre les deux bases $(h_1, \ldots, h_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ intervenant dans le corollaire 2.9 s'écrit

$$(f_1, \ldots, f_n) = (h_1, \ldots, h_n)R, \tag{11}$$

où à droite on utilise formellement la règle de multiplication matricielle.

Corollaire 2.10 (La décomposition QR d'une matrice inversible) *Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ un matrice inversible. Alors A admet une unique décomposition de la forme*

$$A = QR$$

où Q est une matrice orthogonale, et R est une matrice supérieure triangulaire dont tous les éléments diagonaux sont strictement positifs.

Démonstration: Il suffit d'utiliser le corollaire 2.9 et la formule (11) au cas particulier où $(E, \varphi) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{st}})$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ est la base formée avec les colonnes de la matrice A. ■

2.3 Isomorphismes et automorphismes orthogonaux

Soit (E, φ), (E', φ') deux espaces euclidiens. Rappelons d'abord la définition importante suivante :

Définition 2.11 *Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. L'adjointe de f est l'unique application $f^* : E' \to E$ telle que*

$$\forall (x, y) \in E \times E', \ \langle f(x), y \rangle_{\varphi'} = \langle x, f^*(y) \rangle_\varphi .$$

C'est facile de montrer que l'adjointe f^* de toute application linéaire $f : E \to E'$ existe et est unique. Pour le calcul effectif de l'application adjointe on peut utiliser la remarque suivante :

Remarque 2.12 *Si B, B' sont des bases orthonormées dans E et E' respectivement, alors*

$$M_{B'B}(f^*) = \left(M_{BB'} f \right)^T .$$

Donc, si on exprime les applications linéaires dans des bases orthonormées de E et E', l'application $f \mapsto f^*$ correspond à l'application de transposition $A \to A^T$.

Définition 2.13 *Soient (E, φ), (E', φ') deux espaces euclidiens. Un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ est dit isomorphisme orthogonal (ou isomorphisme d'espaces euclidiens) s'il est compatible avec les deux produits scalaires, c'est à dire si*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle f(x), f(y) \rangle_{\varphi'} = \langle x, y \rangle_\varphi \ .$$

En particulier, un automorphisme $f \in \mathrm{GL}(E)$ est dit automorphisme orthogonal de (E, φ) s'il laisse invariant le produit scalaire φ.

Proposition 2.14 *Soient (E, φ), (E', φ') deux espaces euclidiens avec $\dim(E) = \dim(E') = n$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de E, et soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Alors f est un isomorphisme orthogonal si et seulement si*

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \ \langle f(v_i), f(v_j) \rangle_{\varphi'} = \langle v_i, v_j \rangle_\varphi .$$

En particulier, si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de E, f est un isomorphisme orthogonal si et seulement si $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ est une base orthonormée de E'.

Démonstration: L'implication

$$f \text{ est un isomorphisme orthogonal } \Rightarrow \left\{\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2,\ \langle f(v_i), f(v_j)\rangle_{\varphi'} = \langle v_i, v_j\rangle_\varphi\right\}$$

est évidente. Pour la réciproque, soient $x,\ y \in E$, et soient $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_j v_j$ les décompositions de x, y par rapport à la base $(v_1,\ldots,v_n)$. Alors $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i)$, $f(y) = \sum_{i=1}^n y_j f(v_j)$ et

$$\langle x, y\rangle_\varphi = \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle v_i, v_j\rangle_\varphi x_i y_j,\ \langle f(x), f(y)\rangle_\varphi = \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle f(v_i), f(v_j)\rangle_\varphi x_i y_j,$$

et l'implication désirée devient évidente. ■

Soit (E,φ) un espace euclidien, et soit $(v_1,\ldots,v_k)$ une famille dans E. *La matrice de Gram* de $(v_1,\ldots,v_k)$ est la matrice symétrique

$$G_\varphi(v_1,\ldots,v_k) := (\langle v_i, v_j\rangle_\varphi)_{1\leq i,j\leq k}.$$

La proposition 2.14 affirme que, si on fixe une base $(v_1,\ldots,v_n)$ de E, et $f : E \to E'$ est linéaire, alors f est un isomorphisme orthogonal si et seulement si $G_\varphi(v_1,\ldots,v_n) = G_{\varphi'}(f(v_1),\ldots,f(v_n))$, donc si et seulement si la matrice de Gram de la base fixée coïncide avec la matrice de Gram de l'image par f de cette base.

Le sous-ensemble $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ des automorphismes orthogonaux est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ qui s'appelle le groupe orthogonal de l'espace euclidien (E,φ).

Proposition 2.15 *Soit (E,φ) un espace euclidien, B une base orthonormale de (E,φ) et $f \in \mathrm{GL}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est orthogonal,*
2. *f est inversible et $f^{-1} = f^*$.*
3. *f préserve la norme $\|\cdot\|_\varphi$:*
$$\forall v \in E,\ \|f(v)\|_\varphi = \|v\|_\varphi\ .$$
4. *f est une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ), c'est à dire f préserve la distance d_φ :*
$$\forall (v,w) \in E\times E,\ d_\varphi(f(v), f(w)) = d_\varphi(v,w).$$
5. *La matrice $M_B(f)$ est une matrice orthogonale, c'est à dire $M_B(f)M_B(f)^T = I_n$.*

Démonstration: Exercice. ■

Nous rappelons que

Définition 2.16 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *$A^TA = I_n$,*
2. *A est inversible et $A^{-1} = A^T$,*
3. *$AA^T = I_n$,*
4. *les colonnes de A forment une base orthonormale,*
5. *les lignes de A forment une base orthonormale,*
6. *L'endomorphisme $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserve le produit scalaire standard, c'est à dire*
$$\langle Ax, Ay\rangle_{\mathrm{st}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{st}}\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^2\ .$$
7. *L'endomorphisme f_A conserve la norme euclidienne standard, c'est à dire*
$$\|Ax\|_{\mathrm{st}} = \|x\|_{\mathrm{st}}\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ .$$
8. *L'endomorphisme f_A conserve la distance euclidienne standard, c'est à dire*
$$d_{\mathrm{st}}(Ax, Ay) = d_{\mathrm{st}}(x,y)\ \forall x\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ .$$

L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est désigné par $\mathrm{O}(n)$. On a donc par définition

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) |\ A^T A = I_n\}\ .$$

Notons que $\mathrm{O}(n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n)$.

Remarque 2.17 *Le groupe $\mathrm{O}(E)$ coïncide avec le groupe des isométries linéaires de (E, d_φ). Le groupe $\mathrm{O}(n)$ coïncide avec le groupe des isométries linéaires de $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{st}})$.*

Justifier cette remarque.

Exercice 11 Démontrer que $\mathrm{O}(n)$ est un sous-ensemble compact de $M_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^n)^n$ (par rapport à la métrique associée à un norme quelconque sur cet espace vectoriel réel).

En utilisant la proposition 2.14 on obtient :

Proposition 2.18 *Soit (E, φ) un espace euclidien et $B = (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormaée de (E, φ). Alors*

1. *L'application $f_B : \mathbb{R}^n \to E$ donnée par $f_B(x) := \sum_{i=1}^n x_i f_i$ est un isomorphisme orthogonal.*
2. *L'application $f \mapsto M_B(f)$ définit un isomorphisme de groupes $\mathrm{O}(E) \to \mathrm{O}(n)$.*

Donc, dans la présence d'une base orthonormée, notre espace euclidien (E, φ) s'identifie à l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}})$, et le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ de E s'identifie au groupe $\mathrm{O}(n)$.

En utilisant le corollaire 1.30 ou le théorème de Gram-Schmidt on obtient :

Théorème 2.19 *(la classification des espaces euclidiens)*

1. *Tout espace euclidien admet une base orthonormale,*
2. *Tout espace euclidien de dimension n est isomorphe (en tant qu'espace euclidien) à l'espace euclidien standard $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}})$. Plus précisément, pour toute base orthonormale $B = (f_1, \dots, f_n)$ de (E, φ), l'application $f_B : \mathbb{R}^n \to E$ donnée par $f_B(x) := \sum_{i=1}^n x_i f_i$ est un isomorphisme d'espaces euclidiens.*

Rappelons les définitions des groupes spéciaux orthogonaux

$$\mathrm{SO}(E) := \{f \in \mathrm{O}(E) |\ \mathrm{dét}(f) = 1\},\ \mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{O}(n) |\ \mathrm{dét}(f) = 1\}$$

et notons qu'une base orthonormée de E définit un isomorphisme $\mathrm{SO}(E) \to \mathrm{SO}(n)$. $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-groupes d'indice 2 de $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{O}(n)$ respectivement.

2.4 Théorèmes de décomposition pour les isométries linéaires (automorphismes orthogonaux)

Rappelons la théorème important suivant concernant la forme canonique d'un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien :

Théorème 2.20 *Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathrm{O}(E)$ un automorphisme orthogonal. Alors il existe une base orthonormale B de E, des nombres naturels p, q, k tels que $p+q+2k = n$ et $(\theta_1, \dots, \theta_k) \in]0, \pi[$ tels que*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \text{ où } R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\ .$$

En plus on a $f \in \mathrm{SO}(E)$ si et seulement si $q \in 2\mathbb{N}$.

Rappelons que :

1. La matrice
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
a une interprétation géométrique importante : l'endomorphisme r_θ de $\mathbb{R}^2$ défini par cette matrice est la rotation d'angle θ dans le plan.

2. En particulier, la matrice
$$R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$
correspond à la rotation d'angle π dans le plan, rotation qui coïncide avec la symétrie centrale de centre $0_{\mathbb{R}^2}$.

3. La matrice
$$\Sigma := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(dont le déterminant est -1) correspond à la symétrie (reflexion) axiale par rapport à l'axe $0x_2$.

Nous obtenons des interprétations géométriques similaires dans un espace euclidien arbitraire. Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension n, $B = (v_1, \dots, v_n)$ une base orhonormée fixée de E. La matrice
$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & R_\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2-l} \end{pmatrix}$$
aura une interprétation géométrique évidente : l'endomorphisme défini par cette matrice dans la base B est la rotation d'angle θ autour du sous-espace $(n-2)$-dimensional $\mathrm{Vect}(v_{l+1}, v_{l+2})^\perp$. La matrice
$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1-l} \end{pmatrix}$$
définit la symétrie (reflexion) par rapport à l'hyperplan $v_{l+1}^\perp$. En général on va appeler *symétrie hyperplane* toute symétrie par rapport à un hyperplan de E.

En utilisant ces remarques on voit que la matrice
$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$
qui apparaît dans le théorème 2.20 a l'interprétation géométrique suivante :

— Si q est pair (donc si $f \in \mathrm{SO}(E)$), alors cette matrice correspond à la composition de $k + \frac{q}{2}$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.
— Si q est impair (donc si $f \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$), alors cette matrice correspond à la composition d'une symétrie hyperplane avec $k + \frac{q-1}{2}$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.

En utilisant ces remarques et le théorème 2.20 on obtient

Théorème 2.21 *Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathrm{O}(E)$.*

1. *Si* $\mathrm{dét}(f) = 1$ *(donc si $f \in \mathrm{SO}(E)$) alors f s'écrit comme la composition de au plus $\left[\frac{n}{2}\right]$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.*
2. *Si* $\mathrm{dét}(f) = -1$ *(donc si $f \in \mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$) alors f s'écrit comme la composition d'une symétrie par rapport à un hyperplan avec de au plus $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ rotations autour de sous-espaces de dimension $n-2$ qui sont orthogonaux deux à deux.*

Dans le cas 3-dimensionnel la première affirmation donne :

Corollaire 2.22 *Supposons que* $\dim(E) = 3$. *Toute isométrie linéaire* $f \in \mathrm{SO}(E)$ *est une rotation par rapport à une droite vectorielle de* E.

Remarquer qu'une rotation autour d'un sous-espace $F \subset E$ de dimension $n-2$ s'écrit comme la composition de deux symétries hyperplanes. Plus précisément, une telle rotation s'écrit comme la composition des symétries par rapport à deux hyperplans qui contiennent F. (Exercice : démontrer cette affirmation en étudiant d'abord la cas d'une rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$). En utilisant cette remarque on obtient :

Corollaire 2.23 *(le théorème de Cartan) Toute isométrie linéaire* $f \in \mathrm{O}(E)$ *d'un espace euclidien de dimension* n *s'écrit comme la composition d'au plus* n *symétries hyperplanes de* E.

Exercice 12 Donner une démonstration différente de ce théorème qui utilise la récurrence par rapport à la codimension du lieu $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes (lieu qui coïncide avec le noyau $= \ker(f - \mathrm{id}_E)$).

Proposition 2.24 *Soit* $f \in \mathrm{O}(E)$ *et* $\mathrm{Fix}(f) = \ker(f - \mathrm{id}_E)$ *son lieu des points fixes. Alors on a une décomposition en somme directe orthogonale*

$$E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E).$$

Soit $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$, et soit $y = f(\xi) - \xi \in \mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E)$. Alors

$$\langle x, y\rangle_\varphi = \langle x, f(\xi) - \xi\rangle_\varphi = \langle x, f(\xi)\rangle_\varphi - \langle x, \xi\rangle_\varphi = \langle f^*(x), \xi\rangle_\varphi - \langle x, \xi\rangle_\varphi = \langle f^{-1}(x), \xi\rangle_\varphi - \langle x, \xi\rangle_\varphi = \langle x, \xi\rangle_\varphi - \langle x, \xi\rangle_\varphi = 0.$$

Dans la 4ème égalité on a utilisé la formule $f^* = f^{-1}$ (équivalente à $f \in \mathrm{O}(E)$ d'après la Proposition 2.15) et dans la 5ème égalité on a utilisé la formule $f^{-1}(x) = x$ qui résulte de $f(x) = x$ (équivalente à $x \in \ker(f - \mathrm{id}_E)$).

On a démontré que les sous-espaces $\ker(f - \mathrm{id}_E)$, $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont φ-orthogonaux, en particulier ils sont en somme directe. Il suffit de remarquer que, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\ker(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(E).$$

■

2.5 Le groupe des isométries de l'espace métrique (E, d_φ) associé à un espace euclidien

Le théorème suivant affirme que toute isométrie de l'espace métrique (E, d_φ) qui admet l'origine 0_E comme point fixe est linéaire. Plus précisémént :

Théorème 2.25 *Soit* (E, φ) *un espace euclidien et* $f : E \to E$ *une isométrie de l'espace métrique* (E, d_φ) *telle que* $f(0_E) = 0_E$. *Alors* $f \in \mathrm{O}(E)$.

Démonstration: Soit $B = (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de E. Pour $1 \leq i \leq n$ posons $g_i := f_i$.

1ère étape : En utilisant les relations

$$d_\varphi(0_E, f_i) = d_\varphi(0_E, g_i),\ d_\varphi(f_i, f_j) = d_\varphi(g_i, g_j)$$

on démontre que $C := (g_1, \dots, g_n)$ est une famille orthonormée, donc une base orthonormée de E.

2ème étape : Soit $x \in E$. Posons $y := f(x)$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x par rapport à la base B et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de y par rapport à la base C. On a donc $x = \sum_i x_i f_i$, $y = \sum_i y_i g_i$. En utilisant les relations

$$d_\varphi(0_E, x) = d_\varphi(0_E, y),\ d_\varphi(f_i, x) = d_\varphi(g_i, y)$$

on démontre que $y_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.

3ème étape : Soit P la matrice de passage de la base B à la base C, c'est à dire P est définie par la relation

$$C = BP, \text{ soit } g_i = \sum_{s=1}^{n} p_{si} f_s \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

En utilisant le fait que B et C sont des bases orthonormées on démontre que $P \in \mathrm{O}(n)$. En tenant compte de la 2ème étape on a

$$f(x) = y = \sum_i y_i g_i = \sum_i x_i g_i = \sum_i x_i \sum_{s=1}^{n} p_{si} f_s = \sum_i (\sum_k p_{ik} x_k) f_i,$$

ce que démontre que f est linéaire que $M_B(f) = P$. En tenant compte de la Proposition 2.18 on obtient $f \in \mathrm{O}(E)$. ■

Exercice 13 Compléter la démonstration du théorème 2.25.

