

Géométrie Différentielle

Cours L3 MG, Aix-Marseille Université

Andrei Teleman

CMI, Aix-Marseille Université,
39 Rue Frédéric Joliot-Curie, 13453 Marseille, Cedex 13

27 mars 2020

Programme : Courbes planes : définitions, tangente, étude locale. Courbes en coordonnées polaires. Propriétés métriques : longueur d'un arc paramétré, abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure. Surfaces : définitions, plan tangent, normale. Courbures, géodésiques, courbure principale. Plongements, immersions. Théorème de Gauss-Bonnet

Résumé

Ce cours et une introduction dans la théorie des courbes et des surfaces, donc des premières notions de géométrie différentielle. La géométrie différentielle étudie certains objets géométriques (courbes, surfaces, variétés différentiables) avec les outils du calcul différentiel. La géométrie différentielle est un domaine très important, qui a beaucoup d'applications en physique théorique (notamment dans la théorie de la relativité) et beaucoup d'interférences avec d'autres disciplines mathématiques modernes (par exemple la topologie, l'analyse, la géométrie algébrique et complexe).

Pour suivre ce cours avec succès, les étudiants doivent réviser les notions d'algèbre linéaire et multilinéaire, et les notions d'analyse (différentiabilité, intégration) étudiées dans les cours de licence.

Table des matières

1	L'espace euclidien \mathbb{R}^n	2
1.1	La structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R}^n . Sous-espaces vectoriels et affines	2
1.2	L'espace euclidien \mathbb{R}^n et les isométries de \mathbb{R}^n . Produit vectoriel généralisé	4
1.3	L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	10
2	Courbes paramétrées dans l'espace euclidien	12
2.1	Courbes paramétrées. Points multiples. Points réguliers. Droite tangente. Abscisse curviligne et paramétrage normal. Longueur d'une courbe paramétrée.	12
2.2	La courbure et le repère mobile de Frenet d'une courbe plane	17
2.3	L'interprétation géométrique de la courbure. Cercle osculateur	19
2.4	Le repère de Frenet et les courbures d'une courbe $(n - 1)$ -régulière dans \mathbb{R}^n	21
3	Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3	26
3.1	Rappel sur la différentiabilité	26
3.2	Surfaces paramétrées. Plan tangent. Changement de variables. Champs vectoriels le long d'une surface paramétrée.	27
3.3	La première forme fondamentale d'une surface paramétrée	29
3.4	La seconde forme fondamentale d'une surface paramétrée	32
3.5	Courbes sur les surfaces. Courbures principales. Courbure de Gauss et courbure moyenne	35
3.6	La convention de sommation d'Einstein	44
3.7	Les formules de Gauss et Codazzi-Mainardi. Teorema Egregium.	45
3.8	Dérivation covariante et lignes géodésiques	49

4	Sous-variétés dans \mathbb{R}^d. Surfaces compactes et le théorème de Gauss-Bonnet	52
4.1	Introduction	52
4.2	Plongements et sous-variétés de \mathbb{R}^d	53
4.3	Intégration sur les sous-variétés. Décompositions lisses en cellules. Le théorème de Gauss-Bonnet	58

1 L'espace euclidien \mathbb{R}^n

1.1 La structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R}^n . Sous-espaces vectoriels et affines

Nous rappelons la définition de *l'espace vectoriel réel n-dimensionnel standard* \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Les éléments $x \in \mathbb{R}^n$ s'appellent vecteurs de \mathbb{R}^n , et les scalaires x_1, \dots, x_n s'appellent les composantes du vecteur x . Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^n}$ de cet espace est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles. L'espace \mathbb{R}^n est muni de deux opérations naturelles :

1. l'addition des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2. la multiplication des vecteurs par les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Ces opérations satisfont les propriétés fondamentales suivantes :

G1. *l'associativité de l'addition des vecteurs* : pour tout x, y, z on a

$$x + (y + z) = (x + y) + z ,$$

G2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$0_{\mathbb{R}^n} + x = x + 0_{\mathbb{R}^n} = x$$

(c'est à dire $0_{\mathbb{R}^n}$ est *élément neutre pour l'addition* des vecteurs.

G3. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$x + (-x) = (-x) + x = 0_{\mathbb{R}^n} ,$$

où $-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ (c'est à dire $-x$ est *l'élément symétrique* de x par rapport à l'addition des vecteurs).

C. pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$x + y = y + x .$$

(c'est à dire l'addition des vecteurs est *commutative*).

Les propriétés G1, G2, G3 montrent que $(\mathbb{R}^n, +)$ est *un groupe*, tandis que les propriétés G1, G3, G3, C montrent que $(\mathbb{R}^n, +)$ est *un groupe commutatif (ou abélien)*.

M1. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x .$$

(l'associativité de la multiplication pas les scalaires).

M2. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$1x = x ,$$

c'est à dire le scalaire $1 \in \mathbb{R}$ est *élément neutre pour la multiplication par les scalaires*.

D. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

(deux propriétés de distributivité de la multiplication par les scalaires par rapport à l'addition des scalaires et des vecteurs).

Définition 1.1.1 Une combinaison linéaire de la famille (x_1, \dots, x_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n est une somme de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, où λ_i sont des scalaires (c'est à dire $\lambda_i \in \mathbb{R}$).

Définition 1.1.2 Un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $W \subset \mathbb{R}^n$ tel que

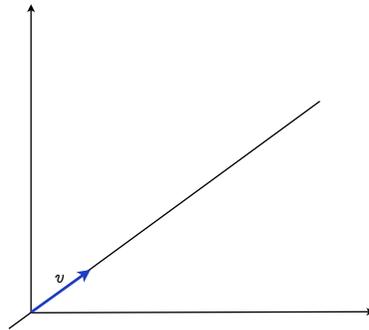
1. $0_{\mathbb{R}^n} \in W$,
2. pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $w_1, w_2 \in W$ on a $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

Par récurrence on démontre facilement que toute combinaison linéaire d'une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel W est encore un élément de W .

Exemples :

1. $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ le sous-espace trivial. Il contient un seul vecteur : le vecteur nul.
2. Pour un vecteur non-nul $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ la droite vectorielle engendrée par v est définie par

$$\mathbb{R}v := \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$



La droite $\mathbb{R}v$ est donc la trajectoire d'un mouvement uniforme qui passe par l'origine, de vecteur vitesse constant v .

3. Soient v, w deux vecteurs non-nuls et non-colinéaires (c'est à dire $w \notin \mathbb{R}v$). Le plan vectoriel engendré par

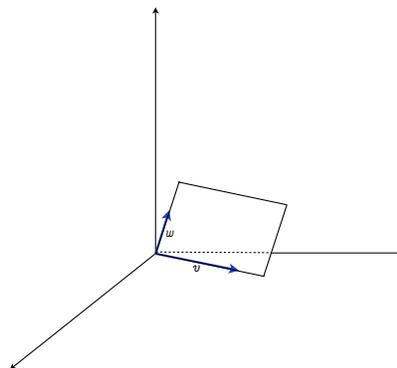


FIGURE 1 – Plan engendré par deux vecteurs.

les vecteurs v et w est le sous-ensemble

$$\text{Vect}(v, w) := \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

donc l'ensemble des combinaisons linéaires de v et w .

4. Soit (v_1, \dots, v_k) une famille de k -vecteurs de \mathbb{R}^n . Le sous-espace vectoriel engendré par (v_1, \dots, v_k) est défini par

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{1, \dots, k\} \right\},$$

donc $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (v_1, \dots, v_k) .

Exercice : Montrer que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est bien un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1.3 Une famille (v_1, \dots, v_k) de vecteurs de \mathbb{R}^n est dite libre si l'implication

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0_{\mathbb{R}^n} \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0)$$

est vraie, donc si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est celle avec tous les coefficients nuls. Dans cette situation on dit aussi que les vecteurs v_1, \dots, v_k sont linéairement indépendants. Une famille (v_1, \dots, v_k) qui n'est pas libre est dite liée, et alors les vecteurs v_1, \dots, v_k sont dits linéairement dépendants.

Une famille (v) formée par un seul vecteur est libre si et seulement si $v \neq 0$.

Une paire (v, w) est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires (ou, d'une manière équivalente, si et seulement si $v \neq 0$ et $w \notin \mathbb{R}v$).

Un triplet (u, v, w) est libre si et seulement si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (ou, d'une manière équivalente, si et seulement si (u, v) est libre et $w \notin \text{Vect}(u, v)$).

Notons qu'une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul. Nous admettons sans démonstration le résultat important suivant :

Proposition 1.1.4 Tout sous-espace vectoriel W de \mathbb{R}^n s'écrit sous la forme $W = \text{Vect}(w_1, \dots, w_d)$, où la famille (w_1, \dots, w_d) est libre. Le cardinal d d'une telle famille libre qui engendre W dépend seulement de W (pas de la famille libre génératrice choisie).

Ceci nous permet de définir

Définition 1.1.5 Le cardinal d d'une telle famille libre qui engendre un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle la dimension de W . La différence $n - d$ s'appelle la codimension de W .

Donc la dimension de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est 0, la dimension d'une droite $\mathbb{R}v = \text{Vect}(v)$ (engendrée par un vecteur $v \neq 0$) est 1, et la dimension d'un plan vectoriel $\text{Vect}(v, w)$ (engendré par deux vecteurs non-colinéaires v, w) est 2.

Définition 1.1.6 Si (w_1, \dots, w_d) est une famille libre qui engendre le sous-espace vectoriel W on dit que la famille (w_1, \dots, w_d) est une base de W .

Donc la dimension d'un sous-espace vectoriel est le cardinal d'une base de cet espace.

Définition 1.1.7 Un sous-espace affine de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble de la forme

$$A = a + W := \{a + w \mid w \in W\} \subset \mathbb{R}^n,$$

où W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , appelé le sous-espace directeur de A . La dimension de A est, par définition, la dimension du sous-espace vectoriel W .

Définition 1.1.8 Un hyperplan vectoriel (respectivement affine) de \mathbb{R}^n est sous-espace vectoriel (respectivement un sous-espace affine) de dimension $n - 1$ (c'est à dire de codimension 1).

1.2 L'espace euclidien \mathbb{R}^n et les isométries de \mathbb{R}^n . Produit vectoriel généralisé

On va désigner par (e_1, \dots, e_n) la base canonique de l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^n . Rappelons que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ se décompose comme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, donc les coordonnées d'un vecteur de \mathbb{R}^n par rapport à la base canonique coïncident avec ses composantes.

Définition 1.2.1 L'espace euclidien n -dimensionnel standard est, par définition, l'espace vectoriel réel n -dimensionnel standard \mathbb{R}^n muni du produit scalaire standard :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$$

Dans ces formules, nous avons considéré x et y comme des matrices de type $(n,1)$ et leur transposées comme des matrices de type $(1,n)$. Le produit d'une matrice de type $(1,n)$ par une matrice de type $(n,1)$ sera une matrice de type $(1,1)$, qu'on peut identifier évidemment avec un scalaire.

Le produit scalaire définit donc une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, qui est *bilinéaire*, c'est à dire linéaire par rapport à chaque argument. Elle est aussi *symétrique*, c'est-à-dire elle vérifie la condition

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n .$$

Deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont dits *orthogonaux* (et on écrit $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ le produit scalaire

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

est un nombre réel positif. Pourquoi ? On définit la *norme euclidienne* de x par la formule

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

Proposition 1.2.2 *La norme euclidienne satisfait les inégalités :*

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ (l'inégalité triangulaire),
2. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ (l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

La *distance euclidienne standard* entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} .$$

La distance euclidienne standard de \mathbb{R}^n est bien une distance au sens de la théorie des espaces métriques, en particulier elle satisfait une version de l'inégalité triangulaire, à savoir :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad (1)$$

qui est une conséquence simple de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne. Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera appelée *isométrie de l'espace euclidien* \mathbb{R}^n (ou transformation isométrique de l'espace euclidien \mathbb{R}^n) si elle conserve la distance euclidienne, c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{on a } d(f(x), f(y)) = d(x, y) .$$

Une telle application est évidemment injective. Pourquoi ? On va voir que toute isométrie de l'espace euclidien \mathbb{R}^n est toujours bijective et affine.

Remarquer que la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ coïncide avec la distance de x à l'origine $0_{\mathbb{R}^n}$. L'angle *non-orienté* $\angle(v, w)$ formé par deux vecteurs non-nuls $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ est l'unique angle appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ défini par la formule

$$\cos(\angle(v, w)) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} .$$

Donc $\angle(v, w) = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}\right)$. Remarquons que l'expression à droite est bien définie parce que

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \in [-1, 1] ,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux si et seulement si $\angle(v, w) = \frac{\pi}{2}$. Rappelons que

Définition 1.2.3 *Une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n est dite orthogonale si $v_i \perp v_j$ pour toute paire (i, j) avec $i \neq j$. Elle s'appelle orthonormale si, en plus, on a $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donc si on a $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ pour toute paire (i, j) .*

Remarque 1.2.4 Si (v_1, \dots, v_n) est une base orthonormale, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i, x \rangle v_i,$$

c'est à dire les coordonnées de x par rapport à la base (v_1, \dots, v_n) coïncident avec les produits scalaires $\langle v_i, x \rangle$.

En effet, on peut décomposer x comme $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$. On applique à gauche et à droite l'opération $\langle \cdot, v_j \rangle$. En utilisant les conditions d'orthonormalité on obtient $\xi_j = \langle x, v_j \rangle$. ■

Rappelons qu'une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n est dite *directe* (ou compatible avec l'orientation canonique) si le déterminant de la matrice carrée (v_1, \dots, v_n) formée avec ces vecteurs (donc le déterminant de la matrice de passage de la base canonique à B) est positif. Dans le cas contraire on va dire que (v_1, \dots, v_n) est une base indirecte.

Définition 1.2.5 Le produit vectoriel sur \mathbb{R}^3 est défini par la formule :

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 \quad (2)$$

Dans cette formule on a utilisé un déterminant formel, à savoir un déterminant dont la dernière colonne est formé par des vecteurs.

Le produit vectoriel a les propriétés importantes suivantes :

1. Le produit vectoriel $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire, anti-symétrique .
2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ on a $\langle x \wedge y, v \rangle = \det(x, y, v)$, où (x, y, v) désigne la matrice carrée de taille 3 formée par le vecteurs colonne x, y, v .
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ on a $\det(x, y, x \wedge y) = \|x \wedge y\|^2$.
4. $x \wedge y = 0$ si et seulement si x, y sont linéairement dépendants.
5. $x \wedge y \perp x$ et $x \wedge y \perp y$, donc le produit vectoriel $x \wedge y$ est orthogonal aux deux vecteurs x, y .
6. Si x, y sont linéairement indépendants, alors $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin \angle(x, y)$ (qui coïncide avec l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs x, y ayant $0_{\mathbb{R}^3}$ comme sommet).
7. Si x, y sont linéairement indépendants, alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de \mathbb{R}^3 . Cette base est orthogonale si $x \perp y$ et est orthonormale si en plus $\|x\| = \|y\| = 1$.
8. La formule de définition (2) reste vraie si on utilise les coordonnées de x, y par rapport à une base ortho-normale directe (f_1, f_2, f_3) . Plus précisément, pour une telle base on a l'identité

$$\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i f_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^3 \eta_j f_j \right) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & f_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & f_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} f_1 - \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} f_2 + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} f_3$$

On peut généraliser la notion de produit vectoriel en dimension n de la manière suivante : Pour $n - 1$ vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ de \mathbb{R}^n on pose

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} := \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n-1} & e_1 \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n-1} & e_2 \\ v_{3,1} & v_{3,2} & \dots & v_{3,n-1} & e_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,n-1} & e_n \end{vmatrix} = \sum (-1)^{n+j} V_j e_j, \quad (3)$$

où V_j est le déterminant de la matrice carrée de taille $n - 1$ obtenue en éliminant la j -ème ligne de la matrice

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n-1} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n-1} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & \dots & v_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.6 L'application $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ a les propriétés suivantes :

1. C'est une application $(n-1)$ -linéaire, alternée¹.
2. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v \rangle = \det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v).$$

3. Pour tous $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \|v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}\|^2.$$

4. $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0$ si et seulement si $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est une famille linéairement dépendante.

5. $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \perp v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

6. Si la famille $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est linéairement indépendante, alors la norme $\|v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}\|$ coïncide avec le volume du parallélépipède $(n-1)$ -dimensionnel engendré par la famille $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ (et ayant $0_{\mathbb{R}^n}$ comme sommet).

7. Si $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est une famille linéairement indépendante, alors la famille

$$(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1})$$

est une base directe de \mathbb{R}^n . Cette base est orthogonale si $(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ est une famille orthogonale et est orthonormale si en plus $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

8. La formule de définition (3) reste vraie si on utilise les coordonnées de v_1, \dots, v_{n-1} par rapport à une base orthonormale directe (f_1, \dots, f_n) .

9. Pour une matrice $B \in M_{n-1, n-1}(\mathbb{R})$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ posons $w_i := \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} v_j$. On peut donc écrire $(w_1, \dots, w_{n-1}) = (v_1, \dots, v_{n-1})B$. Alors

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_{n-1} = \det(B) v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}.$$

10. Pour une matrice $A \in M_{n, n}(\mathbb{R})$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ on a

$$Av_1 \wedge Av_2 \wedge \dots \wedge Av_{n-1} = \text{co}(A)(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1}),$$

où $\text{co}(A)$ est la matrice des cofacteurs de A , donc $\text{co}(A)^T = \det(A)A^{-1}$.

La démonstration de ces propriétés est proposée comme exercice. Par exemple, pour démontrer la propriété (10) on peut supposer $v_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ (pourquoi?) et dans ce cas on constate que la i ème composante de $Ae_1 \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_{n-1}$ est précisément $\text{co}(A)_{in}$ qui coïncide évidemment avec la i ème composante de $\text{co}(A)(e_n)$. Mais $e_n = e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$.

Définition 1.2.7 Une matrice carrée A de taille n est dite orthogonale si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $A^T A = I_n$,
2. A est inversible et $A^{-1} = A^T$,
3. $AA^T = I_n$,
4. les colonnes de A forment une base orthonormale,
5. les lignes de A forment une base orthonormale,
6. L'application linéaire f_A associée à A dans la base canonique conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

7. L'application linéaire f_A associée à A dans la base canonique conserve la norme euclidienne, c'est à dire

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1. une application définie sur un produit cartésien itéré est dite alternée si elle change de signe suite à une permutation de deux arguments.

8. L'application linéaire f_A associée à A dans la base canonique conserve la distance euclidienne (est isométrique), c'est à dire

$$d(Ax, Ay) = d(x, y) \quad \forall x \quad \forall y \in \mathbb{R}^n .$$

L'équivalence de ces propriétés est un proposition qu'on peut démontrer facilement :

1. \Rightarrow 2. On sait que $A^T A = I_n$ (l'hypothèse) et $A^{-1} A = I_n$ par la définition de l'application inverse. L'égalité $A^T A = A^{-1} A = I_n$ implique $(A^T - A^{-1})A = 0_{n,n}$, où en général $0_{m,n}$ désigne la matrice nulle à m lignes et n colonnes. En multipliant à droite par A^{-1} on obtient $A^T = A^{-1}$.

2. \Rightarrow 3. Evident.

3. \Rightarrow 2. De la même manière que 1. \Rightarrow 2. Donner tous les détails.

Donc on a les équivalences 1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3. D'autre part, puisque les lignes de A^T coïncident avec les colonnes de A , en utilisant la règle de multiplication "ligne par colonne" on constate facilement que 1. \Leftrightarrow 4. De la même manière on démontre que 2. \Leftrightarrow 5.

