Géométrie Différentielle – TD n°3 : Courbures principales. Courbure de Gauss et courbure moyenne.

Exercice 1

1. En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange déterminer le point de la sphère standard $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ \|x\| = 1\}$ qui est le plus proche du point $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle, carrée d'ordre n. Étudier les problème de minimisation sous contrainte (minimum lié) et maximisation sous contrainte (maximum lié) :

$$\inf\{\langle Ax, x\rangle | \ \|x\| = 1\} \ , \ \sup\{\langle Ax, x\rangle | \ \|x\| = 1\}.$$

   Interpréter votre résultat dans le cas où A est une matrice symétrique.
3. Étudier le problème de maximisation sous contrainte (maximum lié)

$$\sup \left\{ \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \ \middle| \ x_i \in \mathbb{R}_+, \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\} .$$

   Remarquer d'abord que le maximum est atteint dans un point dont toutes les coordonnées sont strictement positives. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n .$$

Exercice 2 Considérons la surface de révolution associée à une fonction $r : I \to]0, \infty[$, donc la surface obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $x_2 = r(x_3)$ dans le plan x_2Ox_3 autour de l'axe Ox_3. Remarquer d'abord que cette surface est définie par l'équation implicite $x_1^2 + x_2^2 = r(x_3)^2$ et que

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} r(u_1)\cos u_2 \\ r(u_1)\sin u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

définit une paramétrisation de cette surface.

1. Écrire une formule explicite pour l'aire de la surface $S = f([a, b] \times [0, 2\pi])$. Cas particuliers : calculer l'aire d'une sphère de rayon R, d'un cône de révolution de hauteur h et rayon R, d'un cylindre de révolution de hauteur h et rayon R, et du morceau $\Pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ R^2 z = x^2 + y^2, \ z \in [0, h]\}$ du paraboloïde elliptique d'équation $R^2 z = x^2 + y^2$.
2. Déterminer le repère mobile de Gauss, les deux formes fondamentales, les courbures, les direction principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de f dans le cas général. Préciser les résultats obtenus pour les 4 cas particuliers considéré à la question 1.
3. Étudier le signe de la courbure $K(u_1, u_2)$ dans un point (u_1, u_2) telle que u_1 est un point de minimum local de r pour lequel $r''(u_1) > 0$, et dans un point (u_1, u_2) telle que u_1 est un point de maximum local de r pour lequel $r''(u_1) < 0$. Préciser les directions principales et les courbures principales dans un tel point.

Exercice 3 Déterminer les courbures et les direction principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne du paraboloïde hyperbolique défini par l'équation $z = x^2 - y^2$ en utilisant la paramétrisation

$$\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

correspondant aux paramètres $u = x - y$, $v = x + y$. Déterminer les points de courbure moyenne nulle et déterminer explicitement les courbures et les direction principales en ces points.

Exercice 4 Soit Γ_R le cylindre de révolution d'axe Ox_3 et base $C(0,R) \subset x_1Ox_2$, donc la surface définie par l'équation implicite $x_1^2+x_2^2 = R^2$. Soit $\mathcal{C}_R$ le cône de de révolution d'axe Ox_3 et base le cercle horizontal de rayon R situé dans le plan $x_3 = 1$, donc la surface définie par l'équation implicite $R^2x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Préciser des paramétrisations convenables de Γ_R et de $\mathcal{C}_R \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Déterminer la première et la deuxième forme fondamentale, les courbures et les directions principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne en tout point des deux surfaces paramétrées. Montrer que dans les deux cas la courbure de Gauss et identiquement nulle et faire la liaison avec le théorème du cours concernant l'interprétation géométrique de la condition $K \equiv 0$.

Exercice 5 Refaire le calcul des courbures principales, de la courbure de Gauss et de la courbure moyenne du tore de révolution étudié en cours et étudier les points extrémaux de la courbure de Gauss et de la courbure moyenne.

Exercice 6 Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $\psi : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\Gamma_\psi := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi(u_1,u_2) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U \right\}$ son graphe.

1. Donner une paramétrisation naturelle $f : U \to \mathbb{R}^3$ de Γ_ψ.
2. Calculer la première et la deuxième forme fondamentale de la surface paramétrée f (ou utiliser l'exercice correspondant de la planche TD2), les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de cette surface.
3. Supposons $u_0 \in U$ est un point critique de ψ et que la matrice hessienne $\chi_\psi(u) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u_i \partial u_j}(u)\right)_{1\leq i,j\leq 2}$ est non-dégénérée au point u_0. Montrer que $K(u_0) > 0$ si u_0 est un point d'extremum local (donc si les deux valeurs propres de $\chi_\psi(u_0)$ sont de même signe) et $K(u_0) < 0$ si u_0 est un point selle de ψ, donc si les deux valeurs propres de $\chi_\psi(u_0)$ sont de signes différents.
4. Étudier le cas particulier de l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $\psi(u_1,u_2) := u_1^2 + u_2^2$. Préciser la surface Γ_ψ dans cas, et déterminer explicitement la première, la deuxième forme fondamentale, les courbures principales et la courbure de Gauss de f dans ce cas. Calculer l'aire de la surface $S := f(B(0_{\mathbb{R}^2}, R))$.

Exercice 7 Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée avec U connexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. les courbures principales sont nulles en tout point $u \in U$,
2. l'endomorphisme de Weingarten est nul en tout point $u \in U$,
3. la deuxième forme fondamentale h est nulle en tout point $u \in U$,
4. l'application de Gauss $n : U \to \mathbb{R}^3$ (qui associe à un point $u \in U$ le vecteur normal standard $n(u)$) est constante,
5. L'image de f est contenue dans un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ (f est une paramétrisation locale d'un plan).

Exercice 8 * Classifier les surfaces de révolution qui ont la courbure de Gauss constante.
Indication : Paramétrer la courbe plane qui engendre la surface (par rotation autour de l'axe Ox_3) en utilisant une paramétrisation normale, c'est à dire une paramétrisation $t \mapsto (h(t), k(t))$ telle que

$$h'(t)^2 + k'(t)^2 \equiv 1 \ .$$

La surface de revolution correspondante sera définie par la paramétrisation

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} h(u)\cos v \\ h(u)\sin v \\ k(u) \end{pmatrix} \ .$$

Voir le livre [KH] p. 66 pour une solution complète de cet exercice.

[KH] W. Klingenberg, D. Hoffman : *A course in differential geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1983.