On obtient le résultat important suivant concernant la classification des isométries de l'espace métrique (E, d_φ).

Corollaire 2.26 *Soit (E, φ) un espace euclidien. Toute isométrie de l'espace métrique (E, d_φ) s'écrit sous la forme*

$$f(x) = f_0(x) + v_0 \text{ où } f_0 \in \mathrm{O}(E), \ v_0 \in E.$$

Démonstration: Soit $v_0 := f(0_E)$, et soit $f_0 : E \to E$ définie par $f_0(x) = f(x) - v_0$. On a donc $f_0 = \tau_{-v_0} \circ f$, où τ_{-v_0} désigne la translation de vecteur $-v_0$. Il résulte que f_0 est une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ) (en tant que composition d'isométries). En plus on a évidemment $f_0(0_E) = 0_E$. D'après le théorème 2.25 on obtient $f_0 \in \mathrm{O}(E)$. Il suffit de remarquer que $f(x) = f_0(x) + v_0$ pour tout $x \in E$. ■

Rappelons les définitions importantes suivantes :

Définition 2.27 *Soit V un K-espace vectoriel. Un sous-espace affine de V est un sous-ensemble $W \subset V$ de la forme $W = a + W_0$, où $a \in V$ et $W_0 \subset V$ est un sous-espace vectoriel de V qui s'appelle la direction (ou le sous-espace directeur) de W.*

Remarque 2.28 *Deux sous-espaces affines $W = a + W_0$, $W' = a' + W'_0$ coïncident si et seulement si $W_0 = W'_0$ et $a' - a \in W_0$.*

Exercice 14 Démontrer cette remarque.

Définition 2.29 *Soient V, W des espaces vectoriels sur K. Une application affine $f : V \to W$ est une application donnée par une formule de la forme*

$$f(x) = f_0(x) + w \tag{12}$$

où $f_0 : V \to W$ est une application linéaire (qui s'appelle la partie linéaire de f), et $w \in W$.

Remarque 2.30 *Soit V un K-espace vectoriel, $f : V \to V'$ une application affine, et f_0 sa partie linéaire. Alors*

1. *f est inversible si et seulement si sa partie linéaire f_0 est inversible.*
2. *Supposons $V = V'$. Alors le lieu $\mathrm{Fix}(f) := \{x \in V |\ f(x) = x\}$ des points fixes de f est soit $\emptyset$, soit un sous-espace affine de direction $\mathrm{Fix}(f_0) = \ker(f_0 - \mathrm{id})$.*

Exercice 15 Démontrer cette remarque. Préciser $\mathrm{Fix}(\tau_v)$ pour la translation $\tau_v : V \to V$ de vecteur $v \in V$.

Notons que, si 1 est une valeur propre de f_0, alors $\ker(f_0 - \mathrm{id})$ coïncide avec l'espace propre $V_1^{f_0}$ associé à cette valeur propre. *On ne peut pas utiliser la notation $V_1^{f_0}$ si 1 n'est pas valeur propre de f_0.*

Définition 2.31 *Soit V un K-espace vectoriel. Une transformation affine de V est une application affine inversible $f : V \to V$.*

Le corollaire 2.26 affirme que

Toute isométrie de l'espace métrique (E, d_φ) associé à un espace euclidien (E, φ) est une transformation affine de E, dont la partie linéaire est orthogonale.

En utilisant le corollaire 2.26 on peut démontrer facilement le théorème suivant de classification des isométries de l'espace métrique (E, d_φ).

Théorème 2.32 (Théorème de classification des isométries d'un espace euclidien) *Soit (E,φ) un espace euclidien, et soit $\mathrm{Isom}(E,d_\varphi)$ le groupe des isométries de l'espace métrique (E,d_φ). Soient $f\in\mathrm{Isom}(E,d_\varphi)$, $f_0\in\mathrm{O}(E)$ la partie linéaire de f, et $F_0\subset E$ le lieu des points fixes de f_0 (qui coïncide avec $\ker(f_0-\mathrm{id}_E)$).*

(1) Il existe un unique sous-espace affine $F\subset E$ de direction F_0 qui est stable par f (i.e. tel que $f(F)=F$).

(2) Il existe une unique paire $(g,v)\in\mathrm{Isom}(E,d_\varphi)\times E$ telle que $\mathrm{Fix}(g)\neq\emptyset$ et $f=\tau_v\circ g=g\circ\tau_v$. Cette paire a les propriétés suivantes :

   (a) $\mathrm{Fix}(g)=F$, en particulier $\mathrm{Fix}(g)$ est un sous-espace affine de direction F_0,

   (b) $v\in F_0$.

Donc toute isométrie f de (E,d_φ) se décompose d'une manière unique comme la composition d'une isométrie avec un point fixe et une translation, qui commutent. Le lieu des points fixes de la première isométrie est un sous-espace affine de direction $\ker(f_0-\mathrm{id}_E)$, et v appartient à cette direction.

Démonstration: (1) Écrivons f sous la forme $f(x)=f_0(x)+w$, où $f_0\in\mathrm{O}(E)$ et $w\in E$.

Existence : Soit $F=F_0+a$ un sous-espace affine de direction F_0. On a

$$f(F)=\{f_0(x)+w|\ x\in F_0+a\}=\{f_0(\xi+a)+w|\ \xi\in F_0\}=\{\xi+f_0(a)+w|\ \xi\in F_0\}=F_0+f(a)+w.$$

Rappelons que deux sous-espaces affines F_0+a, F_0+b (de même direction F_0) coïncident si et seulement si $b-a\in F_0$. Justifier cette remarque. Dans notre cas il en résulte que $f(F)=F$ si et seulement si

$$f_0(a)-a+w\in F_0. \tag{13}$$

Mais d'après la Proposition 2.24 on a une décomposition en somme directe

$$E=F_0\oplus\mathrm{im}(f_0-\mathrm{id}_F),$$

en particulier w se décompose d'une manière unique sous la forme

$$w=x+y,$$

où $x\in F_0$ et $y\in\mathrm{im}(f_0-\mathrm{id}_F)$. En écrivant $y=f_0(b)-b$ avec $b\in E$ on obtient $b-f_0(b)+w=x\in F_0$, donc la condition (13) sera satisfaite pour $a=-b$.

Unicité : Si $F=a+F_0$, $F'=a'+F_0$ sont stables par f alors on obtient

$$(f_0-\mathrm{id}_E)(a)=(f_0-\mathrm{id}_E)(a')=y=-\mathrm{pr}_{\mathrm{im}(f_0-\mathrm{id}_E)}w,$$

donc $a'-a\in\ker(f_0-\mathrm{id}_E)=F_0$, ce qui implique $F=F'$.

(2) *Existence :* Soit $x_0\in F$, où F est le sous-espace affine dont l'existence et l'unicité sont affirmées par 1. Posons $v:=f(x_0)-x_0$. Puisque $x_0\in F$ et $f(x_0)\in F$ il en résulte $v\in F_0$. Justifier cette affirmation. Soit $g:=\tau_v^{-1}\circ f$. Remarquons que $f=\tau_v\circ g$ et

$$g(x_0)=\tau_v^{-1}(f(x_0))=\tau_{-v}(f(x_0))=f(x_0)+x_0-f(x_0)=x_0,$$

donc $x_0\in\mathrm{Fix}(g)$. Nous avons démontré $f=\tau_v\circ g$ et $\mathrm{Fix}(g)\neq\emptyset$. Il nous reste à démontrer $f=g\circ\tau_v$. On a

$$(g\circ\tau_v)(x)=(\tau_v^{-1}\circ f\circ\tau_v)(x)=f(x+v)-v=f_0(x+v)+w-v=f_0(x)+(f_0(v)-v)+w.$$

Mais $f_0(v)-v=0$, parce que $v\in F_0=\ker(f_0-\mathrm{id}_E)$. Donc $(g\circ\tau_v)(x)=f_0(x)+w=f(x)$.

Unicité : Soit $(g',v')\in\mathrm{Isom}(E,d_\varphi)\times E$, telle que $\mathrm{Fix}(g')\neq\emptyset$ et $f=\tau_{v'}\circ g'=g'\circ\tau_{v'}$. Remarquons que g' et f ont la même partie linéaire f_0 (pourquoi), donc g' s'écrit sous la forme

$$g'(x)=f_0(x)+r'.$$

L'égalité $\tau_{v'}\circ g'=g'\circ\tau_{v'}$ donne $f_0(x+v')+r'=f_0(x)+r'+v'$ pour tout $x\in E$. On obtient donc $f_0(v')=v'$, donc $v'\in F_0$. Nous allons montrer que $\mathrm{Fix}(g')=F$. D'après la remarque 2.30, il en résulte que $\mathrm{Fix}(g')$ est un sous-espace affine de direction (d'espace directeur) F_0. Pour tout $x\in\mathrm{Fix}(g')$ on obtient

$f(x) = \tau_{v'}(g'(x)) = \tau_{v'}(x) = x + v' \in \mathrm{Fix}(g')$, où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que v appartient à la direction de $\mathrm{Fix}(g')$. Donc $\mathrm{Fix}(g')$ est un sous-espace affine de direction F_0 qui est stable par f, donc, d'après (1) il en résulte $\mathrm{Fix}(g') = F$. Soit $x_0 \in F = \mathrm{Fix}(g')$. On a $f(x_0) = \tau_{v'} \circ g'(x_0) = x_0 + v'$, donc $v' = f(x_0) - x_0$ pour tout $x_0 \in F$. Ceci montre que $v' = v$ (le vecteur trouvé dans la démonstration de l'existence). Mais alors on a $\tau_v = \tau_{v'}$, donc $g' = f \circ \tau_{v'}^{-1} = f \circ \tau_v^{-1} = g$.

Notons finalement que les propriétés (a), (b) de la paire (g, v) on été déjà démontrées. ■

Définition 2.33 *Soit (E, φ) un plan euclidien, soit $d \subset E$ une droite affine de direction d_0, et soit $v \in d_0 \setminus \{0\}$. La symétrie glissée d'axe d et vecteur de glissement v est la composition $f = \tau_v \circ \sigma_d = \sigma_d \circ \tau_v$, où σ_d désigne la symétrie d'axe d.*

Théorème 2.34 (Théorème de classification des isométries d'un plan euclidien) *Soit (E, φ) un plan euclidien, et soit $f : E \to E$ une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ).*

1. *Si f est une isométrie directe, alors son lieu des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est soit E, soit un singleton, soit $\emptyset$. Dans le premier cas $f = \mathrm{id}_E$, dans le deuxième cas f est une rotation (qui ne coïncide pas avec id_E), et dans le troisième cas f est une translation de vecteur $v \neq 0$.*
2. *Si f est une isométrie indirecte, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est soit un droite affine $d \subset E$, soit $\emptyset$. Dans le premier cas f est une symétrie axiale, et dans le deuxième cas f est une symétrie glissée de vecteur de glissement non-nul.*

Démonstration: Exercice. ■

Définition 2.35 *Soit E un espace euclidien de dimension 3, soit $d \subset E$ une droite affine de direction d_0 dans E, et soit $v \in d_0 \setminus \{0\}$. On appelle vissage (déplacement hélicoïdal) de vecteur v autour de d une isométrie de la forme $f = \tau_v \circ R = R \circ \tau_v$, où R est une rotation autour de d.*

Soit $\pi \subset E$ un plan affine de direction π_0, et soit $v \in \pi_0 \setminus \{0\}$. La reflexion glissée de vecteur v par rapport à π est la composition $f = \tau_v \circ \sigma_\pi = \sigma_\pi \circ \tau_v$, où σ_π désigne la réflexion par rapport à π.

Théorème 2.36 (Théorème de classification des isométries d'un espace euclidien tridimensionnel) *Soient (E, φ) un espace euclidien de dimension 3, et soit $f : E \to E$ une isométrie de l'espace métrique (E, d_φ).*

1. *Si f est une isométrie directe, alors son lieu des points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ est soit E, soit une droite, soit $\emptyset$. Dans le premier cas $f = \mathrm{id}_E$. Dans le deuxième cas f est une rotation (qui ne coïncide pas avec id_E) autour d'une droite. Dans le troisième cas f est soit une translation de vecteur $v \neq 0$, soit un vissage (déplacement hélicoïdal) de vecteur $v \neq 0$.*
2. *Si f est une isométrie indirecte, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est soit un plan, soit un singleton, soit $\emptyset$. Dans le premier cas f est une réflexion par rapport à un plan. Dans le deuxième cas f est une anti-rotation, i.e. la composition d'une rotation $R \neq \mathrm{id}_E$ autour d'une droite d avec une réflexion par rapport à un plan $\pi \perp d$. Dans le troisième cas f est une réflexion plane glissée de vecteur de glissement non-nul.*

Démonstration: Exercice. ■

2.6 Diagonalisation simultanée. Application à un problème d'extrema liés

2.6.1 Diagonalisation simultanée

Soit (E, φ) un espace vectoriel réel de dimension n. Nous allons démontrer

Théorème 2.37 *Soit $\psi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Alors il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de E qui est à la fois φ-orthonormée et ψ-orthogonale.*

La démonstration fournit un algorithme simple qui permet de trouver une telle base.

Démonstration: Puisque φ est non-dégénérée il existe un unique endomorphisme $l \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\varphi(x, l(y)) = \psi(x, y) \ \forall (x, y) \in E \times E. \tag{14}$$

En effet, en utilisant les notations introduites dans la section 1.1, l'égalité ci-dessus est équivalente à l'égalité $R(\varphi) \circ l = R(\psi)$ dans l'espace $L(E, E^*)$. Donc nous avons une solution unique $l = R(\varphi)^{-1} \circ R(\psi)$. Soient $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de E, qui sera appelée la base initiale. Soient $\Phi = (\varphi_{ij})$, $\Psi = (\psi_{ij})$ les matrices des deux formes dans cette base. En appliquant (14) aux paires (f_i, f_j) on obtient pour la matrice $L = (l_{ij})$ de l les formules

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik} l_{kj} = \psi_{ij},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n.$$

Donc $\Phi L = \Psi$, soit

$$L = \Phi^{-1}\Psi \tag{15}$$

Si la base initiale est φ-orthonormée, on aura $L = \Psi$.

Puisque ψ est symétrique, cet endomorphisme est φ-symétrique (auto-adjoint), i.e. $l^* = f$. D'après le théorème sur la forme réduite des endomorphismes symétriques dans un espace euclidien, l est diagonalisable dans une base φ-orthonormée. Plus précisément les espaces propres E_λ de l donnent une décomposition en somme directe φ-orthogonale

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i,$$

où $\mathrm{Spec}(l) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, et $E_i := E_{\lambda_i}$. Pour $x \in E_i$, $y \in E_j$ on a

$$\psi(x, y) = \varphi(x, l(y)) = \lambda_j \varphi(x, y). \tag{16}$$

En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt on trouve une base φ-orthonormée B_i dans E_i pour $1 \leq i \leq k$. Soit $B = B_1 \ldots B_k$ la famille concaténée, qui est une base φ-orthonormée de E. En utilisant (16) on constate que B est aussi ψ-orthogonale. Plus précisément la matrice de ψ dans cette base est

$$M_B(\psi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{d_k} \end{pmatrix},\ \text{où } d_i := \dim(E_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq k\,.$$

■

Dans les applications les formes φ, ψ sont données dans une base qui n'est pas orthonormée. Par exemple on peut avoir $E = \mathbb{R}^n$ (muni d'un produit scalaire φ qui ne coïncide pas nécessairement avec le produit scalaire canonique) et les deux formes sont données dans la base canonique. La matrice de l'endomorphisme l est $L = \Phi^{-1}\Psi$, donc le calcul effectif de cette matrice nécessite l'inversion de Φ . Dans les applications concrètes cette opération d'inversion peut être très compliquée. Heureusement les valeurs propres et les espaces propres de l peuvent être déterminés facilement en utilisant la remarque :

Remarque 2.38 *En utilisant les notations introduites dans la démonstration du théorème 2.37 on a*

1. *Le polynôme caractéristique P_l de l'endomorphisme l est*

$$P_l(X) = \mathrm{dét}(\Phi)^{-1}\mathrm{dét}(\Psi - X\Phi),$$

donc $\mathrm{Spec}(l)$ *coïncide avec l'ensemble des racines du polynôme* $\mathrm{dét}(\Psi - X\Phi)$.