Nous avons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et

$$\langle Ax, Ay \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j \langle Ae_i, Ae_j \rangle .$$

Donc, en identifiant les coefficients des deux formes bilinéaires, on constate que la propriété 6. est équivalente au système d'identités :

$$\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \delta_{ij} , \quad 1 \leq i, j \leq n .$$

Expliquer en détail cette équivalence! Mais Ae_i coïncide avec la i -ème colonne de A . Ce calcul montre donc que

1. \Leftrightarrow 6. En prenant $y = x$ on obtient tout de suite 6. \Rightarrow 7.

7. \Rightarrow 8. En supposant que 7. est vrai, on a

$$d(Ax, Ay) = \|Ay - Ax\| = \|A(y - x)\| = \|y - x\| = d(x, y) .$$

8. \Rightarrow 7. Il suffit de choisir $y = 0$ et de remarquer que $d(Ax, 0) = \|Ax\|$, $d(x, 0) = \|x\|$.

Pour avoir l'équivalence de toutes ces propriétés il suffit de démontrer par exemple 7. \Rightarrow 6. Mais, si 7. est vraie, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle A(x + y), A(x + y) \rangle = \|A(x + y)\|^2 = \|x + y\|^2$$

Mais $\langle A(x + y), A(x + y) \rangle = \|Ax\|^2 + \|Ay\|^2 + 2\langle Ax, Ay \rangle$, et $\langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$. Puisque $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$, $\|Ay\|^2 = \|y\|^2$ (par la propriété 7. qui est notre hypothèse), on obtient finalement $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. ■

On va désigner par $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n . Rappelons qu'on désigne par $Gl(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles (c'est à dire à déterminant non-nul) de taille n , et que cet ensemble, muni de la multiplication matricielle, est un groupe. Ce groupe s'identifie au groupe des automorphismes linéaires $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Corollaire 1.2.8 1. Si $A \in O(n)$ alors $\det(A) \in \{\pm 1\}$,

2. Si $A \in O(n)$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$Av_1 \wedge \dots \wedge Av_{n-1} = \det(A)A(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \in \{\pm A(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1})\} .$$

3. On a $O(n) \subset Gl(n, \mathbb{R})$,

4. $O(n)$ est un sous-groupe de $Gl(n, \mathbb{R})$, plus précisément $O(n)$ s'identifie au groupe des automorphismes linéaires $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont isométriques.

5. L'application $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ est un épimorphisme de groupes².

6. Regardé comme sous-ensemble de $M_{n,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $O(n)$ est compact.

Rappelons qu'on dit qu'un automorphisme linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve (respectivement change) l'orientation de l'espace si $\det(A) > 0$ (respectivement $\det(A) < 0$), où A est la matrice de f dans une base quelconque (par exemple dans la base canonique). Un automorphisme linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve (respectivement change) l'orientation de l'espace si et seulement si l'image par f d'une base arbitraire directe est directe (respectivement indirecte).

2. Rappelons qu'un épimorphisme de groupes est un homomorphisme de groupes qui est surjectif.

Définition 1.2.9 *Le sous-ensemble*

$$\text{SO}(n) := \{A \in \text{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$$

de $\text{O}(n)$ coïncide avec le noyau de l'épimorphisme $\det : \text{O}(n) \rightarrow \{\pm 1\}$, donc il est un sous-groupe de $\text{O}(n)$. Ce sous-groupe s'identifie au sous-groupe des isométries linéaires de \mathbb{R}^n qui préservent l'orientation et s'appelle le groupe spécial orthogonal d'ordre n .

Exemple : On peut classifier facilement les matrices orthogonales de taille 2. En effet, notons par a_1, a_2 les deux colonnes d'une matrice orthogonale A . Le premier vecteur peut être regardé comme un point du cercle trigonométrique $C(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ (i.e. du cercle de rayon 1 et centre $0_{\mathbb{R}^2}$). Donc, d'après les exercices de TD, on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π !) tel que

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les possibilités pour la deuxième colonne a_2 ? Cette deuxième colonne doit être vecteur de norme 1 qui est orthogonal à a_1 . Donc pour a_2 , nous avons deux possibilités, à savoir les vecteurs $R_{\frac{\pi}{2}}(a_1), R_{-\frac{\pi}{2}}(a_1)$ obtenus en appliquant à a_1 une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Ici on a noté R_θ la rotation d'angle θ autour de l'origine.

Mais, en utilisant l'interprétation complexe des rotations, on obtient facilement

$$R_{\frac{\pi}{2}}(a_1) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_{-\frac{\pi}{2}}(a_1) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

Proposition 1.2.10 *Toute matrice orthogonale A de taille 2 est de l'une des deux formes*

1. *Type I (matrices orthogonales à déterminant 1, qui définissent des isométries linéaires qui préservent l'orientation de \mathbb{R}^2) :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

2. *Type II (matrices orthogonales à déterminant -1, qui définissent des isométries linéaires qui changent l'orientation de \mathbb{R}^2) :*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

3. *La formule $A \mapsto a_1$ définit une bijection entre*

- (a) *L'ensemble des matrices orthogonales de type I et le cercle $C(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$,*
- (b) *L'ensemble des matrices orthogonales de type II et le cercle $C(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.*

Donc le groupe $\text{O}(2)$ a deux composantes connexes, et chacune des deux s'identifie au cercle $C(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$. La première composante connexe coïncide avec $\text{SO}(2)$ et un sous-groupe de $\text{O}(2)$, tandis que la deuxième n'est pas un sous-groupe de $\text{O}(2)$. Pourquoi? On peut démontrer que, pour tout $n \geq 2$ le sous-groupe $\text{SO}(n)$ est connexe, donc $\text{O}(n)$ a deux composantes connexes, à savoir les deux classes de congruence modulo $\text{SO}(n)$.

Exercice 1.2.1 Soit $A \in \text{O}(2)$.

1. Si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, alors l'isométrie linéaire associée f_A est la rotation R_θ d'angle θ et de centre $0_{\mathbb{R}^2}$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ alors f_A est la symétrie axiale (réflexion) par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$.

Théorème 1.2.11 *(Classification des isométries de \mathbb{R}^n)* Toute isométrie de l'espace euclidien \mathbb{R}^n est une transformation affine de la forme

$$f(x) = Ax + x_0,$$

où A est une matrice orthogonale.

Démonstration:

Etape 1. Soit φ une isométrie de \mathbb{R}^n telle que $\varphi(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\varphi(x)\| = d(\varphi(x), 0) = d(\varphi(x), \varphi(0)) = d(x, 0) = \|x\| ,$$

c'est à dire φ préserve la norme des vecteurs. D'autre part, pour deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$d(\varphi(x), \varphi(y))^2 = \langle \varphi(y) - \varphi(x), \varphi(y) - \varphi(x) \rangle = \|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$$

$$d(x, y)^2 = \langle y - x, y - x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle ,$$

Donc, puisque φ est une isométrie (et puisque φ préserve la norme des vecteurs) on déduit

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle ,$$

qui montre que φ préserve aussi le produit scalaire euclidien. En particulier, la famille (v_1, v_2, \dots, v_n) donnée par $v_i := \varphi(e_i)$ est une base orthonormale (pourquoi?). En utilisant la Remarque 1.2.4 on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \varphi(x) \rangle v_i = \sum_{i=1}^n \langle \varphi(e_i), \varphi(x) \rangle v_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle v_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i . \end{aligned}$$

Ceci montre que φ coïncide avec l'application linéaire f_A associée à la matrice A dont les colonnes sont v_i . Puisque la base (v_1, v_2, \dots, v_n) est orthonormale, on conclut que cette matrice est orthogonale.

Etape 2. Soit f une isométrie arbitraire, et posons $x_0 := f(0)$. Alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\varphi(x) := f(x) - x_0$ est encore une isométrie (pourquoi?). Puisque $\varphi(0) = 0$, on déduit d'après la première étape de la démonstration, que $\varphi = f_A$, où A est la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs $v_i := \varphi(e_i)$. Donc

$$f(x) = f(x) - f(0) + f(0) = \varphi(x) + f(0) = Ax + x_0 .$$

■

Définition 1.2.12 Une isométrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la forme $f(x) = Ax + x_0$ sera dite directe (ou isométrie qui préserve l'orientation de l'espace) si sa partie linéaire a cette propriété, donc si $A \in \text{SO}(n)$. Dans le cas contraire on va dire que f est indirecte (ou qu'elle change l'orientation).

1.3 L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace de dimension k . Le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^n induit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ sur E , donc on peut parler d'orthogonalité, famille orthogonale, base orthogonale, base orthonormale dans E . Remarquons qu'on ne peut pas parler de la base canonique ou de l'orientation canonique (standard) d'un tel sous-espace. On va dire que deux bases (v_1, \dots, v_k) , (w_1, \dots, w_k) de E (ou plus généralement d'un espace vectoriel réel k -dimensionnel) définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage est positif.

Théorème 1.3.1 (Gram-Schmidt) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (g_1, \dots, g_k) une base arbitraire de E . Alors il existe une unique famille $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq k}$ de nombres réels telle que la base (f_1, \dots, f_k) donnée par les relations

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 \\ f_2 &= g_2 + b_{12}f_1 \\ f_3 &= g_3 + b_{23}f_2 + b_{13}f_1 \\ &\dots \\ f_k &= g_k + \sum_{i=1}^{k-1} b_{ik}f_i , \end{aligned} \tag{4}$$

soit une base orthogonale.

L'algorithme de Gram-Schmidt consiste à déterminer (par récurrence par rapport à $i \geq 2$) la famille

$$(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{i-1,i})$$

des coefficients qui interviennent dans la décomposition de f_i , donc implicitement donne une démonstration du théorème 1.3.1. Posons $f_1 := g_1$. La condition $f_1 \perp f_2$ devient

$$0 = \langle f_1, g_2 + b_{12}f_1 \rangle = \langle f_1, g_2 \rangle + b_{12}\langle f_1, f_1 \rangle \Leftrightarrow b_{12} = -\frac{\langle f_1, g_2 \rangle_\varphi}{\langle f_1, f_1 \rangle} = -\frac{\langle f_1, g_2 \rangle}{\|f_1\|^2},$$

donc on obtient une unique solution, et f_2 est déterminé. Supposons maintenant f_1 et f_2 connus. En tenant compte que $f_1 \perp f_2$, les conditions $f_3 \perp f_1$, $f_3 \perp f_2$ deviennent

$$0 = \langle f_1, g_3 + b_{13}f_1 + b_{23}f_2 \rangle = \langle f_1, g_3 \rangle + b_{13}\langle f_1, f_1 \rangle \Leftrightarrow b_{13} = -\frac{\langle f_1, g_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} = -\frac{\langle f_1, g_3 \rangle}{\|f_1\|^2},$$

$$0 = \langle f_2, g_3 + b_{13}f_1 + b_{23}f_2 \rangle = \langle f_2, g_3 \rangle + b_{23}\langle f_2, f_2 \rangle \Leftrightarrow b_{23} = -\frac{\langle f_2, g_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} = -\frac{\langle f_2, g_3 \rangle}{\|f_2\|^2},$$

Par récurrence on obtient

$$b_{si} = -\frac{\langle f_s, g_i \rangle}{\|f_s\|^2}, \quad s \in \{1, \dots, i-1\}.$$

En utilisant le théorème 1.3.1 on obtient facilement :

Théorème 1.3.2 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (g_1, \dots, g_k) une base arbitraire de E . Alors il existe une unique matrice de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(donc une matrice triangulaire avec 1 sur la diagonale) telle que la base $(f_1, \dots, f_k) := (g_1, \dots, g_k)P$, c'est à dire la base donnée par les relations

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 \\ f_2 &= g_2 + a_{12}g_1 \\ f_3 &= g_3 + a_{23}g_2 + a_{13}g_1 \\ &\dots \\ f_k &= g_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik}g_i, \end{aligned}$$

soit orthogonale par rapport au produit scalaire induit sur E .

La matrice P sera obtenue à partir de la famille famille $(b_{ij})_{1 \leq i < j \leq k}$ par récurrence, en exprimant chaque vecteur f_i intervenant à droite dans (4) en fonction des vecteurs g_i, g_{i-1}, \dots, g_1 (en utilisant les formules précédentes).

Remarque 1.3.3 1. Pour obtenir une base orthonormée il suffit d'orthonormaliser la base orthogonale fournie par le théorème 1.3.1, donc de poser $h_i := \frac{1}{\|f_i\|_\varphi} f_i$.

2. Pour chaque $j \leq k$ les premiers j vecteurs de la base orthogonalisée (f_1, \dots, f_k) (ou de la base orthonormalisée (h_1, \dots, h_k)) engendrent le même sous-espace que les premiers j vecteurs de la base initiale (g_1, \dots, g_j) , c'est à dire :

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} \text{ on a } \text{Vect}(h_1, \dots, h_j) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_j) = \text{Vect}(g_1, \dots, g_j) \subset E.$$

En plus, les bases (h_1, \dots, h_j) , (f_1, \dots, f_j) , (g_1, \dots, g_j) définissent la même orientation de ce sous-espace. Démontrer cette affirmation.

On peut donc reformuler le théorème 1.3.2 de la manière suivante :

Corollaire 1.3.4 Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (g_1, \dots, g_k) une base arbitraire de E . Alors il existe une unique base orthonormale (h_1, \dots, h_k) de E telle que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

1. La matrice de passage de (g_1, \dots, g_k) à (h_1, \dots, h_k) est supérieure triangulaire à éléments diagonaux strictement positifs.
2. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ on a $\text{Vect}(h_1, \dots, h_j) = \text{Vect}(g_1, \dots, g_j)$ et les deux bases (h_1, \dots, h_j) , (g_1, \dots, g_j) définissent la même orientation de ce sous-espace.

Une conséquence importante du théorème 1.3.1 (ou du Corollaire 1.3.4) est

Corollaire 1.3.5 *Tout sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^n$ admet une base orthonormale.*

Ce théorème d'existence nous permet de démontrer :

Corollaire 1.3.6 *(la matrice de Gram d'un système de k -vecteurs de \mathbb{R}^n) Soit (g_1, \dots, g_k) une famille de k -vecteurs de \mathbb{R}^n . Considérons la matrice des produits scalaires $G(g_1, \dots, g_k) := (\langle g_i, g_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$. Alors on a toujours*

$$\det(G(g_1, \dots, g_k)) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si (g_1, \dots, g_k) est une famille liée (c'est à dire si et seulement si g_1, \dots, g_k sont linéairement dépendants).

Démonstration: Puisque $\dim(\text{Vect}(g_1, \dots, g_k)) \leq k$, on peut trouver un sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k tel que $\text{Vect}(g_1, \dots, g_k) \subset E$. Soit (h_1, \dots, h_k) une base orthonormale de E , par exemple la base fournie par l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à une base arbitraire. En décomposant les vecteurs g_i par rapport à cette base on obtient des formules du type

$$g_i = \sum_{s=1}^k a_{si} h_s,$$

et les coefficients a_{si} forment une matrice carrée $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$. Donc

$$\langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_{s=1}^k a_{si} h_s, \sum_{t=1}^k a_{tj} h_t \right\rangle = \sum_{s,t=1}^k a_{si} a_{tj} \langle h_s, h_t \rangle = \sum_{s,t=1}^k a_{si} a_{tj} \delta_{st} = \sum_{s=1}^k a_{si} a_{sj} = \sum_{s=1}^k (a^T)_{is} a_{sj},$$

où $(a^T)_{is}$ désigne l'élément (i, s) de la matrice transposée A^T . Ce calcul montre que $G(g_1, \dots, g_k) = A^T A$, donc $\det(G(g_1, \dots, g_k)) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\det(A) = 0$, c'est à dire si et seulement si $\text{rang}(A) < k$. Mais le rang A coïncide avec $\dim(\text{Vect}(g_1, \dots, g_k))$ (pourquoi?) donc $\text{rang}(A) < k$ si et seulement si $\dim(\text{Vect}(g_1, \dots, g_k)) < k$, soit si et seulement si la famille (g_1, \dots, g_k) est liée. ■

La matrice $G(g_1, \dots, g_k)$ (respectivement son déterminant) s'appelle *la matrice de Gram* (respectivement *le déterminant de Gram*) de la famille de vecteurs (g_1, \dots, g_k) . Pour $k = 2$ on peut démontrer facilement une interprétation géométrique intéressante du déterminant de Gram d'une paire de vecteurs.

Remarque 1.3.7 *Soit $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^n$. Alors $\det(G(g_1, g_2)) = (\text{aire}(\Pi(g_1, g_2)))^2$, où $\Pi(g_1, g_2)$ désigne le parallélogramme engendré par les deux vecteurs g_1, g_2 et qui a $0_{\mathbb{R}^n}$ comme sommet. Cette affirmation se généralise pour un système de k vecteurs en utilisant la notion de parallélépipède k -dimensionnel et volume k -dimensionnel.*

2 Courbes paramétrées dans l'espace euclidien

2.1 Courbes paramétrées. Points multiples. Points réguliers. Droite tangente. Abscisse curviligne et paramétrage normal. Longueur d'une courbe paramétrée.

Définition 2.1.1 *Une courbe paramétrée dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n est une application continue $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . Une telle courbe est dite de classe C^k si γ est de classe C^k , donc si les dérivées $\gamma^{(j)} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($1 \leq j \leq k$) existent et sont continues sur I . L'ensemble $\Gamma := \text{im}(\gamma) := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ s'appelle l'image ou le support de la courbe paramétrée γ . Si $n = 2$ on dit qu'il s'agit d'une courbe plane paramétrée.*

Dans la suite on va sous-entendre que toutes les courbes paramétrées considérées sont différentiables de classe C^∞ .

Dans les cas $n = 2$, $n = 3$ on peut interpréter une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme l'équation horaire d'un mouvement d'un mobile punctiforme dans le plan ou dans l'espace. Dans ce cas l'image $\Gamma := \text{im}(\gamma)$ est la trajectoire du mobile, la dérivée $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse au moment t , et le vecteur $\gamma''(t)$ est le vecteur accélération au moment t du mobile.

Une classe importante de courbes planes paramétrées est celle des *courbes paramétrées en coordonnées polaires*. Rappelons que les *coordonnées polaires* $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ d'un point $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sont définies par les relations

$$x_1 = \rho \cos(\theta), \quad x_2 = \rho \sin(\theta). \quad (5)$$

On a donc $\rho = \|x\|$ et, si $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, la deuxième coordonnée polaire θ sera définie modulo $2\mathbb{Z}\pi$ par (5). Par exemple, les coordonnées polaires du point $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ sont : $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ (modulo $2\mathbb{Z}\pi$). Considérons maintenant une application différentiable $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto r(\theta)$. Une telle application définit une courbe plane paramétrée, à savoir la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := \begin{pmatrix} r(\theta) \cos(\theta) \\ r(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Par convention, pour l'étude des courbes planes paramétrées, on accepte que la fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ prenne aussi des valeurs négatives. Cette courbe paramétrée s'appelle la courbe paramétrée définie en coordonnées polaires par l'équation $r = r(\theta)$ (ou la courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$). Les coordonnées polaires d'un point $\gamma(\theta) \in \text{im}(\gamma)$ sont $(r(\theta), \theta)$ si $r(\theta) \geq 0$ et $(-r(\theta), \theta + \pi)$ si $r(\theta) \leq 0$.

Exemples :

1. La droite paramétrée passant par $a \in \mathbb{R}^n$ de vecteur directeur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\gamma(t) = a + tv,$$

soit, en posant, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} :$

$$x_i(t) = a_i + tv_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Remarquer que pour $v = 0$ la même formule définit une application constante, donc une courbe paramétrée dont l'image se réduit à un point. D'après notre définition il s'agit bien d'une courbe paramétrée, bien que l'image soit un objet géométrique de dimension 0.

