

Licence Mathématiques 3 : Géométrie différentielle

Examen partiel du 10 mars 2017

durée : 2h

Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 (5p) (questions proches du cours)

- (3p) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière, et soit $\tau_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa torsion. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - Il existe un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\text{im}(\gamma) \subset \pi$.
 - $\tau_\gamma = 0$.
- (2p) Énoncer le théorème fondamental de la théorie de courbes, et expliquer brièvement la méthode de démonstration.

Exercice 2 (8p) (Hélices généralisées) Soit $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane birégulière normale (paramétrée par l'abscisse curviligne), et soit $(g_1, g_2) : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(2)$ son repère mobile de Frenet. Soit $a \in \mathbb{R}$ L'hélice généralisée de pente a associée à γ est la courbe paramétrée $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ at \end{pmatrix}.$$

- (1p) Écrire les équations de Frenet pour la courbe normale plane γ .
- (2p) Exprimer le repère mobile de Frenet $(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(3)$ de χ en fonction du repère mobile de Frenet (g_1, g_2) de γ . *Indication* : Attention au signe de κ_γ .
- (2p) Exprimer la courbure κ_χ et la torsion τ_χ de χ en fonction de la courbure κ_γ de γ , et de a . Utiliser deux méthodes pour ces calculs. Préciser le rapport $\frac{\tau_\chi}{\kappa_\chi}$.
- (1p) Donner la formule explicite de la courbe paramétrée normale $\tilde{\chi}$ associée à χ (en utilisant un changement de paramètre linéaire, direct). Écrire explicitement $\kappa_{\tilde{\chi}}(s)$, $\tau_{\tilde{\chi}}(s)$. La courbe ainsi obtenue sera appelée l'hélice normalisée de pente a associée à γ .
- (2p) Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière normale telle que le rapport $\rho := \tau_c/\kappa_c$ soit constant. Montrer que c s'écrit sous la forme $c = g \circ \tilde{\chi}$, où $\tilde{\chi}$ est l'hélice normalisée associée à une courbe plane birégulière normale de courbure positive, et g une isométrie directe. *Indication* : Préciser d'abord la courbure de la courbe plane γ cherchée en fonction de κ_c et ρ . Appliquer le théorème fondamental de la théorie des courbes deux fois : une fois pour les courbes dans $\mathbb{R}^2$, et une fois pour les courbes dans $\mathbb{R}^3$.

Solution :

$$\|\chi'(t)\| = \sqrt{1+a^2}, \quad \chi'(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ a \end{pmatrix}, \quad f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (\tilde{g}_1(t) + ae_3),$$

$$\chi''(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_\gamma(t)g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $g_2(t) \perp g_1(t)$, donc $\chi''(t) \perp f_1(t)$, et

$$f_2(t) = \frac{1}{\|\chi''(t)\|} \chi''(t) = \frac{1}{|\kappa_\gamma(t)|} \begin{pmatrix} \kappa_\gamma(t)g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{sign}(\kappa_\gamma(t)) \begin{pmatrix} g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \kappa_\gamma(t)\tilde{g}_2(t),$$

Notons que $(\tilde{g}_1(t), \tilde{g}_2(t), e_3)$ est une base orthonormée directe, donc

$$\tilde{g}_1(t) \wedge \tilde{g}_2(t) = e_3, \quad \tilde{g}_2(t) \wedge \tilde{e}_3 = \tilde{g}_1(t), \quad \tilde{e}_3 \wedge \tilde{g}_1(t) = \tilde{g}_2(t).$$

On obtient donc

$$f_3(t) = \text{sign}(\kappa_\gamma(t)) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (\tilde{g}_1(t) \wedge \tilde{g}_2(t) + ae_3 \wedge \tilde{g}_2(t)) = \text{sign}(\kappa_\gamma(t)) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} (e_3 - a\tilde{g}_1(t)).$$

$$f'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} \kappa_\gamma(t)g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\kappa_\gamma(t)}{\sqrt{1+a^2}} \tilde{g}_2(t),$$

$$f'_2(t) = \text{sign}(\kappa_\gamma(t)) \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma(t)g_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle f_2(t), f'_1(t) \rangle = \frac{|\kappa_\gamma(t)|}{1+a^2},$$

$$\tau_\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \langle f_3(t), f'_2(t) \rangle = \frac{a\kappa_\gamma(t)}{1+a^2}.$$

$$\tilde{\chi}(s) = \chi\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_1\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ \gamma_2\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) \\ \frac{as}{\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}$$

$$\kappa_{\tilde{\chi}}(s) = \frac{1}{1+a^2} \left| \kappa_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right) \right|$$

$$\tau_{\tilde{\chi}}(s) = \frac{a}{1+a^2} \kappa_\gamma\left(\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

Exercice 3 (14 p) (Courbes tracées sur une sphère) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière normale (paramétrée par l'abscisse curviligne), et soit $(f_1, f_2, f_3) : I \rightarrow \text{SO}(3)$ son repère mobile de Frenet.