2. *Pour chaque racine λ du polynôme* $\mathrm{dét}(\Psi - X\Phi)$*, l'espace propre associé E_λ de l s'identifie (dans la base initiale $(f_1, \ldots, f_n)$), avec l'espace des solutions du système linéaire homogène* $(\Psi - \lambda\Phi)x = 0$.

Démonstration: Pour la première affirmation il suffit de remarque que

$$\mathrm{dét}(L - XI_n) = \mathrm{dét}(\Phi^{-1}\Psi - XI_n) = \mathrm{dét}(\Phi^{-1}(\Psi - X\Phi) = \mathrm{dét}(\Phi)^{-1}\mathrm{dét}(\Psi - X\Phi).$$

Pour la deuxième affirmation on utilise l'égalité $L - \lambda I_n = \Phi^{-1}(\Psi - \lambda\Phi)$, qui montre que les matrices $L - \lambda I_n$, $\Psi - \lambda\Phi$ ont le même noyau. ■

Cette remarque nous donne un algorithme qui fournit concrètement une base qui diagonalise simultanément les deux formes :

Algorithme de diagonalisation simultanée :

1. On trouve l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ des racines du polynôme $\text{dét}(\Psi - X\Phi)$.
2. Pour chaque racine λ_i de ce polynôme on résout le système linéaire homogène $(\Psi - \lambda_i\Phi)x = 0$ et on écrit le sous-espace $E_i \subset E$ qui correspond (dans la base $(f_1, \dots, f_n)$) à l'ensemble des solutions de ce système.
3. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt on trouve une base φ-orthonormée B_i dans E_i pour $(1 \leq i \leq k)$ et on pose $B = B_1 \dots B_k$.

2.6.2 Diagonalisation simultanée

Soient φ, ψ deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$, φ étant définie positive. Soient q, r les formes quadratiques associées à φ, ψ respectivement. Posons

$$S_q = \{x \in E |\ q(x) = 1\},$$

et remarquons que S_q coïncide avec la sphère unité par rapport à la norme $\| \cdot \|_\varphi$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange on peut résoudre le problème d'extrema lié associé à l'application r et la contrainte (liaison) $q(x) = 1$. Plus précisément on va étudier le problème

Problème : Spécifier les valeurs critiques et les points critiques de la restriction $r_{|S_q}$.

On va appliquer le théorème de Lagrange :

Théorème 2.39 *(Le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour les extrema liés) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soient $c : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ des applications différentiables sur Ω. Supposons que $d_x c \neq 0$ pour tout point $x \in H := c^{-1}(0)$. Alors pour un point $x \in \Omega$ les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *x est un point critique de la restriction $f|_H$,*
2. *Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ (qui s'appelle le multiplicateur de Lagrange correspondant à ce point critique) tel que (x, μ) soit une solution du système*
$$\left\{ \begin{array}{lcl} c(x) & = & 0 \\ \nabla_{x_0} f & = & \mu \nabla_{x_0} c\,. \end{array} \right.$$

Le sous-ensemble $H \subset \Omega$ est défini par l'équation (la liaison) $c(x) = 0$, et l'hypothèse du théorème garantit que H est une *hypersurface lisse.*

Dans notre cas particulier nous avons $\Omega = \mathbb{R}^n$, $c(x) = q(x) - 1$, $f(x) = r(x)$. En utilisant la symétrie des matrices Φ, Ψ des deux formes on obtient pour les gradients de q et r dans un point $x \in \mathbb{R}^n$ les formules

$$\nabla_x q = 2\Phi x,\ \nabla_x r = 2\Psi x$$

Puisque Φ est inversible, la première formule montre en particulier que le gradient de q est non-nul en tout point $x \in S_q$, donc S_q est une hypersurface lisse, et la méthode des multiplicateurs de Lagrange est applicable. Le système de Lagrange s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} q(x) & = & 1 \\ \nabla_x r & = & \mu \nabla_x q \end{array} \right. , \tag{17}$$

qui est un système pour $(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. La deuxième équation devient

$$(\Psi - \mu\Phi)(x) = 0,$$

et la première équation montre que nous cherchons des solutions (x, μ) avec $x \neq 0$. Mais, pour μ fixé, le système linéaire homogène $(\Psi - \mu\Phi)(x) = 0$ admet des solutions non-triviales si et seulement si $\text{dét}(\Psi - \mu\Phi) = 0$. On arrive donc à l'algorithme suivant qui résout le système de Lagrange (17) :

1. On trouve l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ ds racines du polynôme $\text{dét}(\Psi - X\Phi)$. C'est l'ensemble des valeurs possibles du multiplicateur de Lagrange μ.
2. Pour chaque racine λ_i de ce polynôme on résout le système linéaire homogène $(\Psi - \lambda_i\Phi)x = 0$ et on écrit le sous-espace $E_i \subset \mathbb{R}^n$ des solutions de ce système.

3. On écrit l'ensemble $\mathrm{Crit}\big(r_{|S(q)}\big)$ des points critiques de la restriction $r_{|S_q}$, qui coïncide avec la réunion disjointe $\bigcup_{i=1}^k S_q(E_i)$, où
$$S_q(E_i) := E_i \cap S(q) = \{x \in E_i |\ q(x) = 1\}.$$
La valeur critique qui correspond à un point critique $x \in S_q(E_i)$ est
$$r(x) = \psi(x, x) = \varphi(x, l(x)) = \lambda_i \varphi(x, x) = \lambda_i q(x) = \lambda_i$$
.

Nous avons utilisé ici la formule $l(x) = \lambda_i x$, qui résulte en remarquant que le sous-espace E_i coïncide avec l'espace propre de l associé à la valeur propre λ_i.

L'ensemble $S_q(E_i)$ est la sphère unité par rapport à la norme $\|\cdot\|_\varphi$ dans l'espace E_i, donc c'est une sphère de dimension $\dim(E_i) - 1$. Si on connaît une base φ-orthonormée $B_i = (h_1^{(i)}, \dots, h_{m_i}^{(i)})$ du sous-espace E_i, on peut donner une formule plus simple de cette sphère :
$$S_q(E_i) = \Big\{ \sum_{j=1}^{m_i} u_j h_j^{(i)} |\ \sum_{j=1}^{m_j} u_j^2 = 1 \Big\}\,.$$

Remarquer que, si pour un indice $i \in \{1, \dots, k\}$ on a $\dim(E_i) = 1$ (c'est à dire si la multiplicité m_i de la racine λ_i est 1), alors $S_q(E_i)$ se réduit à un ensemble à deux éléments, à savoir $S_q(E_i) = \{\pm h_1^{(i)}\}$, où $h_1^{(i)} \in E_i$ est un vecteur normé par rapport à la norme $\|\cdot\|_\varphi$. Donc, si toutes les racines λ_i sont simples, alors l'ensemble $\mathrm{Crit}\big(r_{|S(q)}\big)$ sera fini, et aura $2n$ éléments.

Exemple 7 Soient φ, ψ les formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^3$ définies par
$$\varphi(x,y) = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2\,,\ \psi(x,y) = 4(x_1y_3 + x_3y_1)\,.$$
Les formes quadratiques associées sont
$$q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3\,,\ r(x) = 8x_1x_3.$$
Les matrices de φ et ψ dans la base canonique sont et sa matrice est :
$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On obtient donc :
$$\mathrm{dét}(\Psi - X\Psi) = \begin{vmatrix} -3X & X & 4+X \\ X & -3X & X \\ 4+X & X & -3X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} -3X & X & 4+X \\ 1 & -3 & 1 \\ 4+X & X & -3X \end{vmatrix} =$$
$$= X \begin{vmatrix} -3X & -8X & 4+4X \\ 1 & 0 & 0 \\ 1+X & 12+4X & -4-4X \end{vmatrix} = -X(4+4X) \begin{vmatrix} -8X & 1 \\ 12+4X & -1 \end{vmatrix} = -X(4+4X)(-12+4X) = 16X(X+1)(X-3)$$
Les racines de ce polynôme sont
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3.$$
Les sous-espaces $E_i := \ker(\Psi - \lambda_i\Phi)$ sont :
$$E_1 = \ker(\Psi) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \ker(\Psi + \Psi) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$E_3 = \ker(\psi - 3\Phi) = \ker \begin{pmatrix} -9 & 3 & 7 \\ 3 & -9 & 3 \\ 7 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\dim(E_i) = 1$. Pour obtenir une base qui est à la fois f_q-orthonormée et f_r-orthogonale il suffit de normaliser les générateurs

$$g_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ g_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ g_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des trois noyaux E_i par rapport au produit scalaire φ. On a

$$\|g_1\|^2_\varphi = 3, \ \|g_2\|^2_\varphi = 8, \ \|g_3\|^2_\varphi = 3(9+4+9) - 2(9+6+6) = 24.$$

On obtient donc la base formée avec les vecteurs

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ h_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ h_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre le problème d'extrema liés associé à l'application $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et à la liaison $q(x) = 1$ on va utiliser la méthode expliquée ci-dessus. L'ensemble des valeurs possibles du multiplicateur de Lagrange μ est

$$\mathcal{L} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{0, -1, 3\}.$$

Pour chaque $\lambda \in \mathcal{L}$ l'ensemble des points critiques associé à ce multiplicateur est $S_q(E_i) = E_i \cap S(q)$. Dans notre cas on obtient

$$\mathrm{Crit}\big(r_{|S(q)}\big) = \{\pm h_1, \pm h_2, \pm h_3\},$$

donc nous avons 6 points critiques. Les valeurs extrémales correspondantes sont λ_1, λ_2, λ_3. Il en résulte que $\pm h_2$ sont des points de minimum, et $\pm h_3$ sont des points de maximum de la restriction $r_{|S(q)}$. Les points critiques $\pm g_1$ correspondent à la valeur critique 0, et ils ne sont donc pas de points extrémaux.

3 Espaces Affines

3.1 Espaces Affines. Vectorialisation. Translations

Soit E un K-espace vectoriel.

Définition 3.1 *Un espace affine dirigé par E (d'espace directeur E) est un ensemble non-vide $\mathcal{E}$ muni d'une application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ notée $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ satisfaisant les conditions :*

1. *Pour tout $q \in \mathcal{E}$ l'application*
$$V_q : \mathcal{E} \to E, V_q(x) = \overrightarrow{qx} \in E$$
est une bijection,
2. *pour tous $(a, b, c) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ on a*
$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$$
(la relation de Chasles).

Si $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par E, et E est un K-espace vectoriel de dimension finie n, on va dire que $\mathcal{E}$ est un K-espace affine de dimension n. Les éléments d'un espace affine $\mathcal{E}$ s'appellent points de $\mathcal{E}$.

Remarque 3.2 *Dans un espace affine on a les identités*

$$\overrightarrow{aa} = 0, \ \overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}.$$

Remarque 3.3 *L'espace vectoriel E admet une structure canonique d'espace affine dirigé par E. Cette structure est définie par $\overrightarrow{uv} := v - u$ pour toute paire $(u, v) \in E \times E$. Pour un point $q \in \mathcal{E}$ fixé, la bijection $V_q : \mathcal{E} \to E$ identifie la structure d'espace affine de $\mathcal{E}$ avec la structure canonique d'espace affine de l'espace vectoriel E.*

Cette remarque montre que, en choisissant un point $q \in \mathcal{E}$ (qui joue le rôle d'une origine) on "vectorialise" l'espace affine $\mathcal{E}$, i.e. on l'identifie avec son espace vectoriel directeur.

Définition 3.4 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, et soit $v \in E$. La translation de vecteur v est l'application bijective $\tau_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ donnée par $\tau_v(p) := V_p^{-1}(v)$. Par définition on a donc :*

$$\overrightarrow{p\ \tau_v(p)} = v\ \forall (v,p) \in E \times \mathcal{E}. \tag{18}$$

L'application $E \ni v \mapsto \tau_v$ a les propriétés fondamentales suivantes

$$\begin{gathered} \tau_{0_E} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \\ \forall (v,w) \in E \times E,\ \tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w. \end{gathered} \tag{19}$$

En utilisant ces propriétés on démontre facilement que, pour tout $v \in E$, τ_v est une bijection, et $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$. Les mêmes propriétés montrent que l'application $E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ donnée par $\alpha(v,x) = \tau_v(x)$ est une action du groupe abélien $(E,+)$ sur $\mathcal{E}$. En tenant compte que, pour tout $q \in \mathcal{E}$ l'application $v \mapsto \tau_v(q)$ est une bijection (pourquoi ?), on conclut que cette action est libre et transitive.

Remarque 3.5 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. L'application $\alpha : E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $\alpha(v,x) = \tau_v(x)$ est une action libre et transitive du groupe abélien $(E,+)$ sur $\mathcal{E}$.*

Réciproquement

Remarque 3.6 *Soit $\alpha : E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une action libre et transitive du groupe abélien $(E,+)$ sur un ensemble non-vide $\mathcal{E}$. Pour tout $p \in \mathcal{E}$ soit $\alpha_p : E \to \mathcal{E}$ la bijection $v \mapsto \alpha(v,p)$. Alors la formule*

$$\overrightarrow{pq} = \alpha_p^{-1}(q),$$

définit une structure d'espace affine sur $\mathcal{E}$.

Pour une paire $(p,v) \in \mathcal{E} \times E$ on va utiliser la notation

$$p + v := \tau_v(p).$$

Cette notation est justifiée par l'identité (18).

3.2 Repère affine. Coordonnées affines. Barycentres et coordonnées barycentriques

Soit E un K-espace de dimension n, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.

Définition 3.7 *Un repère affine de $\mathcal{E}$ est une famille $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ telle que $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$ est une base de E. Le point p_0 s'appelle l'origine du système.*

Soit $\mathcal{B}_E$ l'ensemble des bases de E. Un repère affine $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ définit une paire $(p_0, (f_1, \dots, f_n)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{B}_E$. Réciproquement toute paire $(p_0, (f_1, \dots, f_n)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{B}_E$ définit un repère affine $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ où $p_i := \tau_{f_i}(p_0)$ pour $1 \leq i \leq n$. L'ensemble des repères affines de $\mathcal{E}$ s'identifie donc au produit cartésien $\mathcal{E} \times \mathcal{B}_E$.

Soit $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et soit $p \in \mathcal{E}$. En décomposant le vecteur $\overrightarrow{p_0p}$ dans la base $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$ on obtient

$$\overrightarrow{p_0p} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}, \tag{20}$$

donc

$$p = p_0 + \overrightarrow{p_0p} = p_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}.$$

Les scalaires $x_i \in K$ s'appellent les coordonnées de p par rapport au repère affine $(p_0, p_1, \dots, p_n)$. La donnée d'un repère affine $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ dans $\mathcal{E}$ définit donc une bijection $\Psi_{(p_0,p_1,\dots,p_n)} : K^n \to \mathcal{E}$ donné par

$$\Psi_{(p_0,p_1,\dots,p_n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := p_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}, \tag{21}$$

et, via cette bijection, la structure d'espace affine de $\mathcal{E}$ correspond à la structure canonique d'espace affine sur l'espace vectoriel K^n. Autrement dit $\Psi_{(p_0,p_1,\dots,p_n)}$ est un isomorphisme d'espaces affines. L'isomorphisme réciproque $\Psi^{-1}_{(p_0,p_1,\dots,p_n)}:\mathcal{E}\to K^n$ associe à tout point $p\in\mathcal{E}$ l'élément

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in K^n$$

définit par la décomposition (20). Via cette bijection le point p_0 correspond à 0_{K^n}.