2. Le cercle paramétré de rayon $R > 0$ et de centre $a \in \mathbb{R}^2$ dans le plan est la courbe paramétrée plane $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + R \cos(t) \\ a_2 + R \sin(t) \end{pmatrix} = a + R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Remarquer que l'image de cette courbe paramétrée est bien le cercle

$$C(a, R) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, a) = R\}$$

et que chaque point $x \in C(a, R)$ admet une infinité dénombrable d'images inverses dans \mathbb{R} . Pourquoi ? Remarquer que, pour $a = 0$ on obtient un cercle de centre l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$. Dans ce cas la courbe paramétrée γ coïncide avec la courbe donnée en coordonnées polaires $r(\theta) = R$. Donc un cercle de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ est donné en coordonnées polaires par l'équation simple $r(\theta) = \text{constant}$.

3. L'ellipse paramétrée de centre $a \in \mathbb{R}^2$ et de demi-axes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$ est la courbe paramétrée plane $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 + \alpha_1 \cos(t) \\ a_2 + \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix} = a + \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos(t) \\ \alpha_2 \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Remarquer que l'image de cette courbe paramétrée est bien l'ellipse

$$E(a, \alpha_1, \alpha_2) := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x_1 - a_1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\alpha_2^2} = 1 \right\}.$$

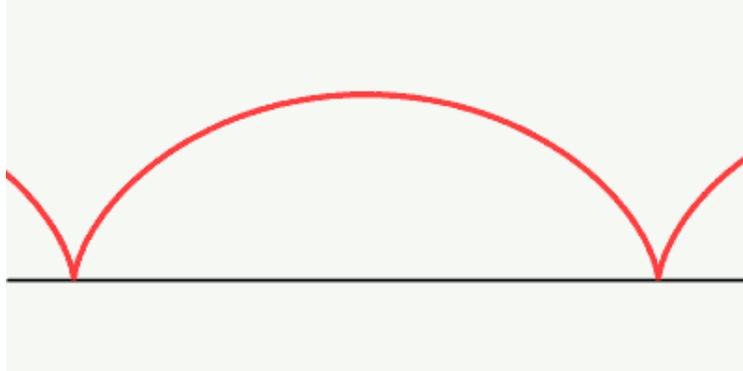
D'une manière analogue on peut définir une courbe paramétrée plane dont l'image est l'hyperbole $E(a, \alpha_1, \alpha_2)$ de centre a et demi-axes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

4. La cycloïde d'amplitude R correspond au mouvement d'un point situé sur un cercle de rayon R , fabriqué

d'un matériel rigide, qui roule sans glisser le long d'une droite. En supposant que le cercle roule sur l'axe $0x$, que la position initiale du centre est $\gamma(0) = (0, R)$ et que la vitesse de rotation du cercle est 1 rad/s , on obtient la courbe paramétrée :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R(t - \sin(t)) \\ R(1 - \cos(t)) \end{pmatrix} .$$

(voir la figure à coté). Une animation (visible si vous ouvrez le document pdf avec Acrobat Reader), qui montre



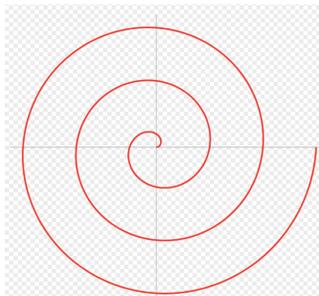
comment on l'obtient comme trajectoire du mouvement décrit antérieurement :

(voir aussi le lien http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/69/Cycloid_f.gif).

5. La spirale d'Archimède : Il s'agit du mouvement d'un mobile dans le plan, qui subit un mouvement de rotation autour d'un point $a \in \mathbb{R}^2$, mais en même temps il s'approche uniformément de ce point. Une telle courbe paramétrée sera $\gamma : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ où

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha t \cos(t) \\ \alpha t \sin(t) \end{pmatrix} .$$

Cette courbe est donnée en coordonnées polaires par l'équation $r(\theta) = \alpha\theta$.



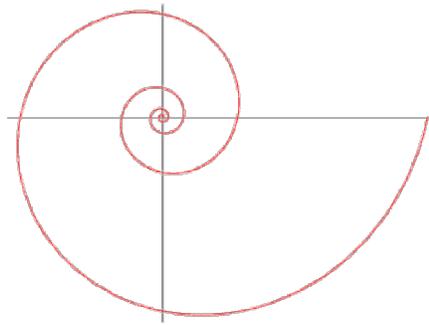
6. La spirale logarithmique. L'équation polaire de la spirale logarithmique de paramètres $(a, b) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$ est

$$r = ae^{b\theta} .$$

Il s'agit donc de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} ae^{bt} \cos(t) \\ ae^{bt} \sin(t) \end{pmatrix}$$

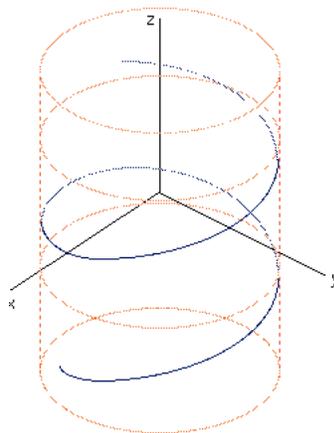
Voici un exemple :



7. Les graphes de fonctions. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de classe \mathcal{C}^∞ . Rappelons que, par définition, le graphe de f est la courbe plane $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$. Cette courbe admet un paramétrage naturel, parce que elle s'écrit naturellement comme l'image de la courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$. Cette courbe paramétrée sera appelée le paramétrage naturel du graphe de f .

8. L'hélice circulaire : décrit le mouvement (dans l'espace tridimensionnel) d'un mobile qui reste sur la surface d'un cylindre circulaire droit en subissant au même temps un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante autour de l'axe du cylindre et une translation à vitesse constante dans la direction de cette axe. Un exemple de telle courbe paramétrée est

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix}$$



Définition 2.1.2 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Un point $x \in \text{im}(\gamma)$ s'appelle point simple (respectivement multiple), si l'image inverse

$$\gamma^{-1}(x) := \{t \in I \mid \gamma(t) = x\} \subset I$$

a un seul élément (respectivement plus d'un élément). Si le cardinal de cet ensemble est 2 (respectivement 3) on va dire que x est un point double (respectivement triple). Si tous les points de $\text{im}(\gamma)$ sont simples, on dit que γ est un courbe paramétrée simple.

Exemple :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - t^2 \\ t(t-1)(t - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

Le point $0_{\mathbb{R}^2}$ est un point double de l'image $\text{im}(\gamma)$.

Définition 2.1.3 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. On dit que γ est une immersion (ou est régulière) au point $t_0 \in I$ si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Si c'est le cas, on définit la droite tangente à γ au point t_0 par :

$$\tau_{t_0}(\gamma) := \gamma(t_0) + \mathbb{R}\gamma'(t_0) .$$

Donc la droite tangente à γ en t_0 est la droite affine qui passe par $\gamma(t_0)$ d'espace directeur $\mathbb{R}\gamma'(t_0) = \text{Vect}(\gamma'(t_0))$. Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite immersion (ou régulière) si elle est immersion (régulière) en tout point $t \in I$.

Exemple : Remarquer que le paramétrage naturel du graphe d'une fonction différentiable (voir l'exemple 7) est toujours simple et régulière. Pourquoi ?

Définition 2.1.4 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée, avec $n \geq 2$. On dit que γ est bi-régulière au point $t_0 \in I$ si les vecteurs $\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)$ sont linéairement indépendants. Si c'est le cas, on définit le plan osculateur de γ au point t_0 par :

$$\pi_{t_0}(\gamma) := \gamma(t_0) + \text{Vect}(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)) .$$

Donc le plan osculateur de γ au point t_0 est le plan affine qui passe par $\gamma(t_0)$ d'espace directeur $\text{Vect}(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$.

La tangente $\tau_{t_0}(\gamma)$ et le plan osculateur $\pi_{t_0}(\gamma)$ ont des interprétations géométriques simples : la tangente $\tau_{t_0}(\gamma)$ est la limite de la droite affine $\gamma(t_0)\gamma(t)$ (pour $t \neq t_0$ suffisamment proche de t_0) quand $t \rightarrow t_0$. La condition de régularité $\gamma'(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ assure que $\gamma(t_0) \neq \gamma(t)$ si t est suffisamment proche, mais différent de t_0 . D'une manière similaire, le plan osculateur $\pi_{t_0}(\gamma)$ est limite du plan affine $\gamma(t_0)\gamma(t_1)\gamma(t_2)$ (pour $t_i \neq t_0$ suffisamment proches de t_0) quand $(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)$. La condition " $(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ sont linéairement indépendants" assure que les trois points $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ ne sont pas alignés si les t_i sont suffisamment proches de t_0 tels que $t_1 \neq t_2 \neq t_0 \neq t_1$.

Définition 2.1.5 Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles. Un changement de paramètre de J à I est une application différentiable bijective $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que φ' ne s'annule pas sur J . Cette condition implique que φ est strictement monotone et que l'application réciproque $\varphi^{-1} : I \rightarrow J$ est aussi différentiable de classe \mathcal{C}^∞ . On dit qu'un changement de paramètre $\varphi : J \rightarrow I$ préserve l'orientation si $\varphi'(t) > 0$ sur J (donc si φ est strictement croissante).

Deux courbes paramétrées $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont dites équivalentes s'il existe un changement de paramètre $\varphi : J \rightarrow I$ tel que $\lambda = \gamma \circ \varphi$. Si, en plus, φ préserve l'orientation, les deux courbes paramétrées sont dites équivalentes de même orientation.

Exercice : Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes paramétrées dans \mathbb{R}^n .

Le théorème suivant donne une interprétation géométrique simple de la relation d'équivalence dans le cas des courbes paramétrées simples régulières. On va omettre la démonstration, qui est proposée comme exercice pour les étudiants intéressés par la géométrie.

Théorème 2.1.6 Soit I, J deux intervalles compacts (donc deux intervalles de la forme $[a, b]$, où $a \leq b \in \mathbb{R}$). Alors deux courbes paramétrées simples régulières $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont équivalentes si et seulement si elles ont la même image.

Définition 2.1.7 Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite normale (ou que γ est un paramétrage normal de $\text{im}(\gamma)$) si

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I .$$

Dans ce cas on dit aussi que γ est paramétrée par la longueur de l'arc (ou par l'abscisse curviligne).

Définition 2.1.8 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée et soit $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne de centre t_0 est définie par

$$\sigma(t) := \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du .$$

L'ensemble des valeurs $J := \{\sigma(t) \mid t \in I\}$ est un intervalle de \mathbb{R} et l'application $\sigma : I \rightarrow J$ est différentiable, surjective et monotone croissante. Plus précisément on a

$$\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\| \geq 0 \quad \forall t \in I .$$

Donc, si γ est régulière, on aura $\|\gamma'(t)\| > 0$ pour tout $t \in I$, et donc σ sera un changement de paramètre de I à J qui préserve l'orientation. L'application inverse $\sigma^{-1} : J \rightarrow I$ sera un un changement de paramètre de J à I qui préserve l'orientation, donc on obtient une courbe paramétrée équivalente de même orientation $\gamma \circ \sigma^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$. La dérivée de cette courbe paramétrée est :

$$(\gamma \circ \sigma^{-1})'(s) = (\sigma^{-1})'(s)\gamma'(\sigma^{-1}(s)) = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))}\gamma'(\sigma^{-1}(s)) ,$$

donc

$$\|(\gamma \circ \sigma^{-1})'(s)\| = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} \|\gamma'(\sigma^{-1}(s))\| = \frac{1}{\|\gamma'(\sigma^{-1}(s))\|} \|\gamma'(\sigma^{-1}(s))\| = 1 ,$$

donc $\gamma \circ \sigma^{-1}$ est une courbe paramétrée normale. Nous avons démontré

Proposition 2.1.9 *Toute courbe paramétrée régulière γ est équivalente à une courbe paramétrée normale de même orientation que γ . Plus précisément, pour toute courbe paramétrée régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, la courbe $\gamma \circ \sigma^{-1}$ (ou $\sigma : I \rightarrow J$ désigne l'abscisse curviligne de centre $t_0 \in I$) est une courbe normale qui est équivalente à γ et de même orientation.*

Définition 2.1.10 *Soit $I = [a, b]$ (avec $a \leq b$) un intervalle compact et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. La longueur $l(\gamma) \in \mathbb{R}^+$ est définie par*

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt .$$

Remarque 2.1.11 1. *Deux courbes équivalentes ont la même longueur.*

2. *Si γ est normale, alors $l(\gamma) = b - a$.*

3. *L'abscisse curviligne $\sigma : I \rightarrow J$ de centre $t_0 \in I$ associée à une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ a l'interprétation géométrique suivante :*

$$\sigma(t) = \begin{cases} -l(\gamma|_{[t, t_0]}) & \text{si } t \leq t_0 \\ l(\gamma|_{[t_0, t]}) & \text{si } t \geq t_0 \end{cases} .$$

Ici on a désigné par $\gamma|_{[t, t_0]}$, $\gamma|_{[t_0, t]}$ les restrictions de γ aux sous-intervalles $[t, t_0]$, $[t_0, t]$ respectivement.

2.2 La courbure et le repère mobile de Frenet d'une courbe plane

Rappelons qu'on peut identifier le plan \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , et via cette identification, la multiplication avec i définit un automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 , à savoir l'automorphisme $R_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui correspond géométriquement à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et qui est donné dans la base canonique (et dans toute base orthonormale *directe*) par la matrice (désignée par le même symbole)

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SO}(2) .$$

Cet automorphisme a une propriété évidente très importante : pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la paire $(v, R_{\frac{\pi}{2}}v)$ est une base orthogonale *directe* de \mathbb{R}^2 , qui sera orthogormée si $\|v\| = 1$. Remarquer aussi l'identité importante

$$\langle R_{\frac{\pi}{2}}u, v \rangle = \det(u, v) , \tag{6}$$

où (u, v) désigne la matrice formée par les vecteurs colonne u et v .

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière (donc $\gamma'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $t \in I$). A tout point $t \in I$ on peut associer une base orthonormale directe $(f_1(t), f_2(t))$ de \mathbb{R}^2 en posant

$$f_1(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) , \quad f_2(t) := R_{\frac{\pi}{2}} f_1(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(t) .$$

Donc $f_1(t)$ est le vecteur tangent unitaire obtenu en normalisant le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ (donc qui a le même sens que ce vecteur) et $f_2(t)$ et le vecteur normal unitaire obtenu en appliquant la rotation $R_{\frac{\pi}{2}}$ à $f_1(t)$.

Définition 2.2.1 *La droite affine $\nu_t(\gamma) := \gamma(t) + \mathbb{R}f_2(t)$ (donc la droite affine qui passe par $\gamma(t)$ et a $\mathbb{R}f_2(t)$ comme sous-espace directeur) s'appelle la droite normale à γ au point t .*

Cette droite est la perpendiculaire à la tangente $\tau_t(\gamma)$ au point $\gamma(t)$. Nous avons obtenu donc une famille à un paramètre $(f_1(t), f_2(t))_{t \in I}$ de bases orthonormales directes, soit, en utilisant la terminologie classique utilisée en mécanique, un *repère mobile*. À tout moment $t \in I$ le premier vecteur de ce repère mobile est tangent à la courbe et le deuxième vecteur est normal à la courbe. Puisque les vecteurs d'une base orthonormale directe de \mathbb{R}^2 (considérés comme colonnes d'une matrice) forment une matrice de $\text{SO}(2)$, on obtient une application $(f_1, f_2) : I \rightarrow \text{SO}(2)$ qui est différentiable, au sens que les deux composantes $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont différentiables (ce que revient à dire que la composition $(f_1, f_2) : I \rightarrow \text{SO}(2) \hookrightarrow (\mathbb{R}^2)^2 \simeq \mathbb{R}^4$ est différentiable).

Définition 2.2.2 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière. L'application $(f_1, f_2) : I \rightarrow \text{SO}(2)$ donnée par

$$(f_1, f_2)(t) := \left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t), \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(t) \right)$$

s'appelle le repère mobile de Frenet associé à γ

Définition 2.2.3 La courbure d'une courbe plane paramétrée régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ au point $t \in I$ est le nombre réel défini par

$$\kappa_\gamma(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle f_2(t), f_1'(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \det(f_1(t), f_1'(t)) .$$

Si γ est injective, on utilise souvent la terminologie "la courbure de γ au point $\gamma(t)$ " au lieu de "la courbure de γ au point t ". Dans le cas général, un point $x \in \text{im}(\gamma)$ peut avoir plusieurs pré-images $t \in I$, et pour deux pré-images différentes on obtient en général des courbures différentes.

Proposition 2.2.4 (les formules de Frenet pour une courbe paramétrée plane). Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée plane régulière, $f = (f_1, f_2) : I \rightarrow \text{SO}(2)$ son repère mobile de Frenet et $\kappa_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa courbure. Alors pour tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \|\gamma'(t)\| \kappa_\gamma(t) f_2(t) , \\ f_2'(t) &= -\|\gamma'(t)\| \kappa_\gamma(t) f_1(t) , \end{aligned} \tag{7}$$

soit,

$$f'(t) = \|\gamma'(t)\| f(t) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_\gamma(t) \\ \kappa_\gamma(t) & 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Dans cette formule on peut omettre le paramètre t et on obtient une égalité de fonctions différentiables à valeurs dans $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$f' = \|\gamma'\| f \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_\gamma \\ \kappa_\gamma & 0 \end{pmatrix} . \tag{9}$$

Démonstration: En décomposant $f_1'(t), f_2'(t)$ par rapport à la base orthonormale $(f_1(t), f_2(t))$ on obtient (voir la remarque 1.2.4)

$$f_1'(t) = \langle f_1(t), f_1'(t) \rangle f_1(t) + \langle f_2(t), f_1'(t) \rangle f_2(t) , \quad f_2'(t) = \langle f_1(t), f_2'(t) \rangle f_1(t) + \langle f_2(t), f_2'(t) \rangle f_2(t) .$$

Par définition, on sait que $\langle f_2(t), f_1'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\| \kappa_\gamma(t)$. D'autre part, en dérivant les identités $\langle f_i(t), f_j(t) \rangle \equiv \delta_{ij}$ on obtient

$$\langle f_i'(t), f_j(t) \rangle + \langle f_i(t), f_j'(t) \rangle \equiv 0 , \quad \text{soit } \langle f_j(t), f_i'(t) \rangle + \langle f_i(t), f_j'(t) \rangle \equiv 0 .$$

donc la matrice carrée $(\langle f_j(t), f_i'(t) \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est anti-symétrique. Ceci montre que les éléments diagonaux de cette matrice sont 0, et $\langle f_1(t), f_2'(t) \rangle = -\langle f_2(t), f_1'(t) \rangle = -\|\gamma'(t)\| \kappa_\gamma(t)$. ■

Nous avons encore deux formules importantes pour le calcul de la courbure :

Proposition 2.2.5 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière. Alors

1.

