**UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE** **UFR SCIENCES**

# Licence Mathématiques 3 : Géométrie différentielle

Examen partiel du 10 mars 2017
durée : 2h
Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.

**Exercice 1** (**5p**) (questions proches du cours)

1. (**3p**) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière, et soit $\tau_\gamma : I \to \mathbb{R}$ sa torsion. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{im}(\gamma) \subset \pi$.
   (b) $\tau_\gamma = 0$.
2. (**2p**) Énoncer le théorème fondamental de la théorie de courbes, et expliquer brièvement la méthode de démonstration.

**Exercice 2** (**8p**) (Hélices généralisées) Soit $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane birègulière normale (paramétrée par l'abscisse curviligne), et soit $(g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(2)$ son repère mobile de Frenet. Soit $a \in \mathbb{R}$ *L'hélice généralisée* de pente $a$ associée à $\gamma$ est la courbe paramétrée $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ at \end{pmatrix} .$$

1. (**1p**) Écrire les équations de Frenet pour la courbe normale plane $\gamma$.
2. (**2p**) Exprimer le mobile repère mobile de Frenet $(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de $\chi$ en fonction du repère mobile de Frenet $(g_1, g_2)$ de $\gamma$. *Indication* : Attention au signe de $\kappa_\gamma$.
3. (**2p**) Exprimer la courbure $\kappa_\chi$ et la torsion $\tau_\chi$ de $\chi$ en fonction de la courbure $\kappa_\gamma$ de $\gamma$, et de $a$. Utiliser deux méthodes pour ces calculs. Préciser le rapport $\frac{\tau_\chi}{\kappa_\chi}$.
4. (**1p**) Donner la formule explicite de la courbe paramétrée normale $\tilde{\chi}$ associée à $\chi$ (en utilisant un changement de paramètre linéaire, direct). Écrire explicitement $\kappa_{\tilde{\chi}}(s)$, $\tau_{\tilde{\chi}}(s)$. La courbe ainsi obtenue sera appelée l'hélice normalisée de pente $a$ associée à $\gamma$.
5. (**2p**) Soit $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière normale telle que le rapport $\rho := \tau_c/\kappa_c$ soit constant. Montrer que $c$ s'écrit sous la forme $c = g \circ \tilde{\chi}$, où $\tilde{\chi}$ est l'hélice normalisée associée à une courbe plane birégulière normale de courbure positive, et $g$ une isométrie directe. *Indication* : Préciser d'abord la courbure de la courbe plane $\gamma$ cherchée en fonction de $\kappa_c$ et $\rho$. Appliquer le théorème fondamental de la théorie des courbes deux fois : une fois pour les courbes dans $\mathbb{R}^2$, et une fois pour les courbes dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 3** (**14 p**) (Courbes tracées sur une sphère) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière normale (paramétrée par l'abscisse curviligne), et soit $(f_1, f_2, f_3) : I \to \mathrm{SO}(3)$ son repère mobile de Frenet.
A. Soit $(q, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$, et supposons que $\mathrm{im}(\gamma) \subset \mathrm{S}_q(r)$, i.e. que $\gamma$ est une courbe tracée sur la sphère de centre $q$ et rayon $r$. Montrer que

1. (**1p**) Pour tout $t \in I$ on a $(\gamma(t) - q) \perp f_1(t)$,
2. (**1p**) Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b)$ de fonctions différentiables réelles sur $I$, telle que pour tout $t \in I$ on a
   (a) $\gamma(t) - q = a(t) f_2(t) + b(t) f_3(t)$,
   (b) $a(t)^2 + b(t)^2 = r^2$.

3. (**1p**) En déduire $a$ en fonction de $\kappa_\gamma$, et démontrer l'inégalité $\kappa_\gamma(t) \geq \frac{1}{r}$. *Indication* : Dériver (a), utiliser les formules de Frenet, puis utiliser (b).
4. (**1p**) En supposant que $\gamma$ est trirégulière (i.e. que $\tau_\gamma \neq 0$ pour tout $t$), exprimer $b$ en fonction de $\kappa_\gamma$ et $\tau_\gamma$, et démontrer l'identité
$$\frac{1}{\kappa_\gamma^2} + \frac{\kappa_\gamma'^2}{\kappa_\gamma^4 \tau_\gamma^2} = r^2 \,. \tag{1}$$
5. (**1p**) Supposons que pour tout $t \in I$ on a $\kappa'_\gamma(t) \neq 0$. Montrer que pour tout $t \in I$ on a aussi $a'(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$ et $\tau_\gamma(t) \neq 0$. En déduire que l'identité (1) est vérifiée, et qu'on a l'inégalité stricte $\kappa_\gamma(t) > \frac{1}{r}$.
6. (**3p**) Montrer que si $\kappa_\gamma$ est constante, alors $a$ et $b$ sont constantes, et que dans ce cas on a $\tau_\gamma = 0$. Qu'est-ce qu'on peut dire de $\mathrm{im}(\gamma)$ dans ce cas ? Donner la forme générale de $\gamma$ dans ce cas.

B. Réciproquement, supposons que $\gamma$ est une courbe trirégulière normale dont la courbure et la torsion satisfont l'identité (1), et qui satisfait aussi la condition

$$\forall t \in I,\ \kappa'_\gamma(t) \neq 0\,. \tag{$C$}$$

1. (**2p**) Montrer qu'il existe une unique paire $(a, b)$ d'application différentiables réelles sur $I$, telle que $a^2+b^2 = r^2$ et l'application
$$\gamma - af_2 - bf_3 : I \to \mathbb{R}^3 \tag{2}$$
soit constante. *Indication : Exprimer la dérivée de (2) dans le repère mobile de Frenet. Utiliser les coefficients de $f_1$ et $f_2$ pour déterminer $a$ et $b$, utiliser (1) pour en déduire $a^2 + b^2 = r^2$, et puis démontrer l'annulation du coefficient de $f_3$ par dérivation, en utilisant (C).*
2. (**1p**) Conclure que $\gamma$ est tracée sur une sphère de rayon $r$. Énoncer un théorème qui commence de la manière suivante "*Une courbe trirégulière normale $\gamma$ satisfaisant la condition (C) est tracée sur une sphère de rayon $r$ si et seulement si* ...".
3. (**2p**) Donner un exemple de courbe trirégulière normale $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qui satisfait (1), mais n'est pas tracée sur une sphère de rayon $r$. Justifier votre réponse. En déduire que la condition (C) est nécessaire.
4. (**1p**) Montrer que le théorème reste vrai si on remplace la condition (C) par la condition plus faible

$$\{t \in I |\ \kappa'_\gamma(t) \neq 0\} \text{ est dense dans } I\,.$$