Définition 3.8 *Une droite (affine) dans $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de la forme*

$$\mathcal{D}=a+D,$$

où $a\in\mathcal{E}$ et $D\subset E$ est une droite vectorielle de E, qui s'appelle la direction de $\mathcal{D}$. Deux droites affines $\mathcal{D}=a+D$, $\mathcal{D}'=a'+D'$ sont dites parallèles si $D=D'$ (donc si elles ont la même direction).

En choisissant un générateur $v\in E\setminus\{0\}$ de D on obtient

$$\mathcal{D}=a+\delta=a+Kv=\{a+\lambda v|\ \lambda\in K\},$$

donc $\mathcal{D}$ est définie par l'équation paramétrique

$$p(\lambda)=a+\lambda v,\ \lambda\in K.$$

On va dire aussi que $\mathcal{D}$ est *la droite affine passant par a et dirigée par D (ou dirigée par v)*. Pour deux points *différents* a, $b\in\mathcal{E}$ il existe un seule droite affine qui les contient. Il s'agit de la droite affine passant par a et dirigée par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})=K\overrightarrow{ab}$. Cette droite est notée (ab). On a donc

$$(ab):=a+K\overrightarrow{ab}=\{a+\lambda\overrightarrow{ab}|\ \lambda\in K\}\,,$$

dont l'équation paramétrique sera $p(\lambda)=a+\lambda\overrightarrow{ab}$. Choisissons un point $q\in\mathcal{E}$, qui va jouer le rôle d'origine de l'espace, et soit $(a,b)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$. Alors on a l'équivalence

$$p=a+\lambda\overrightarrow{ab}\Leftrightarrow\overrightarrow{ap}=\lambda\overrightarrow{ab}\Leftrightarrow\overrightarrow{qp}-\overrightarrow{qa}=\lambda(\overrightarrow{qb}-\overrightarrow{qa})\Leftrightarrow\overrightarrow{qp}=(1-\lambda)\overrightarrow{qa}+\lambda\overrightarrow{qb}\,. \tag{22}$$

Définition 3.9 *Soit $(a,b)\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ et soit $(\mu,\lambda)\in K\times K$ avec $\mu+\lambda=1$. Le barycentre des points a, b affectés des poids μ, λ est l'unique point $p\in\mathcal{E}$ qui satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\mu\overrightarrow{pa}+\lambda\overrightarrow{pb}=0$,
2. *Pour tout $q\in\mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{qp}=\mu\overrightarrow{qa}+\lambda\overrightarrow{qb}$.*
3. *Il existe $q\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{qp}=\mu\overrightarrow{qa}+\lambda\overrightarrow{qb}$.*

Si $a\neq b$, on va dire que μ, λ sont les coordonnées barycentriques du point $p\in(ab)$ par rapport à la paire (a,b).

La formule (22) montre que, si $a\neq b$, alors

$$(ab)=\{p\in\mathcal{E}|\ \exists\lambda\in K,\ \overrightarrow{qp}=(1-\lambda)\overrightarrow{qa}+\lambda\overrightarrow{qb}\}=\{p\in\mathcal{E}|\ \exists(\mu,\lambda)\in K\times K,\ \mu+\lambda=1,\ \overrightarrow{qp}=\mu\overrightarrow{qa}+\lambda\overrightarrow{qb}\}\,,$$

donc

Remarque 3.10 *La droite affine (ab) est l'ensemble des tous les barycentres des points a, b (affectés des poids μ, λ tels que $\mu+\lambda=1$).*

On peut généraliser la notion de barycentre pour une famille à k points :

Proposition 3.11 *Soit $(a_1,\dots,a_k)\in\mathcal{E}^k$, et soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in K^k$ telle que $\sum_{i=1}^k\lambda_i\neq 0$. Alors il existe un unique point $b\in\mathcal{E}$ tel que l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

(1) $\sum_{i=1}^k\lambda_i\overrightarrow{ba_i}=0$,

(2) Pour tout $q\in\mathcal{E}$ on a $(\sum_{i=1}^k\lambda_i)\overrightarrow{qb}=\sum_{i=1}^k\lambda_i\overrightarrow{qa_i}$,

(3) Il existe $q \in \mathcal{E}$ tel que $(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\overrightarrow{qb} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{qa_i}$.

Démonstration: Pour montrer l'equivalence des trois conditions (exercice) démontrer les implications (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1). Pour montrer l'existence et l'unicité de b on utilise la condition (3), et on obtient une solution unique

$$b = q + \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{qa_i}. \tag{23}$$

■

Le point b donné par la proposition 3.11 s'appelle le barycentre des points $a_1, \dots, a_k$ affectés des poids $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, et sera désigné par $\mathrm{Bar}((\lambda_1, \dots, \lambda_k), (a_1, \dots, a_k))$. Ce point est donné par la formule explicite (23), dont le membre droit est (d'après la proposition 3.11) indépendant du choix de l'origine q.

Si $\mathcal{E} = E$ (muni de sa structure canonique d'espace affine) on peut prendre $q = 0_E$, et on obtient

$$\mathrm{Bar}((\lambda_1, \dots, \lambda_k), (a_1, \dots, a_k)) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i.$$

Notons que le barycentre $\mathrm{Bar}((\lambda_1, \dots, \lambda_k, (a_1, \dots, a_k))$ est défini seulement si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Dans le cas particulier $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ on va noter

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i := \mathrm{Bar}((\lambda_1, \dots, \lambda_k), (a_1, \dots, a_k)),$$

et la "somme" $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ ainsi définie sera appelée *combinaison affine des points a_i* avec les coefficients λ_i.

Important : Pour $(a_1, \dots, a_k) \in \mathcal{E}^k$ la combinaison affine $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ est définie seulement si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Proposition 3.12 (L'associativité du barycentre) *Soient I un ensemble fini, et $I = \cup_{j=1}^{k} I_j$ une partition de I en réunion de sous-ensembles non-vides. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^I$ une famille de scalaires indexée par I, telle que*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0, \ \forall j \in \{1, \dots, k\}, \ \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0.$$

Alors pour toute famille $(a_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ on a

$$\mathrm{Bar}((\lambda_i)_{i \in I}, (a_i)_{i \in I}) = \mathrm{Bar}\left(\left(\sum_{i \in I_j} \lambda_i \right)_{1 \leq j \leq k}, \left(\mathrm{Bar}\big((\lambda_i)_{i \in I_j}, (a_i)_{i \in I_j}\big) \right)_{1 \leq j \leq k} \right).$$

Démonstration: Exercice. Utiliser la définition du barycentre. ■

Par exemple, en supposant $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$, on a :

$$\mathrm{Bar}\big((\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), (a_1, a_2, a_3, a_4)\big) = \mathrm{Bar}\Big(\big(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3 + \lambda_4\big), \big(\mathrm{Bar}((\lambda_1, \lambda_2), (a_1, a_2)), \mathrm{Bar}((\lambda_3, \lambda_4), (a_3, a_4))\big) \Big).$$

Soit $(p_0, \dots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, soit $p \in \mathcal{E}$ et soient $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de p par rapport à ce repère. Par définition, on a donc

$$\overrightarrow{p_0 p} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

En posant $x_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$ on constate que $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$ et $\overrightarrow{p_0 p} = \sum_{i=0}^{n} x_i \overrightarrow{p_0 p_i}$, donc (en prenant $q = p_0$ dans la proposition 3.11), on constate que

$$p = \mathrm{Bar}((x_0, \dots, x_n), (p_0, \dots, p_n)).$$

Les scalaires $x_0, \dots, x_n$ s'appellent *les coordonnées barycentriques* de p par rapport au repère affine $(p_0, \dots, p_n)$. Les coordonnées barycentriques d'un point satisfont toujours l'identité $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$. On peut donc écrire p comme combinaison affine des points $p_0, \dots, p_n$:

$$p = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i.$$

Remarque 3.13 *Une famille* $(p_0, \ldots, p_n) \in \mathcal{E}^n$ *est un repère affine si et seulement si tout point* $p \in \mathcal{E}$ *s'écrit d'une manière unique comme combinaison affine des points* $p_0, \ldots, p_n$.

Démonstration: Exercice. ■

En utilisant cette remarque on peut montrer facilement que la condition "être un repère affine" est invariante par permutation, ce qui n'était pas du tout évident dans la définition 3.7.

3.3 Sous-espaces affines

Soit E un K-espace de dimension n, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.

Définition 3.14 *Un sous-ensemble* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *est dit sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, *et tout barycentre de points pris dans* $\mathcal{F}$ *appartient à* $\mathcal{F}$, *i.e.*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in K^k \ \forall(p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{F}^k, \ \mathrm{Bar}((\lambda_1, \ldots, \lambda_k), (p_1, \ldots, p_k)) \in \mathcal{F}.$$

(2) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, *et toute combinaison affine de points pris dans* $\mathcal{F}$ *appartient à* $\mathcal{F}$.

(3) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, *et pour tout point* $q \in \mathcal{F}$ *le sous-ensemble* $F := \{\overrightarrow{qp} | \ p \in \mathcal{F}\} \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

(4) Il existe un point $q \in \mathcal{F}$ *tel que le sous-ensemble* $F := \{\overrightarrow{qp} | \ p \in \mathcal{F}\} \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

(5) Il existe un point $q \in \mathcal{F}$ *et un sous-espace vectoriel* $F \subset E$ *tel que*

$$\mathcal{F} = q + F := \{q + v | \ v \in F\}.$$

L'équivalence de ces conditions est proposée comme exercice. Si K est un corps de caractéristique différente de 2, alors les sous-espaces affines sont caractérisés par par une propriété très simple :

Proposition 3.15 *Supposons que* $\mathrm{car}(K) \neq 2$, *soit* E *un* K*-espace de dimension* n, *soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine dirigé par* E, *et soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *un sous-ensemble non-vide. Alors* $\mathcal{F}$ *est un sous-espace affine si et seulement si pour toute paire* $(a, b) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *avec* $a \neq b$ *on a* $(ab) \subset \mathcal{F}$.

Démonstration: Exercice. Utiliser le lemme 3.16 démontré ci-dessous, qui donne une caractérisation simple des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel sur un corps de caractéristique différente de 2. ■

Lemme 3.16 *Soit* K *un corps avec* $\mathrm{car}(K) \neq 2$, *soit* E *un* K*-espace vectoriel, et soit* $F \subset E$. *Alors* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si*

(i) $0_E \in F$, *et*

(ii) $\forall(u, v) \in F \times F, \ u + K(v - u) \subset F$.

Démonstration: En effet, ces deux conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont aussi suffisantes, donc vérifions que, si ces deux conditions sont satisfaites, alors alors F est un sous-espace vectoriel de E. En utilisant (i) et (ii) pour $u = 0_E$, on obtient facilement

$$\forall x \in F, \ Kx \subset F. \tag{24}$$

Soient $(x, y) \in F^2$ et $(\alpha, \beta) \in K^2$. En utilisant (24) on obtient $u := \alpha x \in F$, et $v := \beta y \in F$. Puisque $\mathrm{car}(K) \neq 2$ on peut écrire :

$$\alpha x + \beta y = u + v = 2_K \frac{1}{2_K}(u + v) = 2_K\big(u + \frac{1}{2_K}(v - u)\big),$$

qui appartient à F d'après (ii) et (24). ■

Remarque 3.17 *Supposons* $K = \mathbb{F}_2$. *Alors*

1. *toute droite affine de* $\mathcal{E}$ *a exactement deux points,*
2. *tout sous-ensemble* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *satisfait la condition : pour toute paire* $(a, b) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ *avec* $a \neq b$ *on a* $(ab) \subset \mathcal{F}$.

3. *Si* $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ *il existe de sous-ensembles non-vides satisfaisant cette condition qui ne sont pas des sous-espaces affines de* $\mathcal{E}$.

Remarque 3.18 *Soit* $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ *un sous-espace affine. Le sous-espace vectoriel* $F \subset E$ *intervenant dans les conditions (3), (4), (5) dépend seulement de* $\mathcal{F}$ *(est indépendant de* q*). Ce sous-espace vectoriel s'appelle la direction (le sous-espace vectoriel directeur) de* $\mathcal{F}$. *La structure d'espace affine* $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ *(dirigée par* E*) dont on a muni* $\mathcal{E}$, *induit une structure d'espace d'espace affine* $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to F$ *(dirigée par* F*) sur* $\mathcal{F}$.

La dimension d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est, par définition, la dimension de son sous-espace directeur. Une droite affine est un sous-espace affine de dimension 1, et cette notion coïncide avec celle donnée par la définition 3.8. Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie, alors un hyperplan de $\mathcal{E}$ est, par définition, un sous-espace affine de dimension $\dim(\mathcal{E}) - 1$ (de codimension 1).

Remarque 3.19 *Soit* $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-espaces affines de* $\mathcal{E}$, *et soit* $F_i \subset E$ *la direction de* $\mathcal{F}_i$. *Si* $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i \neq \emptyset$, *alors* $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ *est un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$, *de direction* $\cap_{i\in I} F_i$.

Démonstration: Exercice. ■

Donc tout intersection *non-vide* de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Définition 3.20 *Soient* $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ *deux sous-espaces affines de* $\mathcal{E}$ *de directions* F', F'' *respectivement. On dit que* $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ *sont parallèles (et on écrit* $\mathcal{F}' \parallel \mathcal{F}''$*) si* $F' \subset F''$ *ou* $F'' \subset F'$.

Remarque 3.21 *Si* $\mathcal{F}' \parallel \mathcal{F}''$ *alors soit* $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}''$, *soit* $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$, *soit* $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}'' = \emptyset$.

Exercice 16 Donner un exemple d'une paire de sous-espaces affines $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ tels que $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}'' = \emptyset$ mais qui ne sont pas parallèles.

3.3.1 Paramétrisations d'un sous-espace affine

Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de direction $F \subset E$. Soit $q \in \mathcal{F}$ et $(v_1, \dots, v_k)$ une base de F. Alors l'application

$$f_{q,(v_1,\dots,v_k)} : K^k \to \mathcal{F}$$

définie par $f_{q,(v_1,\dots,v_k)}(t_1, \dots, t_k) := q + \sum_{j=1}^k t_i v_i$ est une bijection (pourquoi ?), donc tout point $p \in \mathcal{F}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$p = q + \sum_{i=1}^{k} t_j v_j \text{ avec } t_j \in K\,. \tag{25}$$

L'application $f_{q,(v_1,\dots,v_k)} : K^k \to \mathcal{F}$ est donc une paramétrisation bijective de $\mathcal{F}$.

Soit $(p_0, \dots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et soit $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$ la famille des coordonnées de q dans ce repère. On a donc

$$q = p_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overrightarrow{p_0 p_i}. \tag{26}$$

En décomposant v_j par rapport à la base $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$ on obtient des formules de la forme

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \overrightarrow{p_0 p_i}. \tag{27}$$

En combinant (25), (26), (27), on obtient pour les coordonnées x_i de $p \in \mathcal{F}$ par rapport au repère affine $(p_0, \dots, p_n)$:

$$x_i = \xi_i + \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} t_j\,. \tag{28}$$

En posant $A := (\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq k}} \in M_{n,k}(K)$, on obtient la formule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix}, \tag{29}$$

qui donne le système des coordonnées affines d'un point variable $p \in \mathcal{F}$ en fonction du système de paramètres $(t_1, \ldots, t_k) \in K^k$.

3.3.2 Sous-espace affine engendré par un sous-ensemble non-vide

Soit $S \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble non-vide.

Définition 3.22 *Le sous-espace affine engendré par S est le sous-espace affine*

$$\mathrm{Aff}(S) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ sous-espace affine de } \mathcal{E} \\ S \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}.$$

Donc $\mathrm{Aff}(S)$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines qui contiennent S.