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \langle R_{\frac{\pi}{2}} \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) .$$

2. Si γ est normale (c'est à dire si $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$), alors on a $|\kappa_\gamma(t)| = \|\gamma''(t)\|$ et

$$\kappa_\gamma(t) = \begin{cases} \|\gamma''(t)\| & \text{si } (\gamma'(t), \gamma''(t)) \text{ forme une base directe} \\ -\|\gamma''(t)\| & \text{si } (\gamma'(t), \gamma''(t)) \text{ forme une base indirecte} \end{cases} .$$

Démonstration: Nous avons $f_1(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t) = \frac{1}{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}} \gamma'(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} \gamma'(t)$, donc

$$f_1'(t) = -\frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{-\frac{3}{2}} (\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle) \gamma'(t) + \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma''(t) = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \gamma'(t) + \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma''(t),$$

donc

$$\det(f_1(t), f_1'(t)) = \det \left(\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t), -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \gamma'(t) + \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma''(t) \right).$$

Rappelons que le déterminant est une application multilinéaire et alternée. On obtient donc

$$\det(f_1(t), f_1'(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \det(\gamma'(t), \gamma''(t)).$$

En utilisant la formule (6) on obtient la démonstration de la première affirmation. Pour démontrer la deuxième notons que pour une courbe paramétrée normale, on a évidemment $f_1(t) = \gamma'(t)$. Pourquoi? D'autre part on a $\|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 1$; en dérivant cette formule on obtient $2\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 0$, donc l'accélération $\gamma''(t)$ est toujours orthogonale à la vitesse $\gamma'(t)$. En décomposant $\gamma''(t)$ par rapport à la base orthonormale $(f_1(t), f_2(t))$ (voir la remarque 1.2.4) on obtient :

$$f_1'(t) = \gamma''(t) = \langle \gamma''(t), f_1(t) \rangle f_1(t) + \langle \gamma''(t), f_2(t) \rangle f_2(t) = \langle \gamma''(t), f_2(t) \rangle f_2(t) = \langle f_1'(t), f_2(t) \rangle f_2(t) = \kappa_\gamma(t) f_2(t).$$

En comparant les normes, on obtient $\|\gamma''(t)\| = |\kappa_\gamma(t)|$. ■

En utilisant la proposition ci-dessus on peut montrer facilement :

Corollaire 2.2.6 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière.

1. La courbure $\kappa_\gamma(t)$ est non-nulle si et seulement si les vecteurs $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ sont linéairement indépendants. Si c'est le cas, alors le signe de la courbure est positif si la base $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est directe, et négatif si cette base est indirecte. Dans le premier cas on va dire que γ tourne à gauche en t , et dans le deuxième cas que γ tourne à droite en t .
2. Pour une courbe normale, la valeur absolue de la courbure est simplement la norme du vecteur accélération.

Pourquoi la notion de courbure est importante? La courbure d'une courbe paramétrée plane est un invariant géométrique de la courbe considérée au sens qu'elle est invariante par rapport aux deux classes d'opérations qui intuitivement, ne changent pas la forme géométrique de la courbe : composition avec les isométries directes à gauche et composition avec les changements de paramètres qui préservent l'orientation à droite. Plus précisément :

Proposition 2.2.7 Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie directe et $\varphi : J \rightarrow I$ un changement de paramètre qui préserve l'orientation. Alors, pour tout $u \in J$ on a

$$\kappa_{g \circ \gamma \circ \varphi}(u) = \kappa_\gamma(\varphi(u)).$$

2.3 L'interprétation géométrique de la courbure. Cercle osculateur

Soit Φ une courbe plane donnée par l'équation implicite $F(x_1, x_2) = 0$, où $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable de classe \mathcal{C}^∞ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Donc

$$\Phi := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) = 0 \right\} \subset U \subset \mathbb{R}^2$$

On utilise la terminologie "équation implicite", parce que les points de Φ ne sont pas donnés par une formule explicite (comme c'est le cas pour les points de l'image d'une courbe paramétrée), mais une relation entre les coordonnées. Par exemple le cercle $C(a, R)$ est défini par l'équation implicite $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - R^2 = 0$.

Soit $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée. On dit que Φ a un contact d'ordre (au moins) n avec γ au point $t_0 \in I$ si t_0 est une racine d'ordre (au moins) n de $F \circ \gamma$, c'est à dire si $(F \circ \gamma)^{(i)}(t_0) = 0$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

Proposition 2.3.1 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane régulière et soit $t_0 \in I$.

1. Si $\kappa_\gamma(t_0) \neq 0$ il existe un cercle unique $C_\gamma(t_0)$ qui a un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0 . Le rayon de ce cercle est

$$R_\gamma(t_0) = \frac{1}{|\kappa_\gamma(t_0)|} ,$$

et le centre de ce cercle se trouve sur la droite normale $\nu_{t_0}(\gamma)$ à γ au point t_0 . Plus précisément le centre $q_\gamma(t_0)$ est donné par la formule

$$q_\gamma(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa_\gamma(t_0)} f_2(t_0) .$$

2. Si $\kappa_\gamma(t_0) = 0$ la droite tangente $\tau_{t_0}(\gamma)$ à γ au point t_0 a un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0 .

Démonstration: 1. On va déterminer le centre q et le rayon R d'un cercle qui a un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0 . L'équation du cercle $C(q, R)$ de centre $q \in \mathbb{R}^2$ et rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ est $F(x) = 0$, où

$$F(x) = \langle x - q, x - q \rangle - R^2 . \quad (10)$$

Les premières deux dérivées de la composition $F \circ \gamma$ sont

$$(F \circ \gamma)'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) - q \rangle , \quad (F \circ \gamma)''(t) = 2\{\langle \gamma''(t), \gamma(t) - q \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle\} .$$

Écrivons q sous la forme

$$q = \gamma(t_0) + a_1 f_1(t_0) + a_2 f_2(t_0) ,$$

où a_1, a_2 sont les coordonnées de $q - \gamma(t_0)$ par rapport la base orthonormée $(f_1(t_0), f_2(t_0))$.

La condition que $C(q, R)$ ait un contact d'ordre (au moins) 1 avec γ en t_0 s'écrit

$$(F \circ \gamma)(t_0) = 0 \Leftrightarrow \langle \gamma(t_0) - q, \gamma(t_0) - q \rangle^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = R^2 .$$

La condition que $C(q, R)$ ait un contact d'ordre (au moins) 2 avec γ en t_0 s'écrit : $a_1^2 + a_2^2 = R^2$ et

$$(F \circ \gamma)'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) - q \rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle \|\gamma'(t_0)\| f_1(t_0), a_1 f_1(t_0) + a_2 f_2(t_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 .$$

La condition que $C(q, R)$ ait un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0 s'écrit $a_1^2 + a_2^2 = R^2$, $a_1 = 0$, et

$$(F \circ \gamma)''(t_0) = 0 \Leftrightarrow \langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) - q \rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow -\langle \gamma''(t_0), a_2 f_2(t_0) \rangle + \|\gamma'(t_0)\|^2 = 0 .$$

Mais pour $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} \langle \gamma''(t), f_2(t) \rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \gamma'(t), f_2(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (\|\gamma'(t)\| f_1(t)), f_2(t) \right\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\| \right) f_1(t) + \|\gamma'(t)\| f_1'(t), f_2(t) \right\rangle = \\ &= \langle \|\gamma'(t)\| f_1'(t), f_2(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2 \kappa_\gamma(t) . \end{aligned}$$

Conclusion : $C(q, R)$ a un contact d'ordre (au moins) 3 avec γ en t_0 si et seulement si $a_1 = 0$, $|a_2| = R$, et

$$\|\gamma'(t_0)\|^2 (-a_2 \kappa_\gamma(t_0) + 1) = 0 \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{\kappa_\gamma(t_0)} ,$$

ce qui achève la démonstration de 1.

2. Exercice. ■

Dans le cas $\kappa_\gamma(t_0) \neq 0$ le cercle $C_\gamma(t_0)$ s'appelle le *cercle osculateur* de γ en t_0 et son rayon s'appelle le rayon de courbure de γ au point t_0 . Intuitivement $C_\gamma(t_0)$ est le cercle qui "épouse cette courbe le mieux possible", donc mieux qu'un cercle tangent quelconque. Autrement dit, parmi tous les cercles qui passent par $\gamma(t_0)$, le cercle osculateur $C_\gamma(t_0)$ donne la plus fine approximation de la courbe γ au voisinage de $\gamma(t_0)$. Ce cercle osculateur peut être défini d'une manière équivalente géométriquement, en utilisant le fait (élémentaire) que trois points non alignés dans le plan déterminent un cercle. On peut montrer que, si $\kappa_\gamma(t_0) \neq 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute paire $(t_1, t_2) \in I \times I$ telle que $t_1, t_2 \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ et $t_1 \neq t_2 \neq t_0 \neq t_1$, les trois points $\gamma(t_1), \gamma(t_0), \gamma(t_2)$ sont non-alignés. Ces points vont donc déterminer un cercle, qu'on va noter $C(t_0, t_1, t_2)$.

Remarquons maintenant qu'on peut identifier l'ensemble \mathcal{C} des cercles dans le plan avec le produit cartésien $\mathbb{R}^2 \times]0, \infty[$ en utilisant la bijection $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[$ qui associe à tout cercle $C \in \mathcal{C}$ la paire $(c(C), R(C))$ formée par son centre et son rayon. En utilisant cette identification on peut donner un sens mathématique précis à la notion de limite pour les applications définies sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n (ou plus généralement sur un sous-ensemble d'un espace métrique) à valeurs dans l'ensemble \mathcal{C} des cercles dans le plan. Plus précisément, si $A \subset \mathbb{R}^n$, $a_0 \in \bar{A}$ est un point adhérent, et $C(\cdot) : A \rightarrow \mathcal{C}$ est une application, alors on va dire que $\lim_{a \rightarrow a_0} C(a) = C_0$ si $\lim_{a \rightarrow a_0} c(C(a)) = c(C_0)$ et $\lim_{a \rightarrow a_0} R(C(a)) = R(C_0)$.

Proposition 2.3.2 *Le cercle osculateur $C_\gamma(t_0)$ est la limite de $C(t_0, t_1, t_2)$ quand $(t_1, t_2) \rightarrow (t_0, t_0)$, donc la limite du cercle déterminé par $\gamma(t_0)$ et deux points $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$, où t_1, t_2 sont suffisamment proches de t_0 (mais distincts et différents de t_0), quand la paire (t_1, t_2) tend vers (t_0, t_0) .*

2.4 Le repère de Frenet et les courbures d'une courbe $(n-1)$ -régulière dans \mathbb{R}^n

Nous commençons par la

Définition 2.4.1 *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Un champ vectoriel le long de γ est une application différentiable $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un repère mobile direct le long de γ est un système (f_1, \dots, f_n) de champs vectoriels le long de γ , tel que pour $t \in I$ la famille $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ soit une base orthonormale directe de \mathbb{R}^n .*

Nous convenons de dessiner un champs vectoriel v le long de γ en appliquant pour chaque t une translation de vecteur $\gamma'(t)$, donc $v(t)$ est dessiné comme un vecteur d'origine $\gamma(t)$ et extrémité $\gamma(t) + v(t)$. D'une manière similaire, on va dessiner un repère mobile le long de γ comme un système orthonormal de n -vecteurs d'origine $\gamma(t)$.

Notons que, d'après les définitions 1.2.7 4., 1.2.9, la donnée d'un repère mobile direct le long de γ revient à la donnée d'une application différentiable $f : I \rightarrow \text{SO}(n)$. La proposition suivante nous donne l'existence et l'unicité d'un repère mobile direct associée d'une manière naturelle à courbe paramétrée dans \mathbb{R}^n qui est $(n-1)$ -régulière, notion qu'on va expliquer ci-dessous. Ce repère mobile direct naturellement associé à une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière est obtenu en imposant une condition de compatibilité entre les sous-espaces *orientés* définis par les premiers k vecteurs du repère mobile et les sous-espaces k -osculateurs *orientés* associés à γ pour $k \leq (n-1)$.

Remarquons d'abord que les notions de courbe régulière, birégulière, plan osculateur introduites antérieurement, se généralisent naturellement pour les courbes paramétrées dans \mathbb{R}^n de la manière suivante :

Définition 2.4.2 *Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite k -régulière au point $t_0 \in I$ si les premières k dérivées $\gamma'(t_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0)$ de γ au point t_0 sont linéairement indépendantes. Si c'est la cas, on définit le sous-espace affine k -osculateur à γ au point t_0 par*

$$\pi_{t_0}^k(\gamma) := \gamma(t_0) + \text{Vect}(\gamma'(t_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0)) .$$

Donc le sous-espace affine k -osculateur à γ au point t_0 est le sous-espace k -dimensionnel affine qui passe par $\gamma(t_0)$ d'espace directeur $\text{Vect}(\gamma'(t_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0))$. Une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite k -régulière si elle k -régulière en t_0 pour tout $t_0 \in I$.

Remarquons que le sous-espace 1-osculateur (respectivement le sous-espace 2-osculateur) à γ au point t_0 est juste la tangente $\tau_{t_0}(\gamma)$ (respectivement le plan osculateur $\pi_{t_0}(\gamma)$) au sens des définitions 2.1.3 et 2.1.4. Notons aussi qu'une courbe k -régulière en t_0 est l -régulière en t_0 pour tout $1 \leq l \leq k$. En plus, si γ est k -régulière en t_0 , alors pour $1 \leq l \leq k$ le sous-espace affine $\pi_{t_0}^l(\gamma)$ est muni d'une orientation naturelle, à savoir celle donnée par la base $(\gamma'(t_0), \dots, \gamma^{(l)}(t_0))$ de son espace directeur.

Proposition 2.4.3 *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière. Alors γ admet un unique repère mobile direct $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \text{SO}(n)$ satisfaisant pour tout $t \in I$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ la condition (C_k) suivante :*

$$\text{Vect}(f_1(t), \dots, f_k(t)) = \text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)) \text{ et les bases } (f_1(t), \dots, f_k(t)), (\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)) \text{ définissent la même orientation du sous-espace } \text{Vect}(f_1(t), \dots, f_k(t)) = \text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t)) . \quad (C_k)$$

Rappelons (voir la section 1.2) que, par définition, deux bases d'un espace vectoriel réel de dimension finie définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage est positif. Donc la condition (C_k) requiert que le déterminant de la matrice de passage de la base $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(k)}(t))$ à la base $(f_1(t), \dots, f_k(t))$ est positif pour $1 \leq k \leq (n-1)$. C'est très important de retenir : la condition (C_k) est requise seulement pour $1 \leq k \leq (n-1)$. Pour $k = n$ on ne peut même pas formuler cette condition, parce qu'on a supposé que γ est seulement $(n-1)$ -régulière, donc les n vecteurs $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)$ ne sont pas nécessairement libres.

Démonstration: La démonstration de l'existence d'un repère mobile direct satisfaisant les conditions (C_k) pour $1 \leq k \leq (n-1)$ constitue à la fois une méthode pour le déterminer explicitement. Cette méthode a deux étapes :

1. On orthonormalise la base $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$ en appliquant l'orthonormalisation Gram-Schmidt (voir le chapitre 1.3), et on obtient ainsi une base orthonormale $(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$ de l'hyperplan vectoriel $\text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$.

2. On pose $f_n(t) = f_1(t) \wedge \dots \wedge f_{n-1}(t)$.

En utilisant le corollaire 1.3.4 et les propriétés du produit vectoriel généralisé (voir la section 1.2) c'est facile de voir que (f_1, \dots, f_n) est bien un repère mobile direct le long de γ satisfaisant la condition (C_k) pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

L'unicité est obtenue en deux étapes. Soit (f_1, \dots, f_n) un repère mobile direct le long de γ satisfaisant (C_k) pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Premièrement, en utilisant le corollaire 1.3.4 on déduit que pour tout $t \in I$ le système $(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$ coïncide avec la base obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$. Dans une deuxième étape on utilise le fait que $f_n(t)$ doit être orthogonal à l'hyperplan $\text{Vect}(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$, ce que implique $f_n(t) = \pm f_1(t) \wedge \dots \wedge f_{n-1}(t)$. Mais, puisqu'il s'agit d'un repère mobile direct, la seule solution possible est $f_n(t) = f_1(t) \wedge \dots \wedge f_{n-1}(t)$. ■

Définition 2.4.4 *Le repère mobile direct satisfaisant les conditions (C_k) ($1 \leq k \leq n-1$) de la proposition 2.4.3 s'appelle le repère mobile de Frenet de la courbe $(n-1)$ -régulière γ .*

Remarque 2.4.5 *Dans la littérature on trouve une notion plus générale (moins restrictive) de repère mobile de Frenet, notion qui s'applique aux courbes paramétrées qui ne sont pas nécessairement $(n-1)$ -régulières. Cette notion générale ne requiert aucune condition de compatibilité d'orientation. Un repère mobile direct (f_1, \dots, f_n) le long de γ s'appelle repère mobile de Frenet de γ (au sens large) si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\gamma^{(k)}(t) \in \text{Vect}(f_1(t), \dots, f_k(t))$. Il existe des courbes paramétrées différentiables (de classe C^∞) qui n'admettent aucun repère mobile de Frenet, même au ce sens large.*

Dans la suite nous allons utiliser la notion de repère mobile de Frenet seulement pour les courbes $(n-1)$ -régulières et seulement au sens de la définition 2.4.4, donc nous allons toujours requérir les conditions (C_k) ($1 \leq k \leq n-1$) y compris les compatibilités d'orientation.

Proposition 2.4.6 *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière et $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \text{SO}(n)$ son repère mobile de Frenet. Alors en posant*

$$\omega_k(t) := \langle f_{k+1}(t), f'_k(t) \rangle \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

on a pour tout $t \in I$:

1.

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= \omega_1(t) f_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_k(t) &= -\omega_{k-1}(t) f_{k-1}(t) + \omega_k(t) f_{k+1}(t) \text{ pour } 2 \leq k \leq n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_n(t) &= -\omega_{n-1}(t) f_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

2. $\omega_j(t) > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n-2\}$.

Avant de commencer la démonstration de la proposition 2.4.6 notons que

Remarque 2.4.7 *Le système (11) formé par $(n-1)$ formules scalaires est équivalent à la formule matricielle*

$$(f'_1(t), \dots, f'_n(t)) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \Omega(t), \quad (12)$$

où $\Omega(t)$ est la matrice carrée anti-symétrique d'ordre n

$$\Omega(t) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \omega_1(t) & 0 & -\omega_2(t) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2(t) & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -\omega_{n-2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{n-2}(t) & 0 & -\omega_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

En omettant la variable t on obtient donc une égalité de fonctions $I \rightarrow (\mathbb{R}^n)^n$

$$f' = f\Omega ,$$

où à droite Ω désigne l'application $\Omega : I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ donnée par $t \mapsto \Omega(t)$.

