UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE
UFR SCIENCES
10 mai 2016

Licence Mathématiques 3: Géométrie différentielle

durée: 3h

Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.
Barème sur 35p.

Exercice 1. (**5p**)
Soient $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par $q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+x_1x_2+x_2^2,\ h\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+x_1x_2.$

1. (**1p**) Montrer que $E:=q^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété *compacte* de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
2. (**1p**) Est-ce que $h^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$? Est-ce que $h^{-1}(\{0\})$ est compact?
3. (**1p**) Calculer d_xq, d_xh, ∇_xq, ∇_xh, où $x\in\mathbb{R}^2$.
4. (**2p**) En utilisant la méthode de Lagrange, étudier les points critiques de la restriction $h|_E$. Préciser le minimum et le maximum de cette restriction. *Indication: Écrire l'équation de Lagrange sous la forme $A_\lambda x=0_{\mathbb{R}^2}$, où λ désigne le multiplicateur de Lagrange, et A_λ est une matrice qui dépend de λ.*

Exercice 2. (**15p**) Soit $\rho:I\to]0,\infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et considérons la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $x^1=\rho(x^2)$ autour de l'axe Ox^2.

1. (**0,5p**) Montrer que
$$f(u^1,u^2)=\begin{pmatrix}\rho(u^2)\cos(u^1)\\u^2\\\rho(u^2)\sin(u^1)\end{pmatrix}$$
définit une paramétrisation de cette surface.
2. (**0,5p**) Soit $(h,R)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. Dessiner cette surface pour
   (a) $I=]0,h[$ et $\rho(x)=R$ (la fonction constante R sur I),
   (b) $I=]0,h[$ et $\rho(x)=\frac{R}{h}x$.
   (c) $I=]-R,R[$ et $\rho(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.
3. (**2p**) Écrire une formule intégrale pour aire$(f([0,2\pi]\times]a,b[))$. En déduire l'aire d'un cylindre de hauteur h et rayon R, d'un cône de hauteur h et rayon R, et de la sphère de rayon R.
4. (**2p**) Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale, le champ normal de Gauss, et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de f.
5. (**2p**) Déterminer la courbure de Gauss, les courbures principales et la courbure moyenne de f.
6. Fixons $d_0\in I$ et considérons la courbe paramétrée sur f donnée par $c=f\circ\gamma:\mathbb{R}\to S$, où $\gamma(t)=(t,d_0)$. Une telle courbe s'appelle parallèle de la surface de révolution $S=\mathrm{im}(f)$.
   (a) (**1 p**) Calculer $c'(t)$ et la dérivation covariante $\frac{\nabla c'(t)}{dt}$.
   (b) (**1 p**) Montrer que c est une géodésique de f (de S) si et seulement si $\rho'(d_0)=0$, donc si et seulement si d_0 est un point critique de la fonction ρ.
7. Fixons $\theta_0\in\mathbb{R}$ et considérons la courbe paramétrée sur f donnée par $c=f\circ\gamma:I\to S$, où $\gamma(t)=(\theta_0,t)$. Une telle courbe s'appelle méridien de la surface de révolution $S=\mathrm{im}(f)$.
   (a) (**1 p**) Calculer $c'(t)$ et la dérivation covariante $\frac{\nabla c'(t)}{dt}$. Montrer que $\frac{\nabla c'(t)}{dt}$ et $c'(t)$ sont colinéaires.
   (b) (**1 p**) Soit $\varphi:J\to I$ un changement de paramétrisation telle que $t\mapsto\|\tilde{c}'(t)\|$ soit constante, où $\tilde{c}:=c\circ\varphi$. Montrer que $\tilde{c}$ est une ligne géodésique de f (de S).
8. (**2p**) Déterminer les éléments $g^{ij}(u)$ de l'inverse $G(u)^{-1}$ de la matrice de la première forme fondamentale et les coefficients de Christoffel de première et de deuxième espèce de f.

9. (**2p**) Calculer les fonctions R^m_{112} ($m \in \{1,2\}$) définies en cours et la composante R_{1212} du tenseur de courbure de f (en utilisant la définition de cette composante). Comparer le résultat obtenu avec le déterminant $\det(H) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$ de le seconde forme fondamentale. Quel résultat général fait en cours nous permet d'affirmer sans calcul que $R_{1212} = \det(H)$?

   Rappel: $R_{1212} = g_{2m}R^m_{112}$, $\Gamma^l_{ik} = g^{lj}\Gamma_{ikj}$, $\Gamma_{ikj} = \Gamma_{kij} = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j})$ et

$$R^m_{112} = \Gamma^m_{11,2} - \Gamma^m_{12,1} + (\Gamma^l_{11}\Gamma^m_{l2} - \Gamma^l_{12}\Gamma^m_{l1}) = \Gamma^m_{11,2} - \Gamma^m_{12,1} + (\Gamma^1_{11}\Gamma^m_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^m_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^m_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^m_{21}).$$

Exercice 3. (**15p**) Soit $(w, \kappa, \tau) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$, et soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée 2-régulière telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\gamma'(t)\| = w,\ \kappa_\gamma(t) = \kappa,\ \tau_\gamma(t) = \tau.$$

Donc la vitesse absolue, la courbure, et la torsion de γ sont constantes.

1. (**1p**) En désignant par $(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ le repère mobile de Frenet de γ, écrire les équations de Frenet pour la courbe paramétrée γ.
2. (**1p**) Fixons $\varepsilon > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma(u) + \varepsilon\cos(v)f_2(u) + \varepsilon\sin(v)f_3(u)\ .$$

   Quelle est l'interprétation géométrique des courbes paramétrées $\mathbb{R} \ni v \mapsto f(u_0, v)$ pour $u_0 \in \mathbb{R}$ constant? Est-ce que f est injective?
3. (**2p**) En utilisant les formules de Frenet exprimer les dérivées partielles de f comme combinaisons linéaires de vecteurs du repère mobile de Frenet.
4. (**2p**) Déterminer (en fonction du paramètre $\varepsilon > 0$) l'ensemble des points $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ où f n'est pas une immersion.
5. (**1p**) Montrer que, pour ε suffisamment petit, f est une immersion sur $\mathbb{R}^2$.
6. (**2p**) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Calculer l'aire de la surface $f([a, b] \times [0, 2\pi])$. Quelle est l'interprétation géométrique de cette surface?
7. (**3p**) Calculer la première forme fondamentale de f, le champ normal de Gauss $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, et la seconde forme fondamentale de f.
8. (**3p**) Calculer les courbures principales, la courbure moyenne et la courbure de Gauss de f.