Proposition 3.23 *Soit $\emptyset \neq S \subset \mathcal{E}$. Alors*

1. $\mathrm{Aff}(S)$ *coïncide avec l'ensemble des combinaisons affines de points pris dans S, i.e. on a l'égalité*

$$\mathrm{Aff}(S) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} x_i p_i |\ k \in \mathbb{N}^*,\ (x_1, \ldots, x_k) \in K^k,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = 1,\ (p_1, \ldots, p_k) \in S^k \Big\}.$$

2. *Soit $q \in S$. Alors $\mathrm{Aff}(S) = q + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{qp}|\ p \in S\}$, en particulier la direction de $\mathrm{Aff}(S)$ est le sous-espace vectoriel engendré par le sous-ensemble $\{\overrightarrow{qp}|\ p \in S\}$.*

Démonstration: Exercice. ■

Définition 3.24 *Soit $m \in \mathbb{N}$. Une famille $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$ est dite affinement indépendante si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée*

1. *pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$ on a*
$$p_i \notin \mathrm{Aff}\big((p_j)_{j \in \{0,\ldots,m\} \setminus \{i\}}\big),$$
i.e. aucun des points p_i n'est combinaison affine des autres points de la famille.
2. *La famille $(\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_m}) \in E^m$ est libre.*
3. $\dim(\mathrm{Aff}(p_0, \ldots, p_m)) = m$.

Corollaire 3.25 *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathcal{E}^{m+1}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $(p_0, \ldots, p_m)$ *est un repère affine,*
2. $m = \dim(\mathcal{E})$ *et* $\mathrm{Aff}(p_0, \ldots, p_m) = \mathcal{E}$,
3. $m = \dim(\mathcal{E})$ *et la famille $(p_0, \ldots, p_m)$ est affinement indépendante.*

Démonstration: Exercice. ■

3.4 Applications affines

Soient E, E' des K-espaces vectoriels, et soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ des espaces affines dirigés par E, E' respectivement.

Définition 3.26 *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est dite application affine si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *f préserve les barycentres, i.e.*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in K^k\ \forall (p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{E}^k,$$

$$f\big(\mathrm{Bar}((\lambda_1, \ldots, \lambda_k), (p_1, \ldots, p_k))\big) = \mathrm{Bar}((\lambda_1, \ldots, \lambda_k), (f(p_1), \ldots, f(p_k))).$$

2. *Il existe une application linéaire $f_0 : E \to E'$ telle que*

$$\forall (p, q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E},\ f_0(\overrightarrow{pq}) := \overrightarrow{f(p)f(q)}.$$

3. Il existe une application linéaire $f_0 : E \to E'$ telle que

$$\forall q \in \mathcal{E}\ \forall v \in E,\ \ f(q+v) := f(q) + f_0(v).$$

4. Il existe une application linéaire $f_0 : E \to E'$ et un point $q \in \mathcal{E}$ tels que

$$\forall v \in E,\ \ f(q+v) := f(q) + f_0(v).$$

L'équivalence des ces conditions est proposée comme exercice.

Proposition 3.27 *Supposons* $\mathrm{car}(K) \neq 2$. *Alors $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si pour toute paire $(\mu, \lambda) \in K^2$ telle que $\mu + \lambda = 1$, et pour toute paire $(a, b) \in \mathcal{E}^2$ on a*

$$f(\mu a + \lambda b) = \mu f(a) + \lambda f(b)\,. \tag{30}$$

Démonstration: On peut supposer $\mathcal{E} = E$ muni de sa structure canonique d'espace affine, et $f(0_E) = 0_E$. Il suffit de montrer que toute application $f : E \to E$ satisfaisant (30) telle que $f(0_E) = 0_E$ est linéaire. En choisissant $a = 0_E$, $b = v$, $\mu = 1 - \lambda$ dans (30) on obtient $f(\lambda v) = \lambda v$. En choisissant $a = v$, $b = w$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2_K}$ dans (30) on obtient

$$f\left(\frac{1}{2_K}(v+w)\right) = \frac{1}{2_K} f(u) + \frac{1}{2_K} f(v)\,.$$

Mais $f\big(\frac{1}{2_K}(v+w)\big) = \frac{1}{2_K} f(v+w)$ (d'après la première partie de la démonstration), donc $f(v+w) = f(v) + f(w)$.

Remarque 3.28 *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine, et soient $q \in \mathcal{E}$, $q' \in \mathcal{E}'$. En identifiant $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ avec les espaces vectoriels E, E' via les bijections de vectorialisation V_q, $V_{q'}$, on obtient une application affine $E \to E'$ au sens de la définition 2.29. Réciproquement, toute application affine $E \to E'$ au sens de la définition 2.29 définit une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$.*

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un application affine. L'application linéaire $f_0 : E \to E'$ donnée par la définition 3.26 s'appelle *la partie linéaire de f.*

Soient $(p_0, \dots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, $(p'_0, \dots, p'_{n'})$ un repère affine de $\mathcal{E}'$, et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Soit $(\xi_1, \dots, \xi_{n'})$ le système des coordonnées de $f(p_0)$ par rapport au repère $(p'_0, \dots, p'_{n'})$, et soit

$$A = (\alpha_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n' \\ 1 \leq i \leq n}} \in M_{n',n}(K)$$

la matrice de f_0 par rapport aux bases $(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$, $(\overrightarrow{p'_0p'_1}, \dots, \overrightarrow{p'_0p'_{n'}})$. Pour un point $p \in \mathcal{E}$ désignons par $(x_1, \dots, x_n)$ le système des coordonnées de p dans le repère $(p_0, \dots, p_n)$, et par $(y_1, \dots, y_{n'})$ le système des coordonnées de $f(p)$ dans le repère $(p'_0, \dots, p'_{n'})$. On va exprimer $(y_1, \dots, y_{n'})$ en fonction de $(x_1, \dots, x_n)$. On a

$$f(p) = f(p_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}) = f(p_0) + f_0(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{p_0p_i}) = p'_0 + \sum_{j=1}^{n'} \xi_j \overrightarrow{p'_0p'_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i f_0(\overrightarrow{p_0p_i}) =$$

$$p'_0 + \sum_{j=1}^{n'} \xi_j \overrightarrow{p'_0p'_j} + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n'} \alpha_{ji} \overrightarrow{p'_0p'_j} = p'_0 + \sum_{j=1}^{n'} (\xi_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i) \overrightarrow{p'_0p'_j},$$

donc

$$y_j = \xi_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i \ \ \forall j \in \{1, \dots, n'\}. \tag{31}$$

Proposition 3.29 *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Alors*

1. *Pour tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ l'image directe $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$.*
2. *Si $S \subset \mathcal{E}$ est un ensemble non-vide, alors $f(\mathrm{Aff}(S)) = \mathrm{Aff}(f(S))$.*
3. *Soit $\mathcal{F}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$. Alors l'image inverse et soit $\emptyset$, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.*

Démonstration: Exercice. ■

Proposition 3.30 *Soient E, F des espaces vectoriels de dimension finie sur K, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ espaces affines de directions E et F respectivement, $(p_0, \dots p_n) \in \mathcal{E}^{n+1}$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et $(q_0, \dots q_n) \in \mathcal{F}^{n+1}$. Alors il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $f(p_i) = q_i$ pour $0 \leq i \leq n$.*

Démonstration: Existence. Soit $f_0 : E \to F$ l'unique application linéaire satisfaisant

$$f_0(\overrightarrow{p_0 p_i}) = \overrightarrow{q_0 q_i} \text{ pour} 1 \leq i \leq n.$$

Une telle application linéaire existe et est unique, parce que $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$ est une base de E. Il suffit de poser

$$f(p) := q_0 + f_0(\overrightarrow{p_0 p}),$$

et de remarque cette application est affine, et vérifie bien les relations $f(p_i) = q_i$ pour $0 \leq i \leq n$. L'unicité est proposée comme exercice.

■

Définition 3.31 *Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une structure d'espace euclidien.*

Remarque 3.32 *Soit (E, φ) un espace euclidien, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. Alors*

1. *La formule*
$$d(p, q) := \|\overrightarrow{pq}\|_\varphi$$
définit une distance $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ sur $\mathcal{E}$.
2. *Pour tout $q \in \mathcal{E}$ l'application de vectorialisation $V_q : \mathcal{E} \to E$ définit une isométrie $(\mathcal{E}, d) \to (E, d_\varphi)$.*
3. *d est invariante par translations.*

La distance d définie dans la remarque 3.32 s'appelle la distance canonique sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

Définition 3.33 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine n-dimensionnel de direction (E, φ). Un repère affine orthonormé dans $\mathcal{E}$ est un repère affine $(p_0, \dots, p_n)$ dans $\mathcal{E}$ tel que $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n})$ soit une base orthonormée de (E, φ).*

Notons que

Remarque 3.34 *L'isomorphisme affine $\mathbb{R}^n \to \mathcal{E}$ associé à un repère affine orthonormé est un isomorphisme affine qui est isométrique par rapport aux distances (d_{can}, d).*

Si $n \geq 2$ la condition "$(p_0, \dots, p_n)$ est un repère affine orthonormé dans $\mathcal{E}$" n'est pas invariante par permutations.

Démontrer ces affirmations.

Remarque 3.35 *Soit (E, φ) un espace euclidien, soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E, et soit $q \in \mathcal{E}$. On peut utiliser l'isométrie $V_q : \mathcal{E} \to E$ pour identifier le groupe des isométries de $(\mathcal{E}, d)$ avec le groupe des isométries* $\mathrm{Isom}(E, d_\varphi)$ *étudié dans la section 2.5. En particulier le théorème 2.32 donne une classification des isométries d'un espace affine euclidien.*

Proposition 3.36 *Soient (E, φ), (F, ψ) deux espaces euclidiens de la même dimension n, et soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des espaces affines de directions E, F respectivement. Soit $(p_0, \dots, p_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$, soit $(q_0, \dots, q_n) \in \mathcal{F}^{n+1}$, soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ l'unique application affine telle que $f(p_i) = q_i$ pour $0 \leq i \leq n$ (voir la proposition 3.30), et soit f_0 la partie linéaire de f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est une isométrie par rapport au distances canoniques définies sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,

(2) $f_0 : E \to F$ est un isomorphisme orthogonal d'espaces euclidiens (voir la définition 2.13),

(3) On a $\left\langle \overrightarrow{f(p_0) f(p_i)}, \overrightarrow{f(p_0) f(p_j)} \right\rangle_\psi = \left\langle \overrightarrow{p_0 p_i}, \overrightarrow{p_0 p_j} \right\rangle_\varphi$ pour toute paire (i, j) avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Démonstration: L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) résulte en utilisant l'équivalence des conditions énoncées dans définition 3.26. Pour l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) on utilise la proposition 2.14.

■

4 Quadriques

4.1 Définitions et propriétés générales. Centre d'une quadrique

Soit K un corps commutatif de caractéristique $\mathrm{car}(K) \neq 2$, E un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

Définition 4.1 *Soient $p_0 \in \mathcal{E}$, $a_0 \in K$, l une forme linéaire sur E, et q une forme quadratique* non-nulle *sur E. Le polynôme du second degré sur $\mathcal{E}$ associé au système (p_0, a_0, l, q) est l'application $\mathfrak{f} : \mathcal{E} \to K$ définie par*

$$\mathfrak{f}(p) = q(\overrightarrow{p_0p}) + 2l(\overrightarrow{p_0p}) + a_0.$$

Une quadrique dans $\mathcal{E}$ est une classe de proportionnalité de polynômes du second degré sur $\mathcal{E}$, deux polynômes $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2 : \mathcal{E} \to K$ étant considérés proportionnels s'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\mathfrak{f}_2 = \alpha\mathfrak{f}_1$. L'ensemble des quadriques dans $\mathcal{E}$ sera désigné par $\mathcal{Q}(\mathcal{E})$.

L'image d'une quadrique $[\mathfrak{f}] \in \mathcal{Q}(\mathcal{E})$ est le sous-ensemble $\mathfrak{f}^{-1}(0) \subset \mathcal{E}$, donc le sous-ensemble défini par l'équation $\mathfrak{f}(p) = 0$. On va désigner cet ensemble par $Q_{[\mathfrak{f}]}$ ou $Q_{\mathfrak{f}}$.

Une quadrique dans un plan euclidien s'appelle conique.

En choisissant un repère affine $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathcal{E}$, on peut identifier $\mathcal{E}$ avec K^n en utilisant l'isomorphisme $\Psi_{(p_0,p_1,\ldots,p_n)} : K^n \to \mathcal{E}$ associée à ce repère (voir la section 3.2). C'est donc naturel de définir :

Définition 4.2 *Soient $a_0 \in K$, $a \in K^n$, et $A \in M_{n,n}(K)$ une matrice symétrique* non-nulle. *Le polynôme du second degré sur K^n associé au triplet (a_0, a, A) est l'application $f : K^n \to K$ définie par*

$$f(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_0 = x^TAx + 2a^Tx + a_0.$$

Une quadrique dans K^n est une classe de proportionnalité de polynômes du second degré sur $\mathcal{E}$, deux polynômes f_1, $f_2 : \mathcal{E} \to K$ étant proportionnels s'il existe $\alpha \in K^*$ tel que $f_2 = \alpha f_1$. L'ensemble des quadriques dans K^n sera désigné par $\mathcal{Q}(n)$.

L'image d'une quadrique $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ est le sous-ensemble $f^{-1}(0) \subset K^n$, donc le sous-ensemble défini par l'équation $f(x) = 0$. On va désigner cet ensemble par $Q_{[f]}$ ou Q_f.

En fixant un repère affine $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathcal{E}$ on réduit l'étude des quadriques dans l'space affine $\mathcal{E}$ à l'étude des quadriques dans K^n. En effet, il suffit de remarquer que, dans la présence d'un système (p_0, a_0, l, q) comme dans la définition 4.1, la composition $\mathfrak{f} \circ \Psi_{(p_0,p_1,\ldots,p_n)}$ coïncide avec le polynôme du deuxième degré sur K^n associé au triplet (a_0, a, A), où $a \in K^n$ est le vecteur formé avec les coefficients de l dans la base $B = (\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n})$, et A est la matrice de la polaire f_q de q dans la même base.

Remarque 4.3 *Si deux polynômes du second degré f_1, f_2 sont proportionnels (i.e. ils définissent la même quadrique) alors $f_1^{-1}(0) = f_2^{-1}(0)$, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, si $K = \mathbb{R}$, alors les équations $x_1^2 + x_2^2 = 0$ et $2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$ définissent le même sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, à savoir le singleton $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, mais les deux polynômes ne sont pas proportionnels.*

Définition 4.4 *Soit $c \in K^n$, et $\lambda \in K^*$. L'homothétie de centre c et rapport λ est la transformation affine $h_c^\lambda : K^n \to K^n$ caractérisée par l'identité $h_c^\lambda(x) - c = \lambda(x - c)$. On a donc*

$$h_c^\lambda(x) = \lambda x + (1 - \lambda)c.$$

L'homothétie de centre c et rapport -1 sera appelée la symétrie par rapport à c et sera désignée par σ_c. On a donc

$$\sigma_c(x) = 2c - x.$$

Remarquer que toute homothétie est bijective, et $(h_c^\lambda)^{-1} = h_c^{\lambda^{-1}}$. Rappelons que la translation $\tau_c : K^n \to K^n$ de vecteur c est définie par $\tau_c(x) = x + c$.

Définition 4.5 *Soit $[f] \in \mathcal{Q}(n)$. Un point $c \in K^n$ s'appelle centre de la quadrique $[f]$ si $[f]$ est invariante par rapport à la symétrie σ_c de centre q, c'est à dire si $[f \circ \sigma_c] = [f]$. On va désigner par $C[f]$ l'ensemble (éventuellement vide) des centres de $[f]$.*

Proposition 4.6 *Soit $f : K^n \to K$ le polynôme du second degré associé au triplet (a_0, a, A), et soit $c \in K^n$.*
A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) c est un centre de la quadrique $[f]$.