Démonstration: (de la proposition 2.4.6). En décomposant le vecteur $f'_j(t)$ par rapport à la base orthonormale $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ on obtient d'après la remarque 1.2.4

$$f'_j(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(t) f_i(t) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1, \quad \text{où } \alpha_{ij}(t) := \langle f_i(t), f'_j(t) \rangle. \quad (13)$$

En dérivant l'identité $\langle f_i(t), f_j(t) \rangle \equiv \delta_{ij}$ on obtient

$$\langle f'_i(t), f_j(t) \rangle + \langle f_i(t), f'_j(t) \rangle \equiv 0 ,$$

donc la matrice $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ est anti-symétrique. D'autre part on sait que la famille $(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$ a été obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$, donc la matrice de passage correspondante est une matrice supérieure triangulaire à éléments diagonaux strictement positifs (voir le corollaire 1.3.4), c'est à dire

$$f_j(t) = \sum_{s=1}^j \beta_{sj}(t) \gamma^{(s)}(t) \quad \text{avec } \beta_{jj}(t) > 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1 .$$

En dérivant cette égalité d'après la règle de Leibniz et en regroupant les termes on obtient :

$$f'_j(t) = \beta_{jj}(t) \gamma^{(j+1)}(t) + \sum_{s=1}^j (\beta'_{sj}(t) + \beta_{s-1,j}(t)) \gamma^{(s)}(t) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1 . \quad (14)$$

Dans ces formules on a utilisé la convention $\beta_{0,j}(t) = 0$. Nous savons que (f_1, \dots, f_n) est un repère mobile de Frenet, donc $\gamma^{(s)}(t) \in \text{Vect}(f_1(t), \dots, f_s(t))$ pour tout $t \in I$ et $1 \leq s \leq n$. On a donc des décompositions

$$\gamma^{(s)}(t) = \sum_{l=1}^s \lambda_{ls}(t) f_l(t) \quad \text{pour } 1 \leq s \leq n . \quad (15)$$

La sous-matrice $(\lambda_{ls})_{1 \leq l, s \leq (n-1)}$ de la matrice des coefficients $(\lambda_{ls})_{1 \leq l, s \leq n}$ est précisément la matrice de passage de $(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t))$ à $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$, donc elle coïncide avec l'inverse de la matrice $(\beta_{sj})_{1 \leq s, j \leq (n-1)}$ (la matrice de passage en sens inverse). Ceci montre que

$$\lambda_{ss}(t) = \beta_{ss}(t)^{-1} > 0 \quad \text{pour } 1 \leq s \leq n-1 . \quad (16)$$

En combinant (14) et (15) on obtient

$$f'_j(t) = \beta_{jj}(t) \lambda_{j+1,j+1}(t) f_{j+1}(t) + \sum_{s=1}^j \mu_{sj}(t) f_s(t) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1 . \quad (17)$$

Mais la décomposition d'un vecteur par rapport à une base est unique ; en identifiant les coefficients intervenant dans les membres droits de (13) et (17) nous obtenons des informations supplémentaires sur la matrice anti-symétrique $(\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, à savoir

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{pour tout } i \geq j+2 , \quad (18)$$

$$\alpha_{j+1,j}(t) = \beta_{jj}(t) \lambda_{j+1,j+1}(t) = \lambda_{jj}(t)^{-1} \lambda_{j+1,j+1}(t) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-2 . \quad (19)$$

Puisque $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ est anti-symétrique, (18) implique $\alpha_{ij} = 0$ pour toute paire (i, j) telle que $|j-i| \geq 2$. En remarquant que $\omega_j(t) = \langle f_{j+1}(t), f'_j(t) \rangle = \alpha_{j+1,j}$, on conclut que la matrice des coefficients $(\alpha_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ coïncide bien avec la matrice $\Omega(t)$, donc les formules (11) sont conséquences directes de (13). Finalement les formules (19) et (16) montrent que $\omega_j(t) = \beta_{j,j}(t) \beta_{j+1,j+1}(t)^{-1} > 0$ pour $j \leq n-2$. ■

Définition 2.4.8 Les courbures de Frenet d'une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont définies par

$$\kappa_\gamma^j(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \omega_j(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle f_{j+1}(t), f'_j(t) \rangle .$$

Notons que les premières $n - 2$ courbures $\kappa_\gamma^j(t)$ ($1 \leq j \leq n - 2$) sont toujours strictement positives.

Proposition 2.4.9 (interprétation géométrique de la courbure κ_γ^{n-1}) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée $(n - 1)$ -régulière. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un hyperplan affine H tel que $\gamma(t) \in H$ pour tout $t \in I$,
2. L'hyperplan osculateur $\pi_t^{n-1}(\gamma)$ est constant par rapport à t (ne dépend pas de $t \in I$),
3. $\kappa_\gamma^{n-1}(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Démonstration: 1. \Rightarrow 2. Écrivons H sous la forme $H = x_0 + F$, où F est un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^n (l'espace directeur de H). Puisque $\gamma(t) \in H$ pour tout $t \in I$, on obtient par dérivation successive $\gamma^{(i)}(t) \in F$ pour $t \in I$ et $1 \leq i \leq n - 1$. Mais ces vecteurs sont linéairement indépendants (pourquoi?), donc $\text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)) = F$, et

$$\pi_t^{n-1}(\gamma) = \gamma(t) + \text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)) = \gamma(t) + F = H,$$

où pour la dernière égalité on a utilisé $\gamma(t) \in H$.

2. \Rightarrow 3. Supposons que $\pi_t^{n-1}(\gamma)$ est constant par rapport à t . En particulier son espace directeur

$$F := \text{Vect}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$$

est constant par rapport à t . Puisque $f_n(t)$ est orthogonal à ce hyperplan et est un vecteur unitaire, il en résulte que $f_n(t)$ est constant par rapport à t (pourquoi?). On obtient

$$\kappa_\gamma^{n-1}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \omega_{n-1}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle f_{n-1}(t), f'_n(t) \rangle = 0.$$

3. \Rightarrow 1. Si $\kappa_\gamma^{n-1}(t) = 0$ pour tout $t \in I$, alors $\omega_{n-1}(t) = 0$ pour tout $t \in I$, donc, en utilisant la dernière équation de Frenet, on obtient

$$f'_n(t) = -\omega_{n-1}(t) f_{n-1}(t) = 0,$$

ce qui montre que $f_n(t)$ est un vecteur constant. Soit v_0 ce vecteur. Fixons $t_0 \in I$ et considérons l'application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(t) = \langle v_0, \gamma(t) - \gamma(t_0) \rangle.$$

Remarquons que $\varphi(t_0) = 0$, et pour tout $t \in I$ on a $\varphi'(t) = \langle v_0, \gamma'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\| \langle f_n(t), f_1(t) \rangle = 0$. Donc φ est identiquement nulle. Mais alors pour tout $t \in I$ le point $\gamma(t)$ appartient à l'hyperplan d'équation $\langle v_0, x - \gamma(t_0) \rangle = 0$. ■

Remarque 2.4.10 Pour une courbe $(n - 1)$ -régulière normale $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a

1. $\kappa_\gamma^j(t) = \omega_j(t) := \langle f_{j+1}(t), f'_j(t) \rangle$ pour tout $t \in I$ et $1 \leq j \leq n - 1$.
2. $\kappa_\gamma^1(t) = \|f'_1(t)\|$ pour tout $t \in I$.
3. $|\kappa_\gamma^{n-1}(t)| = \|f'_n(t)\|$ pour tout $t \in I$.

Justifier les affirmations de cette remarque.

En utilisant les courbures de Frenet κ_γ^i au lieu des coefficients ω_i les formules (11) deviennent

Corollaire 2.4.11 (les formules de Frenet pour une courbe paramétrée $(n - 1)$ -régulière) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée $(n - 1)$ -régulière et $(f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \text{SO}(n)$ son repère mobile de Frenet. Alors on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= \|\gamma'(t)\| && \kappa_\gamma^1(t) f_2(t) \\ \dots & \dots && \dots \\ f'_k(t) &= \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma^{k-1}(t) f_{k-1}(t) & + & \kappa_\gamma^k(t) f_{k+1}(t) \end{pmatrix} && \text{pour } 2 \leq k \leq n - 1 \\ \dots & \dots && \dots \\ f'_n(t) &= \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma^{n-1}(t) f_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

Bien sûr, pour une courbe normale on peut omettre le facteur $\|\gamma'(t)\|$ dans ces formules.

Les courbures de Frenet sont des invariants géométriques de la courbe $(n-1)$ -régulière considérée, au sens qu'elles sont invariantes par rapport aux deux classes d'opérations qui intuitivement, ne changent pas la forme géométrique de la courbe : composition avec les isométries directes à gauche et composition avec les changements de paramètres qui préservent l'orientation à droite. Plus précisément :

Proposition 2.4.12 *Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie directe et $\varphi : J \rightarrow I$ un changement de paramètre qui préserve l'orientation. Alors, pour tout $u \in J$ et $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on a*

$$\kappa_{g \circ \gamma \circ \varphi}^j(u) = \kappa_\gamma^j(\varphi(u)) .$$

Important : les courbures sont des invariants qui nous permettent de classer les courbes paramétrées $(n-1)$ -régulières normales à compositions par les isométries directes près. Plus précisément :

Théorème 2.4.13 *(le théorème fondamental de la théorie des courbes paramétrées dans l'espace euclidien) Soit $(\kappa_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, $\kappa_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, un système des $(n-1)$ fonctions différentiables réelles sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telles que $\kappa_i(s) > 0$ pour $s \in I$ et $1 \leq i \leq n-2$. Alors*

1. *(existence d'une courbe normale de courbures prescrites) il existe une courbe paramétrée $(n-1)$ -régulière normale $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\kappa_\gamma^i(s) = \kappa_i(s) \text{ pour tout } s \in I \text{ et } 1 \leq i \leq n-1 . \quad (21)$$

2. *(unicité à isométries directes près) Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux courbes normales paramétrées $(n-1)$ -régulières satisfaisant (21), alors il existe une isométrie directe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Démonstration: La démonstration s'appuie sur la théorie des systèmes différentiels linéaires du premier ordre. L'idée de la démonstration de 1. (de l'existence) est de trouver d'abord le repère mobile de Frenet $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \text{SO}(n)$ de la courbe paramétrée cherchée, et puis la courbe même, en intégrant la fonction $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour déterminer le repère mobile de Frenet $f : I \rightarrow \text{SO}(n)$ on remarque que celui ci doit être une solution du système différentiel linéaire du premier ordre

$$(f_1'(s), \dots, f_n'(s)) = (f_1(s), \dots, f_n(s))\Omega(s) ,$$

où dans l'expression de $\Omega(s)$ on a pris $\omega_i(s) = \kappa_i(s)$ (parce qu'on cherche une courbe *normale* de courbures κ_i). Pour s'assurer qu'on obtient bien une fonction à valeurs dans $\text{SO}(n)$ on va prendre comme condition initiale (par exemple) $f(s_0) = I_n$. Pour démontrer l'unicité (à isométrie directe près) on utilise le théorème d'unicité pour le problème de Cauchy associé à un système différentiel linéaire du premier ordre. Les étudiants intéressés sont invités à donner une démonstration détaillée. ■

Dans le cas important $n = 3$ (donc le cas des courbes *gauches*³) on peut associer à toute courbe paramétrée birégulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux courbures

$$\kappa_\gamma^1 : I \rightarrow \mathbb{R}_+^* , \quad \kappa_\gamma^1(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle f_2(t), f_1'(t) \rangle , \quad \kappa_\gamma^2 : I \rightarrow \mathbb{R} , \quad \kappa_\gamma^2(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \langle f_3(t), f_2'(t) \rangle ,$$

qui s'appellent la courbure, respectivement la torsion de γ . On va utiliser les notations κ_γ , respectivement τ_γ pour la courbure, respectivement la torsion d'une courbe paramétrée birégulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Donc, pour les courbes paramétrées birégulières dans \mathbb{R}^3 les formules de Frenet deviennent :

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \|\gamma'(t)\| && \kappa_\gamma(t) f_2(t) \\ f_2'(t) &= \|\gamma'(t)\| \left(-\kappa_\gamma(t) f_1(t) && + \tau_\gamma(t) f_3(t) \right) \\ f_3'(t) &= \|\gamma'(t)\| && (-\tau_\gamma(t) f_2(t)) . \end{aligned} \quad (22)$$

Pour le calcul de la courbure et la torsion on a les formules explicites

3. Une courbe gauche est une courbe paramétrée dans l'espace 3-dimensionnel. Certains auteurs appellent courbe gauche une courbe de l'espace 3-dimensionnel qui n'est pas contenue dans un plan.

Proposition 2.4.14 *La courbure, respectivement la torsion d'une courbe paramétrée birégulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont données par les formules*

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3},$$

$$\tau_\gamma(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

Démonstration: Les formules (15) utilisées dans la démonstration de la proposition 2.4.6 deviennent pour $n = 3$

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= \lambda_{11}(t)f_1(t) \\ \gamma''(t) &= \lambda_{12}(t)f_1(t) + \lambda_{22}(t)f_2(t) \\ \gamma'''(t) &= \lambda_{13}(t)f_1(t) + \lambda_{23}(t)f_2(t) + \lambda_{33}(t)f_3(t) \end{cases}$$

Rappelons que $\lambda_{11} = \beta_{11}^{-1} > 0$ et $\lambda_{22} = \beta_{22}^{-1} > 0$. En utilisant les propriétés du produit vectoriel (voir le chapitre 1.2), les identités $\langle f_i(t), f_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ et l'égalité $f_3(t) := f_1(t) \wedge f_2(t)$ on obtient

$$\lambda_{11}(t) = \|\gamma'(t)\|, \quad \lambda_{11}(t)\lambda_{22}(t) = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|, \quad \lambda_{11}(t)\lambda_{22}(t)\lambda_{33} = \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)).$$

Donc

$$\lambda_{11}(t) = \|\gamma'(t)\|, \quad \lambda_{22}(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \lambda_{33} = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}. \quad (23)$$

Mais la démonstration de la proposition 2.4.6 montre que

$$\omega_j(t) = \beta_{jj}(t)\lambda_{j+1,j+1}(t) = \lambda_{jj}(t)^{-1}\lambda_{j+1,j+1}(t).$$

Il suffit de remplacer dans ces formules les expressions (23) trouvées pour $\lambda_{jj}(t)$ et d'écrire $\kappa_\gamma^j(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\omega_j(t)$.

■

En utilisant la proposition 2.4.9 et la remarque 2.4.10 on obtient :

Proposition 2.4.15 *Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ paramétrée birégulière. Alors*

1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe un plan affine H tel que $\gamma(t) \in H$ pour tout $t \in I$,*
- (b) *Le plan osculateur $\pi_t^2(\gamma)$ est constant par rapport à t (ne dépend pas de $t \in I$),*
- (c) *$\tau_\gamma(t) = 0$ pour tout $t \in I$.*

2. *Si γ est normale on a*

$$\kappa_\gamma(t) = \|f_1'(t)\|, \quad |\tau_\gamma(t)| = \|f_3'(t)\| \text{ pour tout } t \in I. \quad (24)$$

3 Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3

3.1 Rappel sur la différentiabilité

Rappelons qu'un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(u, \epsilon) \subset U$, où $B(u, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre u et rayon ϵ par rapport à la distance euclidienne standard. Rappelons aussi que la différentielle en $u \in U$ d'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en $u \in U$ est (par définition) l'application linéaire $d_u f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaisant la condition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(u+h) - f(u) - d_u f(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Si f est différentiable en $u \in U$, alors toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

en u existent, et la différentielle $d_u f$ de f en u est juste l'application linéaire associée à la matrice

$$J_u f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

appelée *la matrice jacobienne* de f en u . On va utiliser souvent la notation $\partial_j f(u)$ pour la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$ en u . Puisque les colonnes de $J_u f$ sont les dérivées partielles $\partial_j f(u)$ on obtient

$$d_u f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n h_j \partial_j f(u),$$

en particulier, pour $1 \leq j \leq n$, on a

$$\partial_j f(u) = d_u f(e_j),$$

donc la dérivée partielle $\partial_j f(u)$ est juste l'image par $d_u f$ du j -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Dans la cas particulier d'une application à valeurs scalaires (donc dans la cas $m = 1$) on peut écrire

$$d_u f(h) = \langle \nabla_u f, h \rangle$$

où

$$\nabla_u f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix} = (J_u f)^T$$

désigne le vecteur gradient de f au point u .

Rappelons aussi que, si $m = n$, alors $J_u f$ est une matrice carrée, et son déterminant $j_u f := \det(J_u f)$ s'appelle *le jacobien* de f en u .

Soient U, V deux sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n . Une application $\phi : V \rightarrow U$ est dite *difféomorphisme* de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) si elle est bijective (donc inversible) différentiable, et l'application réciproque $\phi^{-1} : U \rightarrow V$ est aussi différentiable de classe \mathcal{C}^k . D'après le théorème d'inversion locale pour qu'une application *bijective* de classe \mathcal{C}^k $\phi : V \rightarrow U$ soit un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k il faut et il suffit que l'application linéaire $d_v \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit un isomorphisme linéaire pour tout $v \in V$, soit (condition équivalente) que la matrice jacobienne $J_v \phi$ soit inversible (c'est à dire $j_v(\phi) \neq 0$) pour tout $v \in V$. Si c'est le cas, alors la différentielle (respectivement la matrice jacobienne) de l'application réciproque ϕ^{-1} peut être calculée avec la formule $d_u(\phi^{-1}) = [d_{\phi^{-1}(u)}(\phi)]^{-1}$ (respectivement $J_u(\phi^{-1}) = [J_{\phi^{-1}(u)}(\phi)]^{-1}$). On dit qu'un difféomorphisme $\phi : V \rightarrow U$ *préserve l'orientation* si $j_v \phi > 0$ pour tout $v \in V$.

Dans la suite, dans ce chapitre, la notion "différentiable" va toujours signifier "différentiable de classe \mathcal{C}^∞ ", donc on va supposer que toutes les dérivées partielles d'ordre arbitraire des applications considérées existent et sont continues sur leur domaine de définition.

3.2 Surfaces paramétrées. Plan tangent. Changement de variables. Champs vectoriels le long d'une surface paramétrée.

Nous commençons par la définition

Définition 3.2.1 Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble ouvert. Une application différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sera dite *régulière* en $u = (u_1, u_2) \in U$ (ou *immersion* en u) si sa différentielle $d_u f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective; elle sera dite *régulière* (ou *immersion*) si elle est régulière (immersion) en tout point $u \in U$.

Définition 3.2.2 Une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 est une application différentiable régulière (donc une immersion) $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, où $U \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert. Pour une telle application on définit le plan tangent de f en $u \in U$ par

$$T_u f := \text{im}(d_u f) = \{d_u f(h) \mid h \in \mathbb{R}^2\} = \left\{ h_1 \partial_1 f(u) + h_2 \partial_2 f(u) \mid h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u)).$$

En notant $S := \text{im}(f)$ (qui est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3) on va dire aussi que f est une paramétrisation de S . Remarquer que, par définition, $T_u f$ est un sous-espace *vectoriel* de \mathbb{R}^3 . La notion intuitive de plan tangent à l'image $\text{im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ en $f(u)$ correspond au sous-espace *affine* $f(u) + T_u(f)$, qui est le plan affine d'espace directeur $T_u f$ qui passe par $f(u)$. En géométrie différentielle c'est important d'avoir une structure d'espace vectoriel sur les espaces tangents, ce qui explique notre convention. Remarquer que le plan vectoriel $T_u f$ s'identifie naturellement (en utilisant la translation de vecteur $f(u)$) au plan affine $f(u) + T_u f$ qui sera appelé *le plan tangent affine de f en u_0* .

Exemple : L'application $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \end{pmatrix}$$

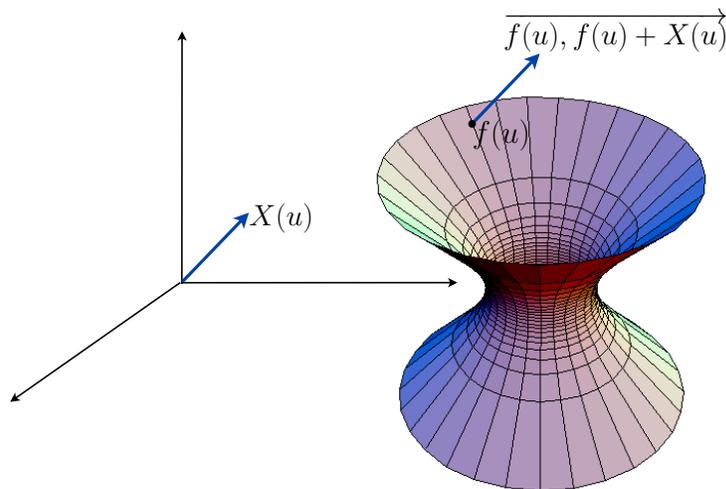
est une paramétrisation de l'hémisphère supérieure de la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ de centre $0_{\mathbb{R}^3}$ et rayon 1. Nous avons $\partial_1 f(0_{\mathbb{R}^2}) = e_1$, $\partial_2 f(0_{\mathbb{R}^2}) = e_2$, donc le plan tangent $T_{0_{\mathbb{R}^2}} f$ est le plan horizontal vectoriel $\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \mathbb{R}^3$ (soit le plan vectoriel d'équation $x_3 = 0$). D'autre part le plan tangent à la sphère $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (au "pole nord" de la sphère) est le plan affine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Vect}(e_1, e_2)$, donc le plan affine d'équation $x_3 = 1$.