A. Soit $(q, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$, et supposons que $\text{im}(\gamma) \subset S_q(r)$, i.e. que γ est une courbe tracée sur la sphère de centre q et rayon r . Montrer que

1. **(1p)** Pour tout $t \in I$ on a $(\gamma(t) - q) \perp f_1(t)$,
2. **(1p)** Montrer qu'il existe une unique paire (a, b) de fonctions différentiables réelles sur I , telle que pour tout $t \in I$ on a
 - (a) $\gamma(t) - q = a(t)f_2(t) + b(t)f_3(t)$,
 - (b) $a(t)^2 + b(t)^2 = r^2$.
3. **(1p)** En déduire a en fonction de κ_γ , et démontrer l'inégalité $\kappa_\gamma(t) \geq \frac{1}{r}$. *Indication* : Dériver (a), utiliser les formules de Frenet, puis utiliser (b).
4. **(1p)** En supposant que γ est trirégulière (i.e. que $\tau_\gamma \neq 0$ pour tout t), exprimer b en fonction de κ_γ et τ_γ , et démontrer l'identité

$$\frac{1}{\kappa_\gamma^2} + \frac{\kappa_\gamma'^2}{\kappa_\gamma^4 \tau_\gamma^2} = r^2. \quad (1)$$

5. **(1p)** Supposons que pour tout $t \in I$ on a $\kappa_\gamma'(t) \neq 0$. Montrer que pour tout $t \in I$ on a aussi $a'(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ et $\tau_\gamma(t) \neq 0$. En déduire que l'identité (1) est vérifiée, et qu'on a l'inégalité stricte $\kappa_\gamma(t) > \frac{1}{r}$.

6. **(3p)** Montrer que si κ_γ est constante, alors a et b sont constantes, et que dans ce cas on a $\tau_\gamma = 0$. Qu'est-ce qu'on peut dire de $\text{im}(\gamma)$ dans ce cas ? Donner la forme générale de γ dans ce cas.

B. Réciproquement, supposons que γ est une courbe trirégulière normale dont la courbure et la torsion satisfont l'identité (1), et qui satisfait aussi la condition

$$\forall t \in I, \kappa'_\gamma(t) \neq 0. \quad (C)$$

1. **(2p)** Montrer qu'il existe une unique paire (a, b) d'application différentiables réelles sur I , telle que $a^2 + b^2 = r^2$ et l'application

$$\gamma - af_2 - bf_3 : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

soit constante. *Indication : Exprimer la dérivée de (2) dans le repère mobile de Frenet. Utiliser les coefficients de f_1 et f_2 pour déterminer a et b , utiliser (1) pour en déduire $a^2 + b^2 = r^2$, et puis démontrer l'annulation du coefficient de f_3 par dérivation, en utilisant (C).*

2. **(1p)** Conclure que γ est tracée sur une sphère de rayon r . Énoncer un théorème qui commence de la manière suivante "Une courbe trirégulière normale γ satisfaisant la condition (C) est tracée sur une sphère de rayon r si et seulement si ...".
3. **(2p)** Donner un exemple de courbe trirégulière normale $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui satisfait (1), mais n'est pas tracée sur une sphère de rayon r . Justifier votre réponse. En déduire que la condition (C) est nécessaire.
4. **(1p)** Montrer que le théorème reste vrai si on remplace la condition (C) par la condition plus faible

$$\{t \in I \mid \kappa'_\gamma(t) \neq 0\} \text{ est dense dans } I.$$

Solution : B. 1. On a

$$(\gamma - af_2 - bf_3)' = (1 + a\kappa_\gamma)f_1 + (-a' + b\tau_\gamma)f_2 - (a\tau_\gamma + b')f_3.$$

La condition " $\gamma - af_2 - bf_3$ est constante" est équivalente à $(\gamma - af_2 - bf_3)' = 0$. On doit choisir

$$a = -\frac{1}{\kappa_\gamma}, \quad b = \frac{a'}{\tau_\gamma} = \frac{\kappa'_\gamma}{\kappa_\gamma^2 \tau_\gamma}.$$

A vérifier que, avec ce choix, on a aussi $a\tau_\gamma + b' = 0$. Mais en utilisant (1) on obtient $a^2 + b^2 = r^2$, donc $aa' + bb' = 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 &= aa' + bb' = ab\tau_\gamma + bb' = b(a\tau_\gamma + b'), \\ a\tau_\gamma + b' &= -\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} + \frac{\kappa''_\gamma \kappa_\gamma^2 \tau_\gamma - \kappa'_\gamma (2\kappa_\gamma \kappa'_\gamma \tau_\gamma + \kappa_\gamma^2 \tau'_\gamma)}{\kappa_\gamma^4 \tau_\gamma^2} = -\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} + \frac{\kappa''_\gamma \kappa_\gamma \tau_\gamma - 2\kappa_\gamma'^2 \tau_\gamma - \kappa_\gamma \kappa'_\gamma \tau'_\gamma}{\kappa_\gamma^3 \tau_\gamma^2} = \\ &= \frac{1}{\kappa_\gamma^3 \tau_\gamma^2} (\kappa''_\gamma \kappa_\gamma \tau_\gamma - 2\kappa_\gamma'^2 \tau_\gamma - \kappa_\gamma \kappa'_\gamma \tau'_\gamma - \kappa_\gamma^2 \tau_\gamma^3) \end{aligned}$$

Mais en dérivant (1) on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\frac{\kappa'_\gamma}{\kappa_\gamma^3} + \frac{2\kappa'_\gamma \kappa''_\gamma \kappa_\gamma^4 \tau_\gamma^2 - \kappa_\gamma'^2 (4\kappa_\gamma^3 \kappa'_\gamma \tau_\gamma^2 + 2\kappa_\gamma^4 \tau_\gamma \tau'_\gamma)}{\kappa_\gamma^8 \tau_\gamma^4} \\ 0 &= \frac{\kappa'_\gamma}{\kappa_\gamma^5 \tau_\gamma^3} (-\kappa_\gamma^2 \tau_\gamma^3 + \kappa_\gamma \kappa''_\gamma \tau_\gamma - 2\kappa_\gamma'^2 \tau_\gamma - \kappa_\gamma \kappa'_\gamma \tau'_\gamma) \end{aligned}$$