(2) c est une solution du système linéaire $Ac + a = 0$.

(3) Les termes de degré 1 dans la composition $f \circ \tau_c$ s'annulent.

B. Si c est un centre de $[f]$ alors on a $f \circ \sigma_c = f$.

Démonstration: A. (1)$\Leftrightarrow$(2). On a

$$(f \circ \sigma_c)(x) = f(\sigma_c(x)) = f(2c - x) = (2c - x)^T A(2c - x) + 2a^T(2c - x) + a_0 =$$

$$= 4c^T Ac + x^T Ax - 2x^T Ac - 2c^T Ax - 2a^T x + 4a^T c + a_0.$$

Notons que $a^T c = c^T a$, $-2a^T x = 2a^T x - 4x^T a$, et (puisque A est symétrique) $c^T Ax = x^T Ac$. On obtient

$$f \circ \sigma_c(x) = f(x) - 4(x - c)^T(Ac + a). \tag{32}$$

Puisque $4(x - c)^T(Ac + a)$ est un polynôme du (au plus) premier degré, on en déduit que les polynômes du second degré f, $f \circ \sigma_c$ définissent la même quadrique (i. e. sont proportionnels) si et seulement si le polynôme $4(x - c)^T(Ac + a)$ est nul, donc si et seulement si $Ac + a = 0$. Si c'est le cas, alors on aura $f \circ \sigma_c = f$.

(2)$\Leftrightarrow$(3) Un calcul similaire montre que

$$(f \circ \tau_c)(x) = x^T Ax + 2(Ac + a)^T x + (Ac + a)^T c + (a^T c + a_0), \tag{33}$$

donc les termes de degré 1 de la composition $f \circ \tau_c$ s'annulent si et seulement si $(Ac + a) = 0$.

B. Cette affirmation résulte de (32) en tenant compte de A. ■

Remarque 4.7 *Soit $[f] \in \mathcal{Q}(n)$. Alors*

(1) L'ensemble $C[f]$ des centres de $[f]$ est non-vide si et seulement si $\mathrm{rang}(A\ a) = \mathrm{rang}(A)$.

(2) Si $C[f]$ est non-vide, alors il est un sous-espace affine de direction $\ker(A)$.

(3) $[f]$ admet un centre unique (i.e. $C[f]$ est un singleton) si et seulement si $\mathrm{dét}(A) \neq 0$, *donc si et seulement si la partie homogène du 2ème degré de f est une forme quadratique non-dégénérée.*

Démonstration: 1. Le système linéaire $Ac = -a$ (pour l'inconnue c) admet des solutions si et seulement si a appartient au sous-espace vectoriel engendré par les colonnes $A_1, \dots, A_n$ de A, donc si et seulement si $\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_n, a) = \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_n)$. Cette condition est équivalente à la condition $\mathrm{rang}(A\ a) = \mathrm{rang}(A)$. Ici on aurait pu utiliser directement un théorème important général de la théorie des systèmes linéaires : un système linéaire de la forme $Ax = b$ est compatible si et seulement si $\mathrm{rang}(A\ b) = \mathrm{rang}(A)$. La démonstration de ce théorème s'appuie sur l'argument expliqué ci-dessus.

2. Il s'agit d'une propriété bien-connue de la théorie des système linéaires.

3. Résulte de (1) et (2). Notons que, si $\mathrm{dét}(A) \neq 0$, alors le système linéaire $Ac = -a$ est un système de Cramer. ■

Donc $[f]$ admet un centre unique si et seulement si , $\mathrm{dét}(A) \neq 0$, et dans ce cas on dit $[f]$ est une quadrique à centre unique. Parfois on utilise la terminologie "quadrique à centre" pour cette classe de quadriques, mais cette terminologie peut être source de confusion, parce que l'expression "quadrique à centre" suggère l'existence, pas l'unicité, d'un centre. Pour éviter toute confusion possible on va écrire "$[f]$ est une quadrique ayant au moins un centre" pour exprimer la condition "$C[f] \neq \emptyset$", et "$[f]$ est une quadrique à centre unique" pour exprimer la condition "$C[f]$ est un singleton" (qui est équivalente à la condition $\mathrm{dét}(A) \neq 0$).

Remarque 4.8 *Si $c \in C[f]$, alors l'image Q_f de $[f]$ est invariante par σ_c.*

Démonstration: Si $c \in C[f]$, alors $f \circ \sigma_c = f$, donc

$$x \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (f \circ \sigma_c)(x) = 0 \Leftrightarrow f(\sigma_c(x)) = 0 \Leftrightarrow \sigma_c(x) \in f^{-1}(0),$$

ce qui démontre que l'image $Q_f := f^{-1}(0)$ est invariante par σ_c. ■

A noter que la réciproque de la remarque 4.8 n'est pas vraie en général. Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2$. L'image de la quadrique $[f]$ est vide, donc invariante par rapport à toute symétrie, en particulier par rapport à la symétrie de centre $0_{\mathbb{R}^2}$. Mais $0_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas un centre de cette quadrique. Pourquoi ?

Dans le cas $K = \mathbb{R}$ on peut utiliser les notions introduites en analyse. Dans ce on obtient pour le gradient $\nabla_c f$ en un un point $c \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_c f = 2(Ac + a).$$

Cette formule montre que

Remarque 4.9 *Supposons $K = \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme du 2ème degré. Un point $c \in \mathbb{R}^n$ est un centre de $[f]$ si et seulement si c est un point critique de f.*

4.2 Cônes et cylindres. Quadriques propres

4.2.1 Cônes

Définition 4.10 *On dit que la quadrique $[f]$ est un cône de sommet c si $[f \circ h_c^\lambda] = [f]$ pour tout $\lambda \in K^*$.*

Cette définition est justifiée par la remarque suivante :

Remarque 4.11 *Si $[f]$ est un cône de sommet c, alors son image Q_f sera invariante par toute homothétie de centre c.*

Démonstration: L'affirmation résulte directement de la définition. En effet, on a évidemment

$$h_c^\lambda(Q_f) = Q_{f \circ h_c^{\lambda^{-1}}},$$

donc, si on suppose que f et $f \circ h_c^{\lambda^{-1}}$ sont proportionnels, on obtient $h_c^\lambda(Q_f) = Q_f$. ■

A noter que la réciproque de cette remarque n'est pas vraie en général. Par exemple, pour $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 1$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'image Q_f est vide, donc elle est invariante par toute transformation de $\mathbb{R}^2$. Mais, en utilisant la proposition 4.12 ci-dessous, on constate que $[f]$ n'est pas un cône dans le sens de la définition 4.10.

Proposition 4.12 *Supposons $K \not\simeq \mathbb{F}_3$. Soit f le polynôme du second degré associé au triplet (a_0, a, A). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La quadrique $[f]$ est un cône de sommet c,

(2) c est une solution du système linéaire à $(n+1)$ équations et n inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ac + a & = & 0 \\ a^T c + a_0 & = & 0 \end{array} \right. , \tag{34}$$

(3) $c \in Q_f \cap C[f]$.

(4) La composition $f \circ \tau_c$ est homogène du 2ème degré.

Démonstration: Un calcul direct (comme dans la démonstration de la proposition 4.6) donne

$$(f \circ h_c^\lambda)(x) = \lambda^2 f(x) + \left\{ \left(2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 c\right)^T (Ac + a) \right\} + (1 - \lambda^2)(a^T c + a_0). \tag{35}$$

(1)⇒(2) : Puisque $f \circ h_c^\lambda$ et f sont des polynômes du second degré et les autres termes sont de degré inférieur, il en résulte que, si ces deux polynômes sont proportionnels, alors le facteur de proportionnalité est nécessairement λ^2 et le polynôme du 1er degré

$$\left\{ \left(2\lambda(1-\lambda)x + (1-\lambda)^2 c\right)^T (Ac + a) \right\} + (1 - \lambda^2)(a^T c + a_0)$$

est nul. En choisissant $\lambda = -1$ on obtient $Ac + a = 0$. Puisqu'on a supposé $K \not\simeq \mathbb{F}_3$, il existe dans K un élément $\lambda_0 \notin \{0, 1, -1\}$. Pour cet élément on obtient $(1 - \lambda_0^2) \neq 0$, donc $a^T c + a_0 = 0$. En conclusion, c satisfait le système (34).

(2)$\Leftrightarrow$(3) résulte facilement de (35). On a

$$f(c) = c^T Ac + 2a^T c + a_0 = c^T (Ac + a) + (a^T c + a_0)$$

donc le système (34) est équivalent au système

$$\begin{cases} Ac + a & = & 0 \\ f(c) & = & 0 \end{cases}, \tag{36}$$

qui définit évidemment l'intersection $Q_f \cap C[f]$.

(2)$\Leftrightarrow$(4) En utilisant la formule (33) on constate que $f \circ \tau_c$ est homogène du 2ème degré si et seulement si $Ac + a = 0$ et $a^T c + a_0 = 0$. ■

Remarque 4.13 *En tenant compte de la 3ème condition de la proposition 4.12, on déduit que $[f]$ est un cône de sommet c si et seulement si c est à la fois un centre de $[f]$ et un point de l'image Q_f de $[f]$.*

Remarque 4.14 *Supposons $K \not\simeq \mathbb{F}_3$, et soit $[f]$ une quadrique qui est un cône de sommet c. Alors on a*

$$\bigcup_{\substack{x \in Q_f \\ x \neq c}} (c\ x) \subset Q_f,$$

donc

- *soit $\{c\} \subsetneq Q_f$, l'inclusion ci-dessus est une égalité, et l'image Q_f de $[f]$ est une réunion non-vide de droites qui passent par c,*
- *soit $\{c\} = Q_f$, donc Q_f se réduit au singleton $\{c\}$.*

Démonstration: D'après la Proposition 4.12, on a $c \in Q_f$. Si $K^n \ni x \neq c$, alors la droite affine $(cx) \subset K^n$ s'écrit comme réunion :

$$(cx) = \{c\} \bigcup_{\lambda \in K^*} h_c^\lambda(x).$$

Il suffit d'appliquer la remarque 4.11. ■

Définition 4.15 *Les solutions du système (34), ou du système équivalent (36), s'appellent points doubles, ou points singuliers de la quadrique $[f]$. L'ensemble des points singuliers de $[f]$ sera noté* $\mathrm{Sing}[f]$.

D'après la proposition 4.12 on a

$$\mathrm{Sing}[f] = Q_f \cap C[f] \tag{37}$$

et, pour tout point $c \in \mathrm{Sing}[f]$, la quadrique $[f]$ est un cône de sommet c.

Définition 4.16 *Une quadrique $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ est dite quadrique lisse si* $\mathrm{Sing}[f] = \emptyset$. *Dans le cas contraire on dit que $[f]$ est une quadrique singulière.*

D'après la proposition 4.12, il en résulte que (en supposant $K \not\simeq \mathbb{F}_3$) une quadrique $[f]$ est singulière si et seulement si elle est un cône.

En utilisant la remarque 4.9 on obtient la remarque suivante, qui justifie la terminologie "point singulier", "quadrique lisse" utilisée ci-dessus.

Remarque 4.17 *Supposons $K = \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme du second degré. L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une submersion en tout point $x \in Q_f \setminus$* $\mathrm{Sing}[f]$. *En particulier $x \in Q_f \setminus$* $\mathrm{Sing}[f]$ *est une hypersurface lisse de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 4.18 *L'ensemble* $\mathrm{Sing}[f] = Q_f \cap C[f]$ *des points doubles de* $[f]$ *est non-vide si et seulement si*

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$$

Si $\mathrm{Sing}[f] \neq \emptyset$*, alors* $\text{dét}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = 0$.

4.2.2 Cylindres

Définition 4.19 *Soit* $v \in K^n \setminus \{0\}$*. Une quadrique* $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ *est dit cylindre de direction cylindrique* v *si pour tout* $\lambda \in K^*$ *on a* $[f \circ \tau_{\lambda v}] = [f]$*, donc si* $[f]$ *est invariante par rapport aux translations de vecteur colinéaire avec* v*.*

Si $[f]$ est cylindre de direction cylindrique v, alors son image Q_f est soit vide, soit une réunion de droites affines de direction constante Kv.

En utilisant la formule (33) on obtient

$$(f \circ \tau_{\lambda v})(x) = f(x) + 2\lambda (Av)^T x + \lambda^2 (Av)^T v + 2\lambda a^T v\,. \tag{38}$$

Cette formule montre que les partie homogènes du 2ème degré de f et $f \circ \tau_{\lambda v}$ (qui sont non-nulles) coïncident, donc $[f \circ \tau_{\lambda v}] = [f]$ si et seulement si $f \circ \tau_{\lambda v} = f$. La formule (38) montre que

Remarque 4.20 *Soient* $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ *et* $v \in K^n \setminus \{0\}$*. La quadrique* $[f]$ *est un cylindre de direction cylindrique* v *si et seulement si* v *est une solution du système*

$$\begin{cases} Av &= 0 \\ a^T v &= 0\,. \end{cases} \tag{39}$$

Donc $[f]$ *est un cylindre si et seulement si* $\ker\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \neq \{0\}$*, donc si et seulement si* $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} < n$*. Si c'est le cas, alors l'ensemble des directions cylindriques de* $[f]$ *coïncide avec* $\ker\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \setminus \{0\}$*.*

Soit $[f]$ une quadrique. Posons $\Gamma[f] := \ker\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}$. Cet espace est non-nul si et seulement si $[f]$ est un cylindre, et si c'est le cas s'appelle l'espace des directions cylindriques de $[f]$. Soit $F \subset K^n$ un supplémentaire de $\Gamma[f]$. On obtient une décomposition en somme directe $K^n = \Gamma[f] \oplus F$. Désignons par $p_{\Gamma[f]}$, p_F les deux projections, et posons $\bar{f} := f|_F$.

Remarque 4.21 *Avec les notations ci-dessus on a* $f = \bar{f} \circ p_F$*, en particulier* $Q_f = p_F^{-1} Q_{\bar{f}}$*, donc l'image de* $[f]$ *est la pre-image par la projection* p_F *de l'image d'une quadrique dans l'espace* F*. Si* $[f]$ *est un cylindre, alors* $\Gamma[f] \neq \{0\}$*, donc* $\dim(F) < n$*. L'étude des cylindres dans* K^n *se réduit à l'étude des quadriques dans un espace de dimension inférieure à* n*.*

Par exemple, si $n = 3$, l'étude des cylindres dans K^3 se réduit à l'étude des quadriques dans K^2 (des coniques).

4.2.3 Quadriques propres

Définition 4.22 *Une quadrique* $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ *est dite propre si* $\text{dét}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \neq 0$*. Dans le cas contraire on dit que* $[f]$ *est une quadrique impropre.*

Proposition 4.23 *Soit* $[f] \in \mathcal{Q}(n)$*. Sont équivalentes :*

(1) $[f]$ *une quadrique impropre.*

(2) $[f]$ *est un cône ou un cylindre.*

Démonstration: (1)⇒(2) : Supposons que $[f]$ est une quadrique impropre. On va démontrer que si $[f]$ n'est pas un cylindre, alors $[f]$ sera un cône. Puisque $[f]$ une quadrique impropre, on a $\text{dét}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = 0$, donc rang $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \leq n$. Si $[f]$ n'est pas un cylindre, alors, en utilisant la Remarque 4.20 on obtient ker $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} = \{0\}$, ce qui (d'après le théorème du rang) est équivalent à rang $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} = n$. Mais alors

$$\text{rang}\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} = n \geq \text{rang}\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \geq \text{rang}\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix}.$$

Donc rang $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} =$ rang $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = n$, ce qui, d'après la remarque 4.18, montre que $\mathrm{Sing}[f] \neq \emptyset$, donc $[f]$ admet des points doubles. D'après la proposition 4.12 il en résulte que $[f]$ est un cône.