Définition 3.2.3 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 . Un changement de variables de f est un difféomorphisme $\phi : V \rightarrow U$, où $V \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert. On va dire alors que f et $\tilde{f} := f \circ \phi$ sont reliées par le changement de variables ϕ .

Définition 3.2.4 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 . Un champ vectoriel le long de f est une application différentiable $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Un champ vectoriel X le long de f est dit

1. *tangent*, si $X(u) \in T_u f$ pour tout $u \in U$,
2. *normal*, si $X(u) \perp T_u f$ pour tout $u \in U$.

Un champ vectoriel $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ le long de $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définit pour chaque $u \in U$ un vecteur $\overrightarrow{f(u), f(u) + X(u)}$ d'origine $f(u)$ et sommet $f(u) + X(u)$ (donc obtenu en appliquant la translation de vecteur $f(u)$ à $X(u)$). C'est cette famille de vecteurs qui correspond à la notion intuitive de champ vectoriel le long de la surface paramétrée f . Notre convention simplifie le formalisme, parce qu'on travaille seulement avec les vecteurs de \mathbb{R}^3 qui sont éléments de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , donc vecteurs d'origine $0_{\mathbb{R}^3}$.



Puisque $\partial_j f(u) = d_u(e_j)$ il en résulte que les deux dérivées partielles $\partial_j f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont évidemment des champs vectoriels tangents le long de f . Plus précisément, pour tout $u \in U$ la paire $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ est une base de $T_u f$ parce que ces vecteurs sont les images de $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire injective $d_u f$. Il en

résulte que tout vecteur tangent $\xi \in T_u f$ se décompose d'une manière unique comme $\xi = \xi_1 \partial_1 f(u) + \xi_2 \partial_2 f(u)$. Si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ tangent le long de f on obtient pour tout $u \in U$ une décomposition de la forme

$$X(u) = \xi_1(u) \partial_1 f(u) + \xi_2(u) \partial_2 f(u) , \quad (25)$$

pour deux applications $\xi_1, \xi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$. C'est important de remarquer que la différentiabilité de $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ implique la différentiabilité des deux applications $\xi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$:

Proposition 3.2.5 *Si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ tangent le long de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ alors les applications $\xi_1, \xi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ définies par la décomposition (25) sont différentiables.*

Démonstration: En appliquant $\langle \cdot, \partial_1 f(u) \rangle$ et $\langle \cdot, \partial_2 f(u) \rangle$ à (25) on obtient

$$\begin{cases} \xi_1(u) \langle \partial_1 f(u), \partial_1 f(u) \rangle + \xi_2(u) \langle \partial_2 f(u), \partial_1 f(u) \rangle &= \langle X(u), \partial_1 f(u) \rangle \\ \xi_1(u) \langle \partial_1 f(u), \partial_2 f(u) \rangle + \xi_2(u) \langle \partial_2 f(u), \partial_2 f(u) \rangle &= \langle X(u), \partial_2 f(u) \rangle \end{cases} ,$$

donc $(\xi_1(u), \xi_2(u))$ est la solution du système linéaire associé à la matrice de Gram $G(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ (voir le chapitre 1.3) et aux seconds membres $\langle X(u), \partial_1 f(u) \rangle, \langle X(u), \partial_2 f(u) \rangle$. Mais $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ est libre, donc $\det(G(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))) > 0$ d'après le corollaire 1.3.6. En particulier le déterminant de ce système linéaire est non nul, donc la solution $(\xi_1(u), \xi_2(u))$ est donnée par les formules de Cramer. Les formules obtenues pour $\xi_i(u)$ sont des expressions rationnelles en $\langle \partial_i f(u), \partial_j f(u) \rangle, \langle X(u), \partial_i f(u) \rangle$, donc différentiables par rapport à u , parce que les applications $\partial_i f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont différentiables par hypothèse. ■

Remarquons que pour tout $u \in U$ le vecteur $n(u) := \frac{1}{\|\partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u)\|} \partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u)$ est normal à $T_u f$ (voir les propriétés du produit vectoriel, chapitre 1.2) et unitaire. En laissant varier u dans cette formule on obtient un champ vectoriel normal le long de f .

Définition 3.2.6 *Le champ vectoriel $n := \frac{1}{\|\partial_1 f \wedge \partial_2 f\|} \partial_1 f \wedge \partial_2 f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'appelle le champ normal unitaire standard (ou le champ normal de Gauss) de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$. Le repère mobile $(\partial_1 f, \partial_2 f, n) : U \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$ s'appelle le repère mobile de Gauss de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Notons que, en général, le repère mobile de Gauss n'est pas orthonormal. En effet, on a bien $\|n(u)\| \equiv 1$ et $n(u) \perp T_u f$, mais, en général, la base $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ n'est pas une base orthonormale du plan tangent $T_u f$.

On va finir le chapitre avec une formule qui calcule l'aire de l'image d'une immersion injective :

Proposition 3.2.7 *(l'aire d'une surface paramétrée). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée définie par une immersion injective f . Alors l'aire de l'image $S := \text{im}(f)$ est donnée par la formule*

$$A(S) = \int_U \|\partial_1 f(u_1, u_2) \wedge \partial_2 f(u_1, u_2)\| du_1 du_2 .$$

Dans cette formule la norme $\|\partial_1 f(u_1, u_2) \wedge \partial_2 f(u_1, u_2)\|$ représente géométriquement l'aire du parallélogramme (contenu dans le plan tangent $T_u f$) engendré par les dérivées partielles $\partial_1 f(u_1, u_2), \partial_2 f(u_1, u_2)$. Notons que cet intégrale peut être infinie. Dans les applications on a souvent une immersion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas nécessairement injective, mais on nous demande l'aire de l'image $f(K)$ pour un sous-ensemble compact (ou plus généralement mesurable) $K \subset U$ sur lequel f est injective. Alors on va utiliser la même formule, en intégrant sur K ; l'intégrale obtenue sera finie si K est compact.

3.3 La première forme fondamentale d'une surface paramétrée

Nous commençons par un

Rappel sur les formes bilinéaires : Soit T un espace vectoriel réel de dimension finie n . Une forme bilinéaire sur T est une application $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ qui est linéaire par rapport à chaque argument.

Si (v_1, \dots, v_n) est une base de T et $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, alors la formule $\phi_{ij} := \phi(v_i, v_j)$ définit une matrice carrée $\Phi \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, appelée la matrice de ϕ (ou la matrice des coefficients de ϕ) dans la base (v_1, \dots, v_n) . Le rang de cette matrice est indépendant de la base choisie et s'appelle le rang de ϕ . Pour deux vecteurs $x = \sum_i \xi_i v_i, y = \sum_j \eta_j v_j$ on obtient

$$\phi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \phi(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^n \phi_{ij} \xi_i \eta_j .$$

Soit (v'_1, \dots, v'_n) une autre base de T et P la matrice de passage de la base (v_1, \dots, v_n) à la base (v'_1, \dots, v'_n) , donc

$$v'_j = \sum_i p_{ij} v_i, \text{ soit } (v'_1, \dots, v'_n) = (v_1, \dots, v_n)P.$$

Alors la matrice Φ' de ϕ dans la nouvelle base (v'_1, \dots, v'_n) est donnée par

$$\phi'_{ij} := \phi(v'_i, v'_j) = \phi\left(\sum_s p_{si} v_s, \sum_t p_{tj} v_t\right) = \sum_{s,t} p_{si} p_{tj} \phi(v_s, v_t) = \sum_{s,t} p_{si} p_{tj} \phi_{st}. \quad (26)$$

Notons par P^T la matrice transposée de P et par p_{is}^T l'élément d'indices (i, s) de cette matrice. On obtient $\phi'_{ij} = \sum_{s,t} p_{is}^T \phi_{st} p_{tj} = (P^T \Phi P)_{ij}$, donc l'égalité matricielle

$$\Phi' = P^T \Phi P. \quad (27)$$

Une forme bilinéaire $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *symétrique* si $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ pour tous $x, y \in T$. C'est facile de vérifier que ϕ est symétrique si et seulement si la matrice des coefficients de ϕ dans une base arbitraire est symétrique.

Définition 3.3.1 Une forme bilinéaire symétrique $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *définie positive* (ou *produit scalaire sur T*) si $\phi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in T$ et $\phi(x, x) = 0$ seulement pour $x = 0_T$. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie T muni d'un produit scalaire.

Si $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, alors l'application $q_\phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $q_\phi(x) := \phi(x, x)$ s'appelle la forme quadratique associée ϕ . On a alors l'identité

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q_\phi(x + y) - q_\phi(x) - q_\phi(y)),$$

qui montre qu'une forme bilinéaire symétrique est déterminée par la forme quadratique associée.

Toute forme bilinéaire symétrique $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ peut être *réduite* à une forme diagonale avec éléments diagonaux ± 1 . Plus précisément il existe une base (v_1, \dots, v_n) de T telle que

$$\phi\left(\sum_i \xi_i v_i, \sum_j \eta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^p \xi_i \eta_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} \xi_j \eta_j.$$

Dans une telle base la forme quadratique q_ϕ se réduit à

$$q_\phi\left(\sum_i \xi_i v_i\right) = \sum_{i=1}^p \xi_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} \xi_j^2.$$

On a évidemment $p + q = \text{rang}(\phi)$. D'après le théorème d'inertie de Sylvester la paire (p, q) est indépendante de la base choisie (dans laquelle ϕ a une forme réduite); cette paire s'appelle la signature de ϕ (ou de la forme quadratique q_ϕ). Remarque qu'une forme bilinéaire symétrique sur un espace n -dimensionnel est définie positive si et seulement si sa signature est $(n, 0)$.

Soit $l : S \rightarrow T$ une application linéaire et $\phi : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur T . Alors la formule

$$\psi(u, v) := \phi(l(u), l(v))$$

définit une forme bilinéaire symétrique sur S , qui s'appelle la forme induite par ϕ sur S via l . Remarquons que cette forme est définie positive si ϕ est définie positive et l est injective. Pourquoi la condition d'injectivité est nécessaire?

Revenons maintenant aux surfaces paramétrées.

Définition 3.3.2 La première forme fondamentale de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la forme bilinéaire symétrique $g_u : T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_u(x, y) = \langle x, y \rangle$, donc est la forme bilinéaire symétrique induite sur le plan vectoriel $T_u f \subset \mathbb{R}^3$ par le produit euclidien standard sur \mathbb{R}^3 .

Nous savons que $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ est une base de $T_u f$, donc c'est naturel de considérer la matrice de g_u dans cette base. On pose donc

$$g_{ij}(u) := g_u(\partial_i f(u), \partial_j f(u)) = \langle \partial_i f(u), \partial_j f(u) \rangle . \quad (28)$$

Pour chaque paire (i, j) l'application $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ est évidemment différentiable ; on obtient donc une application différentiable $\mathbf{G} : U \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})_{\text{sym}}$ dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2, donnée par

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix} .$$

Remarquer que, en utilisant la terminologie introduite dans le chapitre 1.3

Remarque 3.3.3 *La matrice $\mathbf{G}(u)$ est la matrice de Gram de la famille de vecteurs $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$.*

Soient ξ et $\eta \in T_u f$ qu'on décompose en $\xi = \xi_1 \partial_1 f(u) + \xi_2 \partial_2 f(u)$, $\eta = \eta_1 \partial_1 f(u) + \eta_2 \partial_2 f(u)$; on obtient

$$g_u(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u) \xi_i \eta_j . \quad (29)$$

Conclusion : Déterminer la première forme fondamentale d'une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ revient à déterminer, pour chaque $u \in U$, la matrice carrée symétrique $\mathbf{G}(u) = (g_{ij}(u))_{1 \leq i, j \leq 2}$.

La première forme fondamentale d'une surface paramétrée est invariante par rapport à la compositions avec les isométries de l'espace et les changements de variable. Plus précisément :

Proposition 3.3.4 *(propriétés d'invariance de la première forme fondamentale) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée*

1. *Soit $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $b(x) = Ax + x_0$ une isométrie, où $A \in O(3)$. Alors $\tilde{f} := b \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est aussi une surface paramétrée et, en désignant par g_u, \tilde{g}_u la première forme fondamentale en u de f et \tilde{f} respectivement, on a pour tout $u \in U$*

(a)

$$T_u \tilde{f} = AT_u f ,$$

(b)

$$\tilde{g}_u(A\xi, A\eta) = g_u(\xi, \eta) \quad \text{pour tous } \xi, \eta \in T_u f ,$$

(c)

$$\tilde{g}_{ij}(u) = g_{ij}(u) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 2 , \quad \text{soit } \tilde{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{G}(u) .$$

2. *Soit $\phi : V \rightarrow U$ un changement de variable (donc un difféomorphisme). Alors $\tilde{f} := f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ est aussi une surface paramétrée et, en désignant par g_u, \tilde{g}_v la première forme fondamentale de f, \tilde{f} en $u \in U$ et $v \in V$ respectivement, on a pour tout $v \in V$*

(a)

$$T_{\phi(v)} f = T_v \tilde{f} ,$$

(b)

$$g_{\phi(v)} = \tilde{g}_v ,$$

(c)

$$\tilde{\mathbf{G}}(v) = (J_v \phi)^T \mathbf{G}(\phi(v)) J_v \phi ,$$

soit

$$\tilde{g}_{ij}(v) = \sum_{s,t=1}^2 \partial_i \phi_s(v) \partial_j \phi_t(v) g_{st}(\phi(v)) , \quad (30)$$

Avant de commencer la démonstration, remarquons qu'on peut écrire les formules compliquées (30) dans une forme moins précise mais plus simple. Posons $u := \phi(v)$ et notons la dérivée partielle $\partial_i \phi_s(v)$ par $\frac{\partial u_s}{\partial v_i}$ (notation traditionnelle pour les dérivées partielles). Alors (30) devient

$$\tilde{g}_{ij}(v) = \sum_{s,t=1}^2 \frac{\partial u_s}{\partial v_i} \frac{\partial u_t}{\partial v_j} g_{st}(u) . \quad (31)$$

Démonstration: 1. La règle de dérivation des applications composées donne

$$d_u \tilde{f} = (d_{f(u)} b) \circ d_u f = A d_u f ,$$

où l'expression $A d_u f$ signifie la composition de l'application linéaire associée à A (désignée ici par le même symbole A) avec la différentielle $d_u f$. Ceci démontre (a). L'affirmation (b) résulte directement de (a) et des propriétés connues des matrices orthogonales (voir 1.2.7 6). Pour montrer (c) nous utilisons la définition des coefficients de la première forme fondamentale :

$$\tilde{g}_{ij}(u) = \langle \partial_i \tilde{f}(u), \partial_j \tilde{f}(u) \rangle = \langle A \partial_i f(u), A \partial_j f(u) \rangle = \langle \partial_i f(u), \partial_j f(u) \rangle .$$

2. La règle de dérivation des applications composées donne

$$d_v \tilde{f} = d_{\phi(v)} f \circ d_v \phi . \quad (32)$$

Mais $d_v \phi$ est un isomorphisme linéaire, $\text{im}(d_v \tilde{f}) = \text{im}(d_{\phi(v)} f)$, ce que démontre (a). L'affirmation (b) est une conséquence directe de (a). Pour (c) notons que (32) est équivalente à

$$\partial_i \tilde{f}(v) = \sum_{s=1}^2 \partial_i \phi_s(v) \partial_s f(\phi(v)) \quad 1 \leq i, j \leq 2 , \quad (33)$$

et (c) résulte immédiatement de la règle générale de transformation des coefficients d'une forme bilinéaire suite à un changement de base (voir les formules (26), (27)). ■

Notons que (33) peut être écrite sous une forme plus simple, mais moins précise : utilisons les notations classiques pour les applications (qui, intuitivement peuvent être regardées comme correspondances entre variables) donc écrivons f sous la forme $x = x(u)$ (où $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in U$), \tilde{f} sous la forme $x = x(v)$ ($x \in \mathbb{R}^3$, $v \in V$), et ϕ sous la forme $u = u(v)$. Alors les formules (33) deviennent

$$\frac{\partial x}{\partial v_i} = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u_s}{\partial v_i} \frac{\partial x}{\partial u_s} .$$

3.4 La seconde forme fondamentale d'une surface paramétrée

Pour une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ nous avons introduit le champ normal unitaire n . Puisque $\|n(u)\| = 1$ pour tout $u \in U$, la correspondance $u \mapsto n(u)$ définit une application $N : U \rightarrow S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \subset \mathbb{R}^3$ à valeurs dans la sphère standard $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$, qui s'appelle *l'application de Gauss de f* . Donc $n = \iota \circ N$, où $\iota : S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ désigne l'application d'inclusion.

Remarque 3.4.1 Pour tout $u \in U$ l'image de la différentielle $d_u n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est contenue dans le plan tangent $T_u f$, c'est à dire $\text{im}(d_u n) \subset T_u f$.

Démonstration: On a

$$\text{im}(d_u n) = d_u n(\mathbb{R}^2) = d_u n(\text{Vect}(e_1, e_2)) = \text{Vect}(d_u n(e_1), d_u n(e_2)) = \text{Vect}(\partial_1 n(u), \partial_2 n(u)) ,$$

donc il suffit de montrer que $\partial_i n(u) \in T_u f$. Mais en dérivant par rapport à u_i l'identité

$$\langle n(u), n(u) \rangle \equiv 1 ,$$

on obtient

$$\langle \partial_i n(u), n(u) \rangle \equiv 0 ,$$

donc $\partial_i n(u)$ appartient au supplémentaire orthogonal de $n(u)$, qui est bien-évidemment le plan $T_u f$. ■

Puisque $n(u) \perp T_u f = \text{Vect}(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ on a pour tout $u \in U$ l'égalité

$$\langle n(u), \partial_j f(u) \rangle \equiv 0 .$$

en dérivant cette égalité par rapport à u_i on obtient

$$\langle \partial_i n(u), \partial_j f(u) \rangle + \langle n(u), \partial_{ij} f(u) \rangle \equiv 0 ,$$

où $\partial_{ij} f(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u)$ désigne la dérivée partielle seconde de f par rapport à (u_i, u_j) . On obtient donc la formule importante

$$-\langle \partial_i n(u), \partial_j f(u) \rangle = \langle n(u), \partial_{ij} f(u) \rangle \text{ pour tout } u \in U . \quad (34)$$

Définition 3.4.2 La seconde forme fondamentale en u de la surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la forme bilinéaire symétrique $h_u : T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h_u(\xi, \eta) = -\langle d_u n((d_u f)^{-1}(\xi)), \eta \rangle .$$

La formule de définition de h_u est évidemment bilinéaire, mais la propriété de symétrie n'est pas du tout évidente.

Proposition 3.4.3 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, et $h_u : T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}$ sa seconde forme fondamentale en $u \in U$. Alors

1. Les coefficients $h_{ij}(u)$ de h_u dans la base $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ sont donnés par les formules

$$h_{ij}(u) = -\langle \partial_i n(u), \partial_j f(u) \rangle = \langle n(u), \partial_{ij} f(u) \rangle . \quad (35)$$

2. h_u est une forme bilinéaire symétrique.

