Géométrie Différentielle – TD n°2 : Courbes paramétrées dans l'espace. Surfaces paramétrées.

Exercice 1 Déterminer le repère mobile de Frenet et déterminer la courbure et la torsion de l'hélice circulaire donnée par les équations paramétriques :

$$x_1 = r\cos t\ ,\ x_2 = r\sin t\ ,\ x_3 = \alpha t\ \ (r > 0\ ,\ \alpha \in \mathbb{R})\ .$$

Exercice 2 Considérons la cubique gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2/2 \\ t^3/6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que γ est birégulière.
2. Déterminer le repère mobile de Frenet de γ.
3. Déterminer la courbure et la torsion de γ.
4. Déterminer la longueur de la restriction $\gamma_{|[0,1]}$.

Exercice 3 Classifier toutes les courbes birégulières $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ qui ont la torsion identiquement nulle.

Exercice 4 Soit $\kappa_0 > 0$ et $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Classifier les courbes birégulières normales $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dont la courbure et la torsion sont constantes κ_0 et τ_0 respectivement.

Exercice 5 Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. Soit S une surface donnée par l'équation *implicite* $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. On dit que S a un contact d'ordre (au moins) n avec γ au point $t_0 \in I$ si t_0 est une racine d'ordre (au moins) n de $F \circ \gamma$ (donc si $(F \circ \gamma)^{(i)}(t_0) = 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$).

Montrer que si γ est birégulière en $t_0 \in I$, alors il existe un plan unique qui a un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0.

1. Déterminer explicitement l'équation de ce plan.
2. Montrer que ce plan coïncide avec le *plan osculateur* de γ en t_0 défini en cours.

Exercice 6 Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière *normale*. En utilisant les notions introduites dans l'exercice précédent, démontrer que si $\tau_\gamma(t_0) \neq 0$, alors γ admet une unique sphère qui a un contact d'ordre (au moins) 4 avec γ en t_0.

1. Déterminer explicitement l'équation de cette sphère.
2. Que se passe-t-il si $\tau_\gamma(t_0) = 0$?

Exercice 7 Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}, R)$ de rayon R paramétrée par "les coordonnées sphériques" :

$$x_1(u) = R\cos u_2 \cos u_1\ ,\ x_2(u) = R\cos u_2 \sin u_1\ ,\ z = R\sin u_2\ ,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ .$$

Exercice 8 Nous définissons une paramétrisation de la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ privée de $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la manière suivante : pour un point $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on convient de noter par le même symbole le point $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, donc on identifie le plan $\mathbb{R}^2$ avec le plan $x_3 = 0$ de l'espace. Avec cette convention remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ la droite $(Nu) \subset \mathbb{R}^3$ déterminée par les points N et u coupe la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ dans N et un deuxième point, qui dépend de u et sera noté $f(u)$. Par définition on a $f(u) \in S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \setminus \{N\}$.

1. Écrire les équations paramétriques de la droite (Nu),
2. Déterminer l'application f explicitement, donc exprimer $f(u)$ en fonction de u explicitement.
3. Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de la surface paramétrée obtenue.

L'application réciproque $f^{-1} : S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ s'appelle la "projection stéréographique" de centre "le pôle nord" de la sphère .

Exercice 9 Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction différentiable.

1. Donner une paramétrisation de la *surface de révolution* obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $x_1 = \varphi(x_3)$ (courbe située dans le plan $x_1 O x_3$) autour de l'axe Ox_3.
2. Déterminer la première et la seconde forme fondamentale de la surface paramétrée obtenue
3. Cas particulier : le cône

Exercice 10 Considérons le paraboloïde hyperbolique Π défini par l'équation implicite $x_3 = x_1^2 - x_2^2$.

1. Dessiner cette surface dans $\mathbb{R}^3$ en étudiant d'abord les courbes d'intersection de cette surface avec les plans $x_3 = c$, $x_1 = c$, $x_2 = c$.
2. Donner une paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de Π.
3. Calculer la première et la seconde forme fondamentale de la surface paramétrée f.

Exercice 11 Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $\psi : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et

$$\Gamma_\psi := \left\{ \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \psi(u_1, u_2) \end{array} \right) \middle| \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

son graphe.

1. Donner une paramétrisation $f : U \to \mathbb{R}^3$ de Γ_ψ.
2. Calculer la première et la deuxième forme fondamentale de la surface paramétrée f.
3. Étudier la cas particulier de l'application $\psi : B(0_{\mathbb{R}^2}, 1) \to \mathbb{R}$ donnée par $\psi(u_1, u_2) := \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}$. Préciser la surface Γ_ψ dans cas, et déterminer explicitement la première et la seconde forme fondamentale de f dans ce cas.