(2)⇒(1) : Si $[f]$ est un cône, alors $\mathrm{Sing}[f] \neq \emptyset$, donc d'après la remarque 4.18, on a dét $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \neq 0$, donc $[f]$ est bien impropre. Si $[f]$ est un cylindre, alors ker $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \neq \{0\}$, donc rang $\begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} < n$. En rajoutant une colonne, le rang augmente de au plus 1, donc rang $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \leq n$, ce qui implique dét $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = 0$, i.e. $[f]$ est impropre. ■

Exemple 8 Il existe des quadriques qui sont, à la fois, cônes et cylindres. En effet, soient α, $\beta : K^n \to K$ deux formes linéaires non-nulles sur K^n, soit $(s, t) \in K^2$, et soit f le polynôme du 2ème degré donné par $f(x) := (\alpha(x) + s)(\beta(x) + t)$. L'image Q_f de $[f]$ est la réunion $H_\alpha \cup H_\beta$ des hyperplans affines définis par les équations $\alpha(x) + s = 0$, $\beta(x) + t = 0$ respectivement. Si $\ker(\alpha) \neq \ker(\beta)$ (i.e. si α, β sont linéairement indépendantes) alors l'intersection $F := H_\alpha \cap H_\beta$ sera un sous-espace affine de codimension 2 et de direction $\ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$. Dans ce cas $[f]$ est un cône de sommet c pour tout $c \in F$, mais au même temps $[f]$ est un cylindre dont l'espace des directions cylindriques est $\ker(\alpha) \cap \ker(\beta)$. Si $H_\alpha \parallel H_\beta$ et $H_\alpha \neq H_\beta$, alors la quadrique $[f]$ ne sera pas un cône, mais elle sera un cylindre dont l'espace des directions cylindriques est $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$. Si $H_\alpha = H_\beta$, alors $[f]$ sera un cône de sommet c pour tout $c \in Q_f = H_\alpha = H_\beta$, et au même temps elle seta un cylindre dont l'espace des directions cylindriques est $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

Exemple 9 Soit $[f] \in \mathcal{Q}(3)$ une quadrique dans K^3 qui est un cône avec un sommet unique 0_{K^3}. Par exemple on peut prendre $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Soit $F = K^n \to K^3$ un epimorphisme linéaire. Alors $[f \circ F]$ sera un cône de sommet x pour tout $x \in \ker(F)$. Si $n > 3$, alors $[f \circ F]$ sera aussi un cylindre, et son espace des directions cylindriques sera $\ker(F)$.

4.3 La classification affine des quadriques

La classification affine pour les quadriques dans un espace affine $\mathcal{E}$ concerne la classification des éléments de $\mathcal{Q}(\mathcal{E})$ à transformations affines près. Comme d'habitude on va identifier $\mathcal{E}$ avec K^n à l'aide d'un repère affine, donc on va supposer, comme dans la section précédente, $\mathcal{E} = K^n$.

Définition 4.24 *Deux quadriques $[f]$, $[f'] \in \mathcal{Q}(n)$ sont dites affinement équivalentes s'il existe une transformation affine $g : K^n \to K^n$ telle que*

$$f' = f \circ g. \tag{40}$$

Plus précisément on cherche un sous-ensemble $\mathcal{R}(n)$ de polynômes du second degré sur $\mathbb{R}^n$, si simple que possible (l'ensemble des formes réduites des quadriques dans K^n), tel que tout quadrique $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ soit équivalente, au sens de la définition 4.24, à une quadrique définie par un élément de $\mathcal{R}(n)$.

C'est important de noter que la condition (40) a deux interprétations géométriques :

(Int1) $g(Q_{f'}) = Q_f$, donc l'image par g de $Q_{f'}$ coïncide avec Q_f,

(Int2) Il existe un repère affine $(p_0, \ldots, p_n)$ de K^n tel que l'équation de Q_f dans ce repère soit $f'(x) = 0$.

Pour passer de la 1ère à la 2ème interprétation, écrivons g sous la forme $g(x) = Bx + b$, où $B \in \mathrm{GL}(n, K)$ et $b \in K^n$, et considérons le repère affine $(p_0, \ldots, p_n) = (b, b + B_1, \ldots, b + B_n)$, où B_i désigne la $i$ème colonne de B. Alors $\overrightarrow{p_0 p_i} = B_i$, et

$$f(p_0 + \sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{p_0 p_i}) = f(b + \sum_{i=1}^n y_i B_i) = f(b + By) = (f \circ g)(y),$$

donc la composition $f \circ g$ peut être interprétée comme l'expression de la même application polynomiale $f : K^n \to K$ dans le repère affine $(b, b + B_1, \dots, b + B_n)$.

Dans les applications on utilise d'habitude la 2ème interprétation : on se donne une quadrique $[f] \in \mathcal{Q}(n)$, et on cherche un repère affine dans lequel l'image Q_f est donné par une équation réduite (si simple que possible).

Soit $f : K^n \to K$ le polynôme du second degré associé au triplet (a_0, a, A), et soit $g : K^n \to K^n$ la transformation affine donnée par $g(x) = Bx + b$. On a

$$(f \circ g)(x) = x^T(B^T AB)x + 2\big(B^T(Ab + a)\big)^T x + b^T Ab + 2a^T b + a_0, \tag{41}$$

donc le polynôme du second degré $f' := f \circ g$ est associé au triplet

$$A' = B^T AB,\ a' = B^T Ab + B^T a,\ a'_0 = b^T Ab + 2a^T b + a_0.$$

Ces formules montrent que :

$$\begin{pmatrix} A' & a' \\ a'^T & a'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (A'\ a') = B^T\,(A\ a) \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En tenant compte que

$$\text{dét}(B^T) = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{dét} \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \text{dét}(B) \neq 0,$$

on obtient :

Remarque 4.25 *Soit f le polynôme du second degré associé au triplet (a_0, a, A), soit $g : K^n \to K^n$ une transformation affine donnée par $g(x) = Bx+b$, et soit (a'_0, a', A') le triplet qui correspond à la composition $f' := f \circ g$. Alors*

$$\text{rang}(A') = \text{rang}(A),\ \text{rang}\,(A'\ a') = \text{rang}\,(A\ a)\,,\ \text{rang} \begin{pmatrix} A' & a' \\ a'^T & a'_0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{dét}(A') = \text{dét}(B)^2 \text{dét}(A),\ \text{dét} \begin{pmatrix} A' & a' \\ a'^T & a'_0 \end{pmatrix} = \text{dét}(B)^2 \text{dét} \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix}.$$

Cette remarque montre que les rangs $r(f)$, $\rho(f)$, $R(f)$ définis par

$$r(f) := \text{rang}(A) \in \{1, \dots, n\},\ \rho(f) := \text{rang}\,(A\ a) = \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ a^T \end{pmatrix} \in \{1, \dots, n\},$$

$$R(f) := \text{rang} \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} \in \{1, \dots, n+1\}$$

(où f est le polynôme du second degré associé au triple (a_0, a, A)) sont des invariants par rapport à la composition avec les transformations affines, i.e deux quadriques affinement équivalentes ont les mêmes invariants. Nous définissons les sous-ensembles suivants de $\mathcal{Q}(n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{CL}(n)_p &:= \{[f] \in \mathcal{Q}(n) |\ r(f) = \rho(f) = p,\ R(f) = p + 1\}, \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n, \\ \mathcal{CS}(n)_p &:= \{[f] \in \mathcal{Q}(n) |\ r(f) = \rho(f) = R(f) = p\}, \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n, \\ \mathcal{P}(n)_p &:= \{[f] \in \mathcal{Q}(n) |\ r(f) = p,\ \rho(f) = p + 1\}, \quad \text{pour } 1 \leq p \leq n - 1. \end{aligned} \tag{42}$$

Les notations ont été choisies pour suggérer respectivement : "avec (ayant au moins un) centre et lisse", "avec (ayant au moins un) centre et singulière", "sans centre (paraboloïdes)" (voir le théorème 4.27 ci-dessous). Dans chaque cas l'indice p indique le rang de la forme quadratique définie par la partie homogène d'un polynôme qui définit la quadrique. Remarquons que

Remarque 4.26 *Si $r(f) = p$ et $\rho(f) = p + 1$ alors $R(f) = p + 2$.*

Démonstration: Exercice. La condition $\rho(f) = r(f) + 1$ est équivalente à la condition $a \notin \text{Vect}(A_1, \dots, A_n)$, où A_i désigne la $i$ème colonne de A. Puisque A est symétrique, cette condition est équivalente à $a^T \notin \text{Vect}(A^1, \dots, A^n)$, où A^i désigne la $i$ème ligne de A. Ceci implique $(a^T\ a_0) \notin \text{Vect}\big((A^1, a_1), \dots, (A^n, a_n)\big)$ donc, en rajoutant la ligne $(a^T\ a_0)$ à la matrice $(A\ a) \in M_{n,n+1}(K)$, la dimension du sous-espace engendré par la lignes va augmenter de 1. Ceci montre que

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & a \\ a^T & a_0 \end{pmatrix} = \text{rang}\,(A\ a) + 1\,.$$

$\blacksquare$

En utilisant cette remarque il en résulte

$$\mathcal{P}(n)_p = \{[f] \in \mathcal{Q}(n)|\ r(f) = p,\ \rho(f) = p+1,\ R(f) = p+2\}.$$

En conclusion, les trois invariants d'une quadrique prise dans l'un des trois ensembles $\mathcal{CL}(n)_p$, $\mathcal{CS}(n)_p$, $\mathcal{P}(n)_p$ sont déterminés par p. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous

$[f] \in$	$r(f)$	$\rho(f)$	$R(f)$
$\mathcal{CL}(n)_p$	p	p	$p+1$
$\mathcal{CS}(n)_p$	p	p	p
$\mathcal{P}(n)_p$	p	$p+1$	$p+2$

Le théorème suivant spécifie, pour une quadrique prise dans l'un des sous-ensembles (42) une forme réduite :

Théorème 4.27 (la classification affine des quadriques dans K^n) *Avec les notations (42) on a :*
(1) L'ensemble $\mathcal{Q}(n)$ se décompose en réunion disjointe de sous-ensembles

$$\mathcal{Q}(n) = \left(\coprod_{1\leq p\leq n} \mathcal{CL}(n)_p\right) \coprod \left(\coprod_{1\leq p\leq n} \mathcal{CS}(n)_p\right) \coprod \left(\coprod_{1\leq p\leq n-1} \mathcal{P}(n)_p\right),$$

chaque sous-ensemble étant invariant par rapport à la composition avec les transformations affines.
(2) On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{CL}(n)_p &= \{[f] \in \mathcal{Q}(n)|\ r(f) = p,\ [f] \text{ a au moins un centre et est lisse}\},\\
\mathcal{CS}(n)_p &= \{[f] \in \mathcal{Q}(n)|\ r(f) = p,\ [f] \text{ a au moins un centre et est singulière}\},\\
\mathcal{P}(n)_p &= \{[f] \in \mathcal{Q}(n)|\ r(f) = p,\ [f] \text{ n'a pas de centre}\}.
\end{aligned}$$

(3) (a) Si $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$ alors il existe une transformation affine $g : K^n \to K^n$ telle que

$$(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i^2 + \alpha_0 \text{ où } \alpha_i \in K^* \text{ pour } 0 \leq i \leq p.$$

(b) Si $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$ alors il existe une transformation affine $g : K^n \to K^n$ telle que

$$(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i^2 \text{ où } \alpha_i \in K^* \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

(c) Si $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$ alors $[f]$ est lisse et il existe une transformation affine $g : K^n \to K^n$ telle que

$$(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i^2 + 2y_{p+1} \text{ où } \alpha_i \in K^* \text{ pour } 1 \leq i \leq p.$$

Démonstration: (1) Les sous-ensembles $\mathcal{CL}(n)_p$, $\mathcal{CS}(n)_p$, $\mathcal{P}(n)_p$ sont évidemment disjoints deux à deux. Pour montrer que leur réunion coïncide avec $\mathcal{Q}(n)$, soit $[f] \in \mathcal{Q}(n)$ et soit $p := r(p)$. Pour $\rho(p)$ nous avons deux possibilités, à savoir p ou $p+1$.

Supposons que nous sommes dans le cas $\rho(p) = p$. Pour $R(f)$ nous avons de nouveau deux possibilités, à savoir p où $p+1$. Dans le premier sous-cas on a $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$, et dans le deuxième sous-cas on a $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$. Supposons que nous sommes dans le cas $\rho(p) = p+1$. Alors on a $p \leq n-1$ et $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$.

(2) Les trois égalités résultent des remarques 4.7 (1), 4.18 en tenant compte que les sauts $\rho(f) - r(f)$, $R(f) - \rho(f)$ sont inférieurs ou égaux à 1.

(3) Soit $[f] \in \mathcal{Q}_n$, où f est le polynôme associé au triplet (a_0, a, A). D'après le théorème d'existence des bases orthogonales il existe une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de K^n dans laquelle la forme quadratique $q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i x_j =$

$x^T Ax$ ait une forme diagonale (voir le théorème 1.24 et la remarque 1.25). En désignant par B la matrice formée avec les vecteurs de cette base (en tant que colonnes), on obtient une formule du type

$$f(Bu) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i' u_i + a_0 \,,$$

où $\alpha_i \in K^*$ pour $1 \leq i \leq p$. En posant

$$w_0 = \begin{pmatrix} -\frac{a_1'}{\alpha_1} \\ \vdots \\ -\frac{a_p'}{\alpha_p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

on obtient une formule du type

$$f(B(v + w_0)) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i^2 + 2 \sum_{j=p+1}^{n} a_j'' v_j + \alpha_0.$$

Dans le cas particulier $p = n$ le 2ème terme est inexistant.

Supposons $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$. Puisque $\rho(f) = p$, la composition $v \mapsto f(B(v + w_0))$ aura le même invariant, donc $a_j'' = 0$ pour $p+1 \leq j \leq n$. Puisque $R(f) = p+1$, on obtient $\alpha_0 \neq 0$, et la première affirmation est démontrée.

Supposons $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$. De la même manière on obtient $a_j'' = 0$ pour $p+1 \leq j \leq n$ et $\alpha_0 = 0$, donc la deuxième affirmation est démontrée.

Supposons $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$ où $1 \leq p \leq n-1$. Dans ce cas, il existe un indice $s \geq p+1$ tel que $\alpha_s'' \neq 0$. Quitte à faire une permutation des variables on peut supposer $s = p+1$. L'idée est de faire la substitution $2y_{p+1} = 2\sum_{j=p+1}^{n} a_j'' v_j + \alpha_0$, donc de remplacer formellement l'expression $2\sum_{j=p+1}^{n} a_j'' v_j + \alpha_0$ par $2y_{p+1}$. Pour préciser cette idée remarquons que cette "substitution" correspond à la transformation affine

$$y \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ \frac{1}{a_{p+1}''}\left(y_{p+1} - \sum_{j=p+2}^{n} a_j'' y_j - \frac{\alpha_0}{2}\right) \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(B(h(y) + w_0)) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i^2 + 2y_{p+1}.$$

Il suffit de définir g comme la composition $y \mapsto B(h(y) + w_0)$.

■

Remarque 4.28 *Les classes remarquables des quadriques introduites dans les sections précédentes se décomposent en réunion disjointe conformément au tableau ci-dessous :*

Classe remarquable de quadriques dans K^n	décomposition en réunion disjointe
quadriques lisses à centre unique	$\mathcal{CL}(n)_n$
quadriques à centre unique	$\mathcal{CL}(n)_n \coprod \mathcal{CS}(n)_n$
quadriques lisses	$\left(\coprod_{1\le p\le n} \mathcal{CL}(n)_p\right) \coprod \left(\coprod_{1\le p\le n-1} \mathcal{P}(n)_p\right)$
quadriques propres	$\mathcal{CL}(n)_n \coprod \mathcal{P}(n)_{n-1}$
cylindres	$\left(\coprod_{1\le p\le n-1} \mathcal{CL}(n)_p\right) \coprod \left(\coprod_{1\le p\le n-1} \mathcal{CS}(n)_p\right) \coprod \left(\coprod_{1\le p\le n-2} \mathcal{P}(n)_p\right)$
quadriques singulières (cônes)	$\coprod_{1\le p\le n} \mathcal{CS}(n)_p$

Dans le cas particulier $K = \mathbb{R}$ on obtient un théorème de classification plus précis. La démonstration s'appuie sur le théorème de Sylvester dans le cas réel (voir le corollaire 1.26).