Démonstration: Par définition les coefficients $h_{ij}(u)$ de h_u dans la base $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$ sont $h_{ij}(u) := h_u(\partial_i f(u), \partial_j f(u))$. En utilisant la définition de h_u et (34) on obtient

$$\begin{aligned} h_{ij}(u) &:= -\langle d_u n((d_u f)^{-1}(\partial_i f(u))), \partial_j f(u) \rangle = -\langle d_u n((d_u f)^{-1}(d_u f(e_i))), \partial_j f(u) \rangle = \\ &= -\langle d_u n(e_i), \partial_j f(u) \rangle = -\langle \partial_i n(u), \partial_j f(u) \rangle = \langle n(u), \partial_{ij} f(u) \rangle . \end{aligned}$$

Rappelons que $\partial_{ij} f(u) = \partial_{ji} f(u)$ par le théorème de Schwartz sur la symétrie des dérivées partielles d'ordre 2 (Énoncer ce théorème en précisant les hypothèses minimales sur la régularité de f qui impliquent cette propriété de symétrie). On a donc bien $h_{ij}(u) = h_{ji}(u)$. \blacksquare

La matrice des coefficients de la seconde forme fondamentale de f en u est donc la matrice symétrique

$$\mathbf{H}(u) = \begin{pmatrix} h_{11}(u) & h_{12}(u) \\ h_{21}(u) & h_{22}(u) \end{pmatrix} .$$

où $h_{ij}(u)$ sont donnés par (35). Soit $\xi, \eta \in T_u f$. En le décomposant sous la forme $\xi = \xi_1 \partial_1 f(u) + \xi_2 \partial_2 f(u)$, $\eta = \eta_1 \partial_1 f(u) + \eta_2 \partial_2 f(u)$ on obtient

$$h_u(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij}(u) \xi_i \eta_j . \quad (36)$$

Conclusion : Déterminer la seconde forme fondamentale d'une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ revient à déterminer, pour chaque $u \in U$, la matrice carrée symétrique $\mathbf{H}(u) = (h_{ij}(u))_{1 \leq i,j \leq 2}$.

Définition 3.4.4 L'endomorphisme de Weingarten de f en $u \in U$ est l'endomorphisme $l_u : T_u f \rightarrow T_u f$ défini par

$$l_u := -d_u n \circ (d_u f)^{-1} : T_u f \rightarrow T_u f .$$

Remarque 3.4.5 Notons que, par définition, on a évidemment $h_u(\xi, \eta) = g_u(l_u(\xi), \eta)$.

Soit $\mathbf{L}(u) := (l_{ij}(u))_{1 \leq i,j \leq 2}$ la matrice de l_u dans la base $(\partial_1 f(u), \partial_2 f(u))$, donc

$$l_u(\partial_j f(u)) = \sum_{i=1}^2 l_{ij}(u) \partial_i f(u) .$$

La remarque 3.4.5 montre que

$$h_{ij}(u) = \sum_{s=1}^2 l_{si}(u) g_{sj}(u) \quad (37)$$

(pourquoi?), donc $\mathbf{H}(u) = \mathbf{L}(u)^T \mathbf{G}(u)$. Puisque $\mathbf{G}(u), \mathbf{H}(u)$ sont symétriques, on obtient $\mathbf{H}(u) = \mathbf{G}(u) \mathbf{L}(u)$, donc

$$\mathbf{L}(u) = \mathbf{G}(u)^{-1} \mathbf{H}(u) . \quad (38)$$

La seconde forme fondamentale a aussi des propriétés d'invariance similaires à celles de la première forme fondamentale (voir la proposition 3.3.4), mais seulement par rapport à la composition avec les isométries de l'espace et avec les changements de variable *qui préservent l'orientation*. L'explication est simple : la définition du champ normal unitaire n qui intervient dans la définition de h_u , utilise le produit vectoriel, qui est $\text{SO}(3)$ -invariant, mais pas $\text{O}(3)$ -invariant. Les étudiants intéressés sont invités à énoncer et démontrer les formules d'invariance correctes par rapport aux isométries et changements de variable qui ne préservent pas l'orientation.

Proposition 3.4.6 (propriétés d'invariance de la seconde forme fondamentale) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée

1. Soit $b : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $b(x) = Ax + x_0$ une isométrie directe, où $A \in \text{SO}(3)$, $\tilde{f} := b \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, et soient h_u , \tilde{g}_u la seconde forme fondamentale en u de f et \tilde{f} respectivement. Alors pour tout $u \in U$ on a

$$(a) \quad \tilde{h}_u(A\xi, A\eta) = h_u(\xi, \eta) \quad \text{pour tous } \xi, \eta \in T_u f ,$$

$$(b) \quad \tilde{h}_{ij}(u) = h_{ij}(u) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 2 , \quad \text{soit } \tilde{\mathbf{H}}(u) = \mathbf{H}(u) .$$

2. Soit $\phi : V \rightarrow U$ un changement de variable (donc un difféomorphisme) qui préserve l'orientation, et posons $\tilde{f} := f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$. Soient $n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{n} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ les champs normaux unitaires de f et \tilde{f} , et soient h_u , \tilde{h}_v la seconde forme fondamentale de f , \tilde{f} en $u \in U$ et $v \in V$ respectivement. Alors pour tout $v \in V$ on a

$$(a) \quad n(\phi(v)) = \tilde{n}(v) ,$$

$$(b) \quad h_{\phi(v)} = \tilde{h}_v ,$$

$$(c) \quad \tilde{\mathbf{H}}(v) = (J_v \phi)^T \mathbf{H}(\phi(v)) J_v \phi ,$$

soit

$$\tilde{h}_{ij}(v) = \sum_{s,t=1}^2 \partial_i \phi_s(v) \partial_j \phi_t(v) h_{st}(\phi(v)) . \quad (39)$$

Comme pour la première forme fondamentale, remarquons que la formule (39) peut être écrite sous la forme plus simple :

$$\tilde{h}_{ij}(v) = \sum_{s,t=1}^2 \frac{\partial u_s}{\partial v_i} \frac{\partial u_t}{\partial v_j} h_{st}(u) . \quad (40)$$

Démonstration: Exercice. ■

Exemple : (la sphère) Considérons la surface paramétrée $f : \mathbb{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix} .$$

L'image de f est $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, donc la sphère standard privées des deux pôles.

On a

$$\partial_1 f(u) = \begin{pmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 \\ \cos u_1 \cos u_2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \partial_2 f(u) = \begin{pmatrix} -\cos u_1 \sin u_2 \\ -\sin u_1 \sin u_2 \\ \cos u_2 \end{pmatrix} ,$$

donc

$$g_{11}(u) = \|\partial_1 f(u)\|^2 = \cos^2 u_2 , \quad g_{12}(u) = g_{21}(u) = \langle \partial_1 f(u), \partial_2 f(u) \rangle = 0 , \\ g_{22}(u) = \|\partial_2 f(u)\|^2 = \sin^2 u_2 (\cos^2 u_1 + \sin^2 u_2) + \cos^2 u_2 = \sin^2 u_2 + \cos^2 u_2 = 1 .$$

et

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} \cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pour la seconde forme fondamentale commençons par le champ normal unitaire n :

$$n(u) = \frac{1}{\|\partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u)\|} \partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u) ,$$

où

$$\begin{aligned} \partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u) &= \begin{vmatrix} -\sin u_1 \cos u_2 & -\cos u_1 \sin u_2 & e_1 \\ \cos u_1 \cos u_2 & -\sin u_1 \sin u_2 & e_2 \\ 0 & \cos u_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos^2 u_2 \\ \sin u_1 \cos^2 u_2 \\ (\sin^2 u_1 + \cos^2 u_1) \cos u_2 \sin u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \cos u_2 \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque $u_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos u_2 > 0$, donc $\|\partial_1 f(u) \wedge \partial_2 f(u)\| = \cos u_2$ et

$$n(u) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix} = f(u) .$$

Nous obtenons

$$h_{ij}(u) = -\langle \partial_i n(u), \partial_j f(u) \rangle = -\langle \partial_i f(u), \partial_j f(u) \rangle = -g_{ij} ,$$

donc

$$\mathbf{H}(u) = -\mathbf{G}(u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R} \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

3.5 Courbes sur les surfaces. Courbures principales. Courbure de Gauss et courbure moyenne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 et $S := \text{im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ son image. On appelle *courbe paramétrée sur S* (ou plus précisément courbe paramétrée sur f) une courbe paramétrée de la forme $c := f \circ \gamma$, où $\gamma : I \rightarrow U$, est une courbe paramétrée dans $U \subset \mathbb{R}^2$ (donc implicitement une courbe paramétrée plane).

En posant $\gamma(t) = u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, le vecteur vitesse d'une telle courbe est donné par :

$$\begin{aligned} c'(t) &= (f \circ \gamma)'(t) = (d_{\gamma(t)} f)(\gamma'(t)) = (d_{\gamma(t)} f)(u'_1(t)e_1 + u'_2(t)e_2) = \\ &= u'_1(t)(d_{\gamma(t)} f)(e_1) + u'_2(t)(d_{\gamma(t)} f)(e_2) = u'_1(t)\partial_1 f(\gamma(t)) + u'_2(t)\partial_2 f(\gamma(t)) . \end{aligned} \quad (41)$$

Le première forme fondamentale de f nous permet de calculer la longueur de $c := f \circ \gamma$ et de donner une formule pour cette longueur qui fait intervenir seulement la courbe paramétrée plane $\gamma : I \rightarrow U$. Supposons que $I = [a, b]$. Alors, d'après la définition 2.1.10 on obtient

Proposition 3.5.1 *La longueur d'une courbe paramétrée $c = f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par la formule*

$$l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(c'(t), c'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(\gamma(t)) u'_i(t) u'_j(t)} dt . \quad (42)$$

Soit maintenant $(\partial_1 f, \partial_2 f, n) : U \rightarrow (\mathbb{R}^3)^3$ le repère mobile de Gauss de f . Soit $u_0 \in U$ et $x_0 = f(u_0) \in S$ son image. La droite normale à f en u_0 est, par définition, la droite affine $\nu_{u_0} f$ qui passe par x_0 et est orthogonale au plan tangent $T_{u_0} f$. Si f est injective on peut utiliser la terminologie plus intuitive "la droite normale à S au point x_0 ". Remarque que, en effet, cette droite est la droite affine $x_0 + \mathbb{R}n(u_0)$, donc la droite affine d'espace directeur $\mathbb{R}n(u_0)$ qui passe par x_0 .

Le but de cette section est d'étudier la courbure (en $x_0 = f(u_0)$ fixé) des courbes sur une surface paramétrée obtenues en paramétrant l'intersection $S \cap \pi$ de S avec des plans affines variables π qui passent par la droite normale $\nu_{u_0} f$. Un tel plan s'appelle *plan normal* à f en u_0 s'écrit sous la forme $\pi = x_0 + \text{Vect}(w, n(u_0))$, où $w \in T_{u_0} f$ est un vecteur tangent non-nul. Nous avons une famille à un paramètre (infinie) de plans normaux à f en un point fixé $u_0 \in U$.

En normalisant le vecteur w , on peut suppose qu'il est unitaire (c'est à dire $\|w\| = 1$) condition qui est équivalente à $g_u(w, w) = 1$. Rappelons que la différentielle $d_{u_0} f$ définit un isomorphisme $\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{u_0} f$, donc on peut écrire w d'une manière unique sous la forme

$$w = d_{u_0} f(v) = d_{u_0} f(v_1 e_1 + v_2 e_2) = v_1 d_{u_0} f(e_1) + v_2 d_{u_0} f(e_2) = v_1 \partial_1 f(u_0) + v_2 \partial_2 f(u_0) ,$$

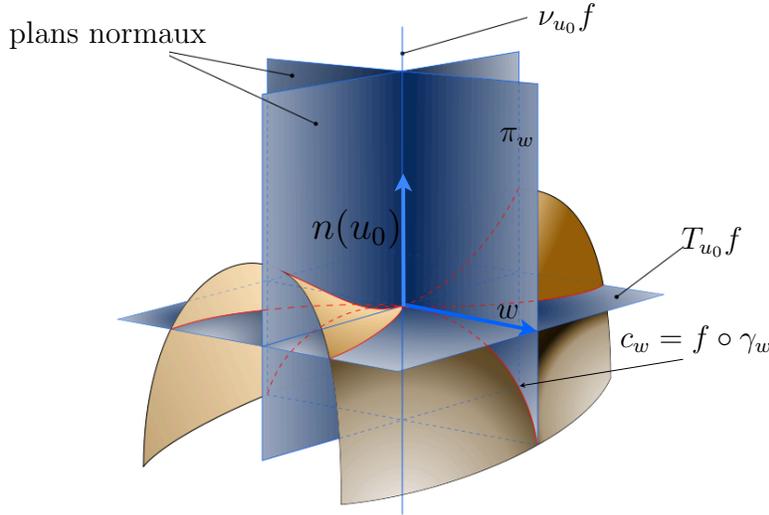
où $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. La condition $\|w\| = 1$ (soit $\langle w, w \rangle = 1$) est équivalente à la condition

$$\sum_{i, j=1}^2 g_{ij}(u_0) v_i v_j = 1 , \quad (43)$$

qui définit une ellipse plane $E_{u_0} \subset \mathbb{R}^2$ ayant $0_{\mathbb{R}^2}$ comme centre. Notons que (v_1, v_2) sont les composantes de $v \in \mathbb{R}^2$ et en même temps les coordonnées de $w \in T_{u_0}f$ par rapport à la base $(\partial_1 f(u_0), \partial_2 f(u_0))$. Donc

Remarque 3.5.2 La différentielle $d_{u_0}f$ identifie l'ellipse $E_{u_0} \subset \mathbb{R}^2$ définie par l'équation (43) avec le cercle $C_{u_0} \subset T_{u_0}f$ définie par l'équation $\|w\| = 1$.

Pour $w \in C_{u_0}$ on va noter par π_w le plan affine normal à f en u_0 défini par $\pi_w = x_0 + \text{Vect}(w, n(u_0))$.



Soit $\gamma_w :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ une courbe paramétrée dans $U \subset \mathbb{R}^2$ qui satisfait les trois propriétés suivantes :

1. $\text{im}(f \circ \gamma_w) \subset \pi_w$,
2. $\gamma_w(0) = u_0, (f \circ \gamma_w)'(0) = w$,
3. La courbe paramétrée $c_w := f \circ \gamma_w$ est normale (c'est à dire $\|c_w'(t)\| \equiv 1$).

On peut construire une telle courbe de la manière suivante : remarquons d'abord que l'équation implicite du plan π_w est

$$b_1(x_1 - x_{01}) + b_2(x_2 - x_{02}) + b_3(x_3 - x_{03}) = 0 \text{ où } b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = n(u_0) \wedge w .$$

Expliquer comment on a obtenu cette équation. Donc la première propriété de γ_w signifie que γ_w vérifie l'identité $F \circ f \circ \gamma_w \equiv 0$, où $F(x_1, x_2, x_3) = b_1(x_1 - x_{01}) + b_2(x_2 - x_{02}) + b_3(x_3 - x_{03})$.

Remarquons que la différentielle $d_{u_0}(F \circ f) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est non nulle, parce que son noyau est $(d_{u_0}f)^{-1}(\mathbb{R}w) = \mathbb{R}v$ (pourquoi?), qui est une droite vectorielle. Donc (au moins) l'une des deux dérivés partielles $\partial_1(F \circ f)(u_0), \partial_2(F \circ f)(u_0)$ est non-nulle. Supposons $\partial_2(F \circ f)(u_0) \neq 0$. Alors, en utilisant *le théorème des fonctions implicites*, on déduit que dans un voisinage de u_0 , l'équation $(F \circ f)(u) = 0$ est équivalente à une équation de la forme $u_2 = g(u_1)$ pour une fonction différentiable g , donc il existe un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$ qui contient u_{01} et une fonction différentiable $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(F \circ f)(t, g(t)) \equiv 0 .$$

La courbe paramétrée $\lambda : I \rightarrow U$ donnée par $\lambda(t) = (t, g(t))$ vérifie donc la première propriété requise. Pour assurer les autres deux propriétés il suffit de faire un reparamétrage pour assurer les autres propriétés requises (voir la Proposition 2.1.9) ; on pose donc

$$\sigma(t) = \int_{u_{01}}^t \|(f \circ \lambda)'(\tau)\| d\tau ,$$

formule qui définit un difféomorphisme $\sigma : I \rightarrow J$, où J est un intervalle ouvert qui contient 0 ; la courbe paramétrée plane $\lambda \circ \sigma^{-1}$ passe par u_0 au moment $t = 0$, et la courbe paramétrée $f \circ \lambda \circ \sigma^{-1}$ dans \mathbb{R}^3 est normale, en particulier son vecteur vitesse au moment $t = 0$ est unitaire, donc (puisque'il appartient à la droite vectorielle $\mathbb{R}w$) il coïncide soit avec w , soit avec $-w$. Dans le premier cas on pose $\gamma_w(s) = (\lambda \circ \sigma^{-1})(s)$ pour $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset J$. Dans le deuxième cas on pose $\gamma_w(s) = \lambda \circ \sigma^{-1}(-s)$ pour $s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Remarquons la propriété d'unicité suivante dont la démonstration reste comme exercice pour les étudiants intéressés :

Remarque 3.5.3 La courbe paramétrée γ_w satisfaisant les propriétés 1.-3. ci-dessus est essentiellement unique, c'est à dire deux telles courbes paramétrées coïncident sur un voisinage suffisamment petit de 0.

Notons que la courbe paramétrée c_w prend ses valeurs dans le plan π_w , donc on peut la regarder comme une courbe plane. Remarque que le plan directeur $\text{Vect}(w, n(u_0))$ du plan normal π_w est un plan euclidien orienté naturellement, parce que la base $(w, n(u_0))$ définit une orientation de ce plan. Nous avons donc une courbe paramétrée régulière c_w dans le plan affine orienté π_w , donc on peut définir d'une manière cohérente son repère mobile de Frenet et sa courbure (voir la section 2.2). Dans la définition du repère mobile de Frenet on va utiliser bien sûr l'isométrie linéaire $R_{\frac{\pi}{2}}$ du plan directeur $\text{Vect}(w, n(u_0))$ qui correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan orienté $\text{Vect}(w, n(u_0))$ (le plan directeur de π_w), et qui est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(w, n(u_0))$ (et dans toute base orthonormale directe de ce plan).

Notre but est de calculer la courbure de la courbe plane $c_w :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \pi_w$ (qui paramétrise l'intersection $\pi_w \cap S$) au point $t = 0$.