Corollaire 4.29 *Supposons $K = \mathbb{R}$.*

1. Si $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$ alors il existe une transformation affine $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \{0, \dots, p\}$ tels que

$$\tau(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} y_j^2 + 1.$$

2. Si $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$ alors il existe une transformation affine $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et $k \in \{0, \dots, p\}$ tels que tels que

$$(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} y_j^2.$$

3. Si $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$ alors il existe une transformation affine $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \{0, \dots, p\}$ tels que

$$\tau(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} y_j^2 + 2y_{p+1}.$$

En particulier on obtient la classification affine des quadriques réelles propres en dimensions 2 et 3.

Corollaire 4.30 *Supposons $K = \mathbb{R}$.*

(1) Toute conique propre de $\mathbb{R}^2$ est affinement équivalente à la conique définie par l'un des polynômes :
- *(a)* $y_1^2 + y_2^2 + 1$,
- *(b)* $y_1^2 - y_2^2 + 1$,
- *(c)* $-y_1^2 - y_2^2 + 1$,
- *(d)* $y_1^2 + 2y_2$.

(2) Toute quadrique propre de $\mathbb{R}^3$ est affinement équivalente à la quadrique définie par l'un des polynômes :
- *(a)* $y_1^2 + y^2 + y_3^2 + 1$,
- *(b)* $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 1$,
- *(c)* $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 1$,
- *(d)* $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 1$,
- *(e)* $y_1^2 + y_2^2 + 2y_3$,

(f) $y_1^2 - y_2^2 + 2y_3$.

La liste des coniques propres dans $\mathbb{R}^2$:

forme réduite	à centre / sans centre	image
$y_1^2 + y_2^2 + 1$	à centre unique	$\emptyset$
$y_1^2 - y_2^2 + 1$	à centre unique	hyperbole
$-y_1^2 - y_2^2 + 1$	à centre unique	ellipse
$y_1^2 + 2y_2$	sans centre	parabole

La liste des quadriques propres dans $\mathbb{R}^3$:

forme réduite	à centre / sans centre	image
$y_1^2 + y_2^2 + y_2^3 + 1$	à centre unique	$\emptyset$
$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 1$	à centre unique	hyperboloïde à deux nappes
$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 1$	à centre unique	hyperboloïde à une nappe
$-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 1$	à centre unique	ellipsoïde
$y_1^2 + y_2^2 + 2y_3$	sans centre	paraboloïde elliptique
$y_1^2 - y_2^2 + 2y_3$	sans centre	paraboloïde hyperbolique

4.4 La classification euclidienne des quadriques dans un espace euclidien

Soit (E, φ) un espace euclidien, et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\mathcal{E}$. Dans ce contexte c'est naturel de classifier les quadriques de $\mathcal{E}$ à isométries près. Il s'agit d'une classification plus fine, donc plus difficile, que la classification affine. En utilisant l'identification $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}$ donnée par un repère affine orthonormé dans $\mathcal{E}$ (voir la définition 3.33), on va identifier $\mathcal{E}$ avec l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^n$, et on va identifier l'ensemble des quadriques $\mathcal{Q}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}$ avec l'ensemble $\mathcal{Q}(n)$ des quadriques dans $\mathbb{R}^n$. Notre relation d'équivalence devient

Définition 4.31 *Deux quadriques $[f]$, $[f'] \in \mathcal{Q}(n)$ sont dites équivalentes au sens euclidien s'il existe une isométrie g de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^n$, et $\tau \in \mathbb{R}^*$ tels que que*

$$f' = \tau f \circ g. \tag{43}$$

D'après le théorème de classification des isométries d'un espace eucliden (voir le corollaire 2.26) toute isométrie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une transformation affine de la forme $g(x) = Bx + b$ avec $B \in \mathrm{O}(n)$. Comme dans le cas affine (voir la section 4.3), la formule (43) a deux interprétations géométriques :

(Int1) $g(Q_{f'}) = Q_f$, donc l'image par g de $Q_{f'}$ coïncide avec Q_f,

(Int2) Il existe un repère affine orthonormé $(p_0, \dots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que l'équation de Q_f dans ce repère soit f'.

La version euclidienne du Corollaire 4.29 est

Théorème 4.32 *Avec les notations (42) on a :*

1. *Si $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$ alors il existe une isométrie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^*$, $k \in \{0, \dots, p\}$ et $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que*
$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \tau(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i^2 y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} \rho_j^2 y_j^2 + 1.$$
2. *Si $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$ alors il existe une isométrie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k \in \{0, \dots, p\}$ et $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que*
$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ (f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i^2 y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} \rho_j^2 y_j^2.$$
3. *Si $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$ alors il existe une isométrie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^*$, $k \in \{0, \dots, p\}$ et $(\rho_1, \dots, \rho_p) \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que*
$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \tau(f \circ g)(y) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i^2 y_i^2 - \sum_{j=k+1}^{p} \rho_j^2 y_j^2 + 2y_{p+1}.$$

La démonstration de ce théorème suit les mêmes étapes que la démonstration du théorème 4.27 (3), mais remplace la transformations affine construite dans chaque étape de cette démonstration par une isométrie.

Démonstration: Soit $[f] \in \mathcal{Q}_n$, où f est le polynôme associé au triplet (a_0, a, A). La matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée $(b_1, \dots, b_n)$ de $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{st}})$.

En désignant par B la matrice formée avec les vecteurs de cette base (en tant que colonnes) et par λ_i la valeur propre associée au vecteur propre g_i, on obtient $(b_i)^T A b_j = \langle Ab_i, b_j\rangle_{\mathrm{st}} = \delta_{ij}\lambda_i$, donc la composition $u \mapsto f(Bu)$ est donnée par une formule du type

$$f(Bu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i' u_i + a_0.$$

Le nombre de valeur propres non-nulles est $p := \mathrm{rang}(A)$. Quitte à faire une permutation des vecteurs $(b_1, \dots, b_n)$, on peut supposer que les premières l valeurs propres sont strictement positives, et les suivantes $p - l$ sont strictement négatives. En posant $\mu_i := \sqrt{|\lambda_i|}$ pour $1 \leq i \leq p$ on obtient :

$$f(Bu) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2 u_i^2 - \sum_{j=l+1}^{p} \mu_j^2 u_j^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i' u_i + a_0.$$

Soit

$$w_0 = \begin{pmatrix} -\frac{a_1'}{\lambda_1} \\ \vdots \\ -\frac{a_p'}{\lambda_p} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient une formule du type

$$f(B(v + w_0)) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2 v_i^2 - \sum_{j=l+1}^{p} \mu_j^2 v_j^2 + 2\sum_{j=p+1}^{n} a_j'' v_j + \alpha_0.$$

Dans le cas particulier $p = n$ le terme $2\sum_{j=p+1}^{n} a_j'' v_j$ est inexistant.

Supposons $[f] \in \mathcal{CL}(n)_p$. Puisque $\rho(f) = p$, la composition $v \mapsto f(B(v + w_0))$ aura le même invariant, donc $a_j'' = 0$ pour $p + 1 \leq j \leq n$. Puisque $R(f) = p + 1$, on obtient $\alpha_0 \neq 0$. Posons $\tau := \frac{1}{\alpha_0}$, $\rho_i = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_0|}}\mu_i$. On obtient

$$\tau f(B(v + w_0)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \rho_i^2 v_i^2 - \sum_{j=l+1}^{p} \rho_j^2 v_j^2 + 1 & \text{si} \quad \alpha_0 > 0 \\ -\sum_{i=1}^{l} \rho_i^2 v_i^2 + \sum_{j=l+1}^{p} \rho_j^2 v_j^2 + 1 & \text{si} \quad \alpha_0 < 0 \end{cases}.$$

Dans le premier cas on pose $k = l$ et l'affirmation est démontrée. Dans le 2ème cas on fait une permutation de coordonnées et on pose $k = p - l$.

Supposons $[f] \in \mathcal{CS}(n)_p$. De la même manière on obtient $a_j'' = 0$ pour $p + 1 \leq j \leq n$ et $\alpha_0 = 0$, donc la deuxième affirmation est démontrée.

Supposons $[f] \in \mathcal{P}(n)_p$ où $1 \leq p \leq n - 1$. Dans ce cas le vecteur

$$\alpha'' := \begin{pmatrix} \alpha_{p+1}'' \\ \vdots \\ \alpha_n'' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-p}$$

est non-nul, donc il existe une base *orthonormée* $(c_1, \dots, c_{n-p})$ de $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $c_1 = \frac{1}{\nu}\alpha''$, où

$$\nu := \sqrt{\sum_{s=p+1}^{n} \alpha_j''^2}.$$

Soit $C \in \mathrm{O}(n-p)$ la matrice orthogonale formée avec ces vecteurs (en tant que colonnes). On obtient

$$(\alpha''_{p+1}, \dots, \alpha''_n)C = (\nu, 0 \dots, 0),$$

donc

$$\forall (y_{p+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-p},\ 2 \sum_{j=p+1}^{n} \alpha''_j (\sum_{s=1}^{n-p} c_{j,s} y_{p+s} - \frac{\alpha''_0}{2\nu^2} \alpha''_j) + \alpha''_0 = 2\nu y_{p+1}. \tag{44}$$

La transformation affine

$$y \overset{h}{\mapsto} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ \sum_{s=p+1}^{n} c_{1,s} y_{p+s} - \frac{\alpha''_0}{2\nu^2} \alpha''_{p+1} \\ \sum_{s=p+1}^{n} c_{2,s} y_{p+s} - \frac{\alpha''_0}{2\nu^2} \alpha''_{p+2} \\ \vdots \\ \sum_{s=p+1}^{n} c_{n-p,s} y_{p+s} - \frac{\alpha''_0}{2\nu^2} \alpha''_n \end{pmatrix}.$$

est une isométrie. En utilisant la formule (44) on obtient

$$f(B(h(y) + w_0)) = \sum_{i=1}^{l} \mu_i^2 v_i^2 - \sum_{j=l+1}^{p} \mu_j^2 v_j^2 + 2\nu y_{p+1}.$$

Il suffit de définir g comme la composition $y \mapsto B(h(y) + w_0)$, et poser $\tau := \frac{1}{\nu}$, $\rho_i := \frac{1}{\sqrt{\nu}} \mu_i$.

■

4.5 Appendix. Les quadriques propres

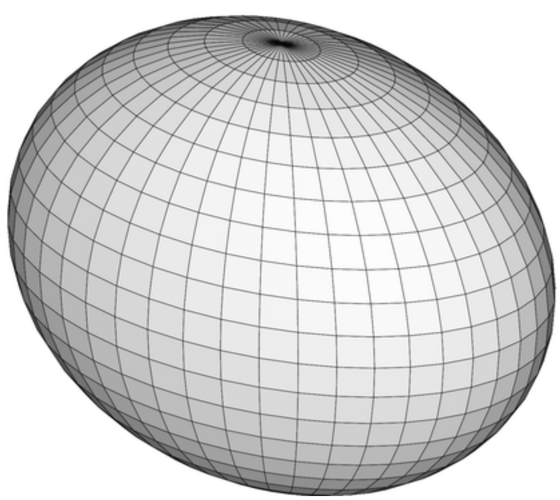

Figure 2 – Ellipsoïde

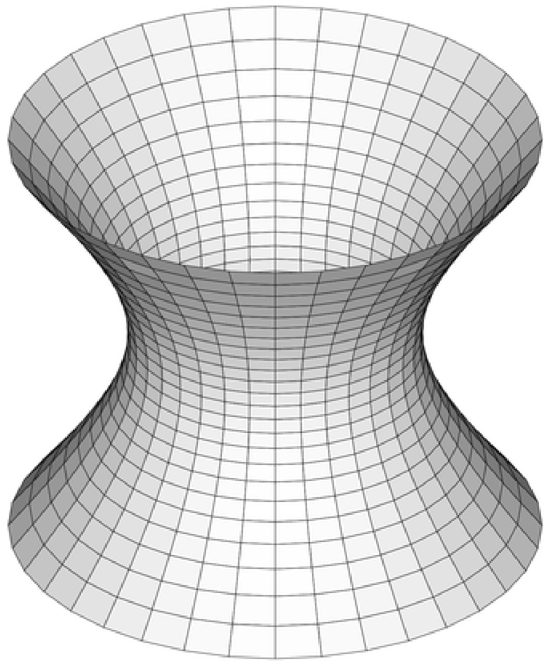

Figure 3 – Hyperboloïde à une nappe

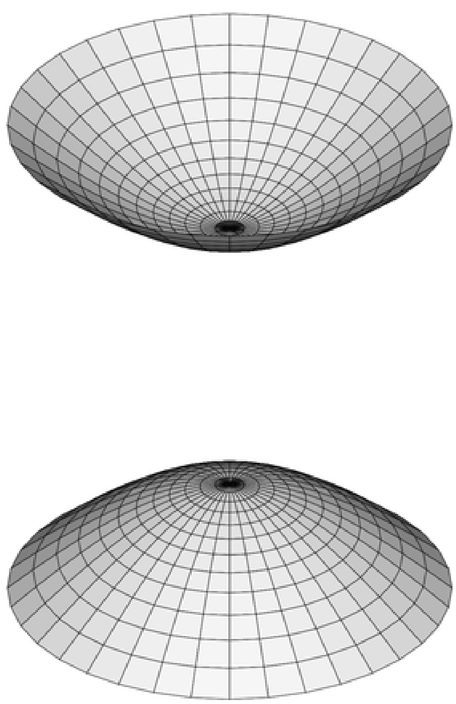

Figure 4 – Hyperboloïde à deux nappes

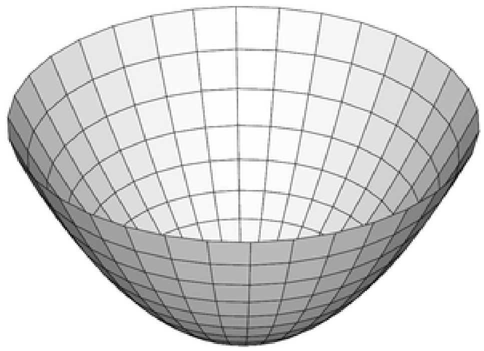

Figure 5 – Paraboloïde elliptique

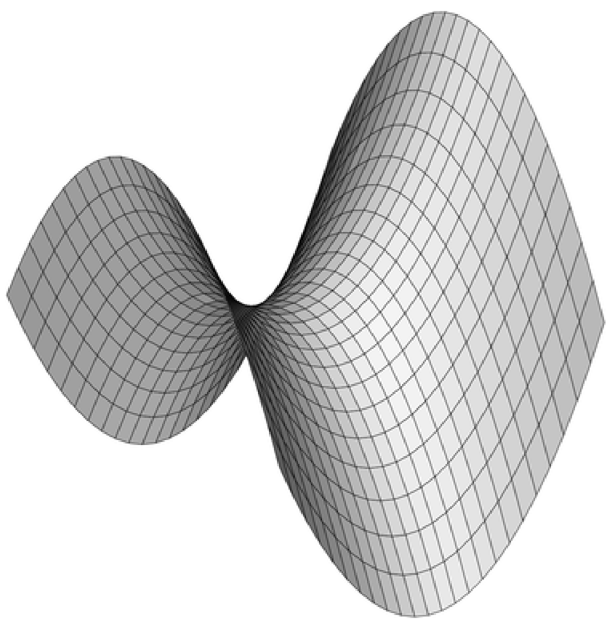

Figure 6 – Paraboloïde hyperbolique