Puisque c_w est normale on a $f_1(t) = c'_w(t) \in \text{Vect}(w, n(u_0))$, donc $f_2(t) = R_{\frac{\pi}{2}} f_1(t)$ et $\kappa_{c_w}(t) = \langle f'_1(t), f_2(t) \rangle = \langle c''_w(t), f_2(t) \rangle$, en particulier

$$\kappa_{c_w}(0) = \langle c''_w(0), R_{\frac{\pi}{2}} f_1(0) \rangle = \langle c''_w(0), R_{\frac{\pi}{2}} c'_w(0) \rangle = \langle c''_w(0), R_{\frac{\pi}{2}} w \rangle = \langle c''_w(0), n(u_0) \rangle .$$

En posant $\gamma_w(t) = u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = u_1(t)e_1 + u_2(t)e_2$ (pour simplifier les notations) et en utilisant la dérivation des fonctions composées et la règle de Leibnitz, on obtient

$$\begin{aligned} c'_w(t) &= (f \circ \gamma_w)'(t) = u'_1(t)\partial_1 f(u(t)) + u'_2(t)\partial_2 f(u(t)) , \quad c''_w(t) = u'_1(t)u'_1(t)\partial_{11} f(u(t)) + u'_2(t)u'_1(t)\partial_{21} f(u(t)) + \\ &+ u'_1(t)u'_2(t)\partial_{12} f(u(t)) + u'_2(t)u'_2(t)\partial_{22} f(u(t)) + [u''_1(t)\partial_1 f(u(t)) + u''_2(t)\partial_2 f(u(t))] = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} u'_i(t)u'_j(t)\partial_{ij} f(u(t)) + \sum_{i=1}^2 u''_i(t)\partial_i f(t) . \end{aligned} \quad (44)$$

Remarquons maintenant que le deuxième terme appartient à $T_{u(t)}f$, donc est orthogonal à $n(u(t))$. En prenant $t = 0$ et en remarquant que $(u'_1(0), u'_2(0)) = \gamma'_w(0) = v = (v_1, v_2)$ on obtient :

$$\kappa_{c_w}(0) = \left\langle \sum_{1 \leq i, j \leq 2} v_i v_j \partial_{ij} f(u_0), n(u_0) \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \langle \partial_{ij} f(u_0), n(u_0) \rangle v_i v_j = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0) v_i v_j ,$$

où les coefficients $h_{ij}(u_0)$ sont ceux de la seconde forme fondamentale de f au point u_0 . Nous avons démontré

Proposition 3.5.4 La courbure au point $t = 0$ de la courbe normale plane $c_w = f \circ \gamma_w :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \pi_w$ construite antérieurement (qui paramétrise l'intersection $\pi_w \cap S$) et est associée à un vecteur tangent unitaire $w = v_1 \partial_1 f(u_0) + v_2 \partial_2 f(u_0)$ est donnée par la formule

$$\kappa_{c_w}(0) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0) v_i v_j .$$

En utilisant la proposition 2.3.1 on obtient facilement :

Remarque 3.5.5 Si $\kappa_{c_w}(0) \neq 0$, alors la courbe paramétrée c_w admet un cercle osculateur au point 0, et le centre de ce cercle osculateur se trouve sur la droite normale $\nu_{u_0} f = f(u_0) + \mathbb{R}n(u_0)$ à distance $R_w = \frac{1}{|\kappa_{c_w}(0)|}$ de $f(u_0)$ et est donné par la formule

$$q_{c_w}(0) = f(u_0) + \frac{1}{\kappa_{c_w}(0)} n(u_0) = f(u_0) + \frac{1}{\sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0) v_i v_j} n(u_0) .$$

Rappelons que la condition w est unitaire est équivalente à la condition (43). Nous voulons étudier le fonction $C_{u_0} \ni w \mapsto \kappa_{c_w}(0)$, qui est une fonction réelle définie sur le cercle $C_{u_0} \subset T_{u_0}f$. On s'intéresse notamment aux points critiques et extrémaux et aux valeurs critiques et extrémales de cette fonction. La proposition 3.5.4 ci-dessus montre que, en identifiant le cercle C_{u_0} avec l'ellipse plane E_{u_0} définie par (43) (via la différentielle $d_{u_0}f$) cette fonction se réduit à la fonction

$$\kappa_{u_0} : E_{u_0} := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0) v_i v_j = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

donnée par

$$\kappa_{u_0}(v) := \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0) v_i v_j .$$

Donc la fonction κ_{u_0} qui décrit la fonction $w \mapsto \kappa_{c_w}(0)$ introduite ci-dessus est la restriction de (la forme quadratique associée à) la seconde forme fondamentale de f au point u_0 à l'ellipse définie par la première forme quadratique de f au point u_0 . La condition $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij} v_i v_j = 1$ qui définit le domaine de définition E_{u_0} de κ_{u_0} est une *liaison*, donc une relation imposée au variables (v_1, v_2) . Plus précisément, soit $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $Q(v) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0) v_i v_j - 1$ dont le lieu d'annulation est l'ellipse E_{u_0} , et soit $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $q(v) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0) v_i v_j$ dont la restriction à E_{u_0} est notre fonction κ_{u_0} . On s'intéresse aux points critiques et extrémaux et aux valeurs critiques et extrémales de la restriction de q au sous-ensemble de \mathbb{R}^2 défini par la *liaison* $Q(v) = 0$.

Pour étudier les points critiques et extrémaux et les valeurs critiques et extrémales d'une telle fonction on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour les extrema liés, qui s'appuie sur la proposition suivante :

Théorème 3.5.6 (Le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour les extrema liés) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des applications différentiables sur Ω . Supposons que $d_x \Phi \neq 0$ pour tout point $x \in \Phi^{-1}(0)$, et soit $H \subset \Omega$ l'hypersurface de Ω définie par l'équation (la *liaison*) $\Phi(x) = 0$. Alors pour un point $x_0 \in H$ les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. x_0 est un point critique de la restriction $\phi|_H$,
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (qui s'appelle le multiplicateur de Lagrange correspondant à ce point critique) tel que $d_{x_0} \phi = \lambda d_{x_0} \Phi$.

La notion générale de hypersurface sera introduite dans le chapitre 4.2 (voir la définition 4.2.3). Remarquer que la condition $d_{x_0} \phi = \lambda d_{x_0} \Phi$ est équivalente à la condition de colinéarité

$$\nabla_{x_0} \phi = \lambda \nabla_{x_0} \Phi$$

entre les vecteurs gradients en x_0 des deux fonctions, soit à la condition de proportionnalité des dérivées partielles en x_0 :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0) = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

La démonstration de ce théorème en toute généralité ne fait pas l'objet de ce cours. Nous allons le démontrer en utilisant une méthode élémentaire seulement dans le cas particulier qui nous intéresse, à savoir dans le cas $n = 2$. Le cas général s'appuie sur la même idée.

L'idée est simple : on va réduire notre problème à l'étude des fonctions d'une seule variable réelle en utilisant des paramétrisations locales de la courbe $H = \Phi^{-1}(0) \subset \Omega$. Une *paramétrisation locale* de la courbe $H = \Phi^{-1}(0)$ autour d'un point $v \in H$ est une courbe paramétrée *régulière* $\mu :]a, b[\rightarrow \Omega$ *injective*, telle que $v \in \text{im}(\mu) \subset H$.

Un point $v \in H$ sera dit point critique (respectivement point de minimum local, point de maximum local) de la restriction $\phi|_H$ si, pour une paramétrisation locale $\mu :]a, b[\rightarrow \Omega$ de H autour de v telle que $\mu(t) = v$, le point $t \in]a, b[$ qui correspond à v est un point critique (respectivement point de minimum local, point de maximum local) de la composition $\phi \circ \mu$. C'est facile de voir que cette condition ne dépend pas de la paramétrisation locale choisie.

Puisque μ est une paramétrisation locale de la courbe H on a $\Phi \circ \mu \equiv 0$ donc, en dérivant en t , on obtient

$$(d_v \Phi)(\mu'(t)) = 0 . \tag{45}$$

La différentielle $d_v \Phi$ est une forme linéaire *non-nulle* (pourquoi?) qui s'annule sur le vecteur *non nul* $\mu'(t)$. Remarquons que, en général, pour un vecteur *non-nul* fixé $y \in \mathbb{R}^2$ la dimension de l'espace vectoriel $\text{Ann}(y)$ des formes linéaires $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annulent sur y est 1 (exercice). Puisque $d_v \Phi \neq 0$, cette forme linéaire sera un générateur de l'espace $\text{Ann}(\mu'(t))$.

D'autre part, d'après notre définition, v est point critique de la restriction $\phi|_H$ si et seulement si $(\phi \circ \mu)'(t) = 0$. Puisque $(\phi \circ \mu)'(t) = (d_v \phi)(\mu'(t))$, cette condition est équivalente à la condition $d_v \phi \in \text{Ann}(\mu'(t)) = \mathbb{R}(d_v \Phi)$.

Conclusion : Un point $v \in H$ est point critique de la restriction $\phi|_H$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (qui s'appelle le multiplicateur de Lagrange correspondant à ce point critique) tel que $d_v \phi = \lambda d_v \Phi$.

Dans notre cas on a $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Phi(v) = Q(v) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0)v_i v_j - 1$, $\phi(v) = q(v) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0)v_i v_j$, donc

$$(d_v Q)(y) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0)(v_i y_j + v_j y_i) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (g_{ji}(u_0)v_j y_i + g_{ij}(u_0)v_j y_i) = 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0)v_j y_i = 2\langle \mathbf{G}(u_0)v, y \rangle,$$

$$(d_v q)(y) = 2 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0)v_j y_i = 2\langle \mathbf{H}(u_0)v, y \rangle,$$

donc $v \in E_{u_0}$ est point critique de la fonction κ_{u_0} si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{H}(u_0)v = \lambda \mathbf{G}(u_0)v$. La valeur critique correspondante sera alors

$$\kappa_{u_0}(v) = q(v) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_{ij}(u_0)v_j v_i = \langle \mathbf{H}(u_0)v, v \rangle = \lambda \langle \mathbf{G}(u_0)v, v \rangle = \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq 2} g_{ij}(u_0)v_j v_i = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Remarquer que l'équation $\mathbf{H}(u_0)v = \lambda \mathbf{G}(u_0)v$ admet une solution $v \in E_{u_0}$ si et seulement si elle admet une solution $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ (pourquoi?) et ça arrive si et seulement si $\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) = 0$. Cette remarque montre que

Proposition 3.5.7 1. Un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur critique de la fonction $\kappa_{u_0} : E_{u_0} \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Il existe $v \in E_{u_0}$ tel que $(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0))(v) = 0$,
2. $\ker(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$,
3. $\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) = 0$.
4. λ est valeur propre de la matrice $\mathbf{G}(u_0)^{-1}\mathbf{H}(u_0)$,
5. λ est valeur propre de l'endomorphisme de Weingarten $l_{u_0} : T_{u_0}f \rightarrow T_{u_0}f$.

2. Si λ est valeur critique de la fonction $\kappa_{u_0} : E_{u_0} \rightarrow \mathbb{R}$ (donc si elle vérifie l'une de conditions équivalentes ci-dessus), alors l'ensemble des points critiques de cette fonction qui correspondent à cette valeur critique est

$$\ker(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) \cap E_{u_0} = \ker(\mathbf{G}(u_0)^{-1}\mathbf{H}(u_0) - \lambda I_2) \cap E_{u_0}.$$

donc l'intersection de l'ellipse E_{u_0} avec l'espace propre de la matrice $\mathbf{G}(u_0)^{-1}\mathbf{H}(u_0)$ associé à la valeur propre λ .

En utilisant la formule connue (38) remarquer que l'image du sous-espace $\ker(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0))$ dans $T_{u_0}f$ (via $d_{u_0}f$) est le sous-espace propre de l'endomorphisme l_{u_0} associé à la valeur propre λ .

Corollaire 3.5.8 1. Le discriminant de l'équation du deuxième degré $\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) = 0$ est positif, donc les solutions λ_1, λ_2 de cette équation sont réelles.

2. On a

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det(\mathbf{H}(u_0))}{\det(\mathbf{G}(u_0))} = \det(l_{u_0}), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{g_{11}(u_0)h_{22}(u_0) + g_{22}(u_0)h_{11}(u_0) - 2g_{12}(u_0)h_{12}(u_0)}{\det(\mathbf{G}(u_0))} = \text{Tr}(l_{u_0}),$$

où $l_{u_0} : T_{u_0}f \rightarrow T_{u_0}f$ désigne l'endomorphisme de Weingarten du plan tangent $T_{u_0}f$.

3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ alors la fonction κ_{u_0} est constante λ , donc la courbure $\kappa_{c_w}(0)$ de la courbe c_w en 0 est indépendante de $w \in C_{u_0}$,

4. Si $\lambda_1 < \lambda_2$ alors

- (a) λ_1 est le minimum absolu de la fonction κ_{u_0} et λ_2 est le maximum absolu de la fonction κ_{u_0} .
- (b) λ_i sont valeurs propres simples, donc les espaces propres correspondants sont des droites vectorielles l_1, l_2 en somme directe, et dont les images en $T_{u_0}f$ sont g_u -orthogonales.
- (c) Pour chaque $i \in \{1, 2\}$ on a deux points extrémaux qui correspondent à λ_i , à savoir les points d'intersection $\pm v_i$ de l_i avec E_{u_0} . Les vecteurs $w_i = d_{u_0}f(v_i) \in C_{u_0} \subset T_{u_0}f$ qui correspondent à ces points extrémaux sont g_{u_0} -orthogonaux.

Démonstration: 1. Soit (τ_1, τ_2) une base orthonormale du plan tangent $T_u f$ (par rapport à g_{u_0}) et soit P la matrice de passage de la base standard $(\partial_1 f(u_0), \partial_2 f(u_0))$ à la base orthonormale (τ_1, τ_2) . La formule de transformation de la matrice d'une forme bilinéaire par rapport à un changement de base donne

$$\mathbf{G}(u_0) = (P^{-1})^T I_2 P^{-1} = (P^T)^{-1} P^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) &= \det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda(P^T)^{-1}P^{-1}) = \det((P^T)^{-1}(P^T \mathbf{H}(u_0)P - \lambda I_2)P^{-1}) = \\ &= \det(P)^{-2} \det(P^T \mathbf{H}(u_0)P - \lambda I_2) .\end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que la matrice $P^T \mathbf{H}(u_0)P$ est symétrique et de se rappeler que, en général, toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles. Pour les matrices de taille 2 on peut vérifier cette affirmation directement, en remarquant que le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est $X^2 - (a_{11} + a_{22})X + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, dont le discriminant est $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$. Remarquer que la matrice $P^T \mathbf{H}(u_0)P$ est la matrice de h_{u_0} (et en même temps la matrice de l'endomorphisme de Weingarten l_{u_0}) dans la base g_{u_0} -orthonormale (τ_1, τ_2) .

2. On a

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) &= (h_{11}(u_0) - \lambda g_{11}(u_0))(h_{22}(u_0) - \lambda g_{22}(u_0)) - (h_{12}(u_0) - \lambda g_{12}(u_0))^2 = \\ &= \det(\mathbf{G}(u_0))\lambda^2 - \lambda(g_{11}(u_0)h_{22}(u_0) + g_{22}(u_0)h_{11}(u_0) - 2g_{12}(u_0)h_{12}(u_0)) + \det(\mathbf{H}(u_0)) ,\end{aligned}$$

donc il suffit de se rappeler les identités qui expriment le produit et la somme des racines d'une équation du deuxième degré en fonction des coefficients. D'autre part, les équations du deuxième degré $\det(\mathbf{H}(u_0) - \lambda \mathbf{G}(u_0)) = 0$, $\det(P^T \mathbf{H}(u_0)P - \lambda I_2) = 0$ sont équivalentes, et la deuxième équation est juste l'équation caractéristique de l'endomorphisme de Weingarten l_{u_0} , donc elle s'écrit : $\lambda^2 - \text{Tr}(l_{u_0})\lambda + \det(l_{u_0}) = 0$.

3., 4. La fonction κ_{u_0} est continue sur la courbe E_{u_0} qui est un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^2 . D'après le théorème des bornes, il en résulte que κ_{u_0} atteint son minimum absolu m et son maximum absolu M sur E_{u_0} ; en utilisant des paramétrisations locales et le théorème sur les points extrémaux intérieurs, on voit que tout point où κ_{u_0} atteint l'une de ces valeurs extrémales sera nécessairement un point critique de κ_{u_0} , donc $\{m, M\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$. D'autre part on a évidemment $\lambda_1, \lambda_2 \in [m, M]$. Les deux relations impliquent $\{m, M\} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Ceci montre 3. et 4. (a). Pour 4.(b) remarquer que les images $d_{u_0}(l_i)$ sont les droites propres de l'endomorphisme l_{u_0} , dont la matrice dans une base g_{u_0} -orthonormale (τ_1, τ_2) est symétrique. Mais on sait que, en général, les espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux. ■

Définition 3.5.9 Les valeurs critiques λ_1, λ_2 de la fonction κ_{u_0} s'appellent les courbures principales de la surface paramétrée f au point u_0 . Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les droites propres $\mathbb{R}w_1, \mathbb{R}w_2$ correspondantes s'appellent les directions principales de la surface paramétrée f au point u_0 . Le produit

$$K(u_0) := \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det(\mathbf{H}(u_0))}{\det(\mathbf{G}(u_0))} = \det(l_{u_0})$$

s'appelle la courbure de Gauss de f au point u_0 , et la moyenne arithmétique

$$H(u_0) := \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{g_{11}(u_0)h_{22}(u_0) + g_{22}(u_0)h_{11}(u_0) - 2g_{12}(u_0)h_{12}(u_0)}{2 \det(\mathbf{G}(u_0))} = \frac{1}{2} \text{Tr}(l_{u_0})$$

s'appelle la courbure moyenne de f au point u_0 .

Si $K(u_0) \neq 0$, alors les courbures principales λ_i de f au point u_0 sont non-nulles. Dans ce cas les centres de courbure principaux sont les centres de courbure $q_{c_{w_i}}$ des courbes c_{w_i} ($1 \leq i \leq 2$) associées aux directions principales, donc sont donnés par

$$q_{c_{w_i}} = f(u_0) + \frac{1}{\lambda_i} n(u_0) .$$

La notation $H(u_0)$ est la notation standard utilisée dans la littérature pour la courbure moyenne. Nous avons utilisé une notation similaire, à savoir $\mathbf{H}(u_0)$, pour la matrice de la seconde forme fondamentale en u_0 , donc il ne faut pas confondre les deux notions.

Les courbures principales et la courbure moyenne sont invariantes par rapport aux changements de variable qui préservent l'orientation et par rapport aux compositions avec les isométries directes de \mathbb{R}^3 . La courbure de Gauss est invariante par rapport aux changements de variable arbitraires et par rapport aux compositions avec les isométries arbitraires de \mathbb{R}^3 . Énoncer rigoureusement et démontrer ces propriétés d'invariance en utilisant les propriétés d'invariance connues des formes fondamentales.

Remarquer que la définition donnée pour la courbure de Gauss suggère qu'elle dépend effectivement des deux formes fondamentales. Pourtant, le "Teorema Egregium" (le "théorème remarquable") de Gauss, qui sera expliqué

et démontré plus tard, montre que la courbure $K(u)$ d'une surface paramétrée dépend seulement de la première forme fondamentale $g(u)$, plus précisément $K(u)$ est donnée par une formule algébrique qui fait intervenir seulement la fonction $g : U \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ et ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Le résultat suivant (énoncé sans démonstration) nous donne une première interprétation géométrique de la courbure :

Proposition 3.5.10 (*Interprétation géométrique du signe de la courbure de Gauss*) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $u_0 \in U$ tel que $K(u_0) \neq 0$. Si $K(u_0) > 0$ alors l'image $S = \text{im}(f)$ est localement convexe autour de u_0 , c'est à dire il existe un voisinage U_0 de u_0 dans U tel que $f(U_0)$ se trouve d'un même côté du plan tangent affine $f(u_0) + T_{u_0}f$. Si $K(u_0) < 0$ alors les courbes c_{w_1} , c_{w_2} qui correspondent aux directions principales se trouvent localement (dans un voisinage de 0) dans des demi-plans opposés par rapport au plan tangent affine $f(u_0) + T_{u_0}f$, donc S a localement autour de $f(u_0)$ la forme d'une "selle de cheval".

Le théorème suivant très important, dont la démonstration dépasse le programme et les buts de ce cours, montre que la condition $K \equiv 0$ a une interprétation géométrique intéressante, à savoir cette condition signifie que la surface paramétrée considérée est *localement euclidienne*.

Définition 3.5.11 Une surface paramétrée est dite *localement euclidienne* si tout point $u_0 \in U$ admet un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ et un changement de variables $\phi : V_0 \rightarrow U_0$ telle que la nouvelle paramétrisation $f_0 := f \circ \phi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une isométrie locale, c'est à dire l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $d_v f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_v(f_0)$ est un isomorphisme linéaire isométrique pour tout $v \in V_0$,
2. la matrice de la première forme fondamentale de f_0 coïncide avec la matrice unité I_2 en tout point $v \in V_0$,
3. f_0 préserve la longueur des courbes, c'est à dire pour toute courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \rightarrow V_0$ on a

$$l(f_0 \circ \gamma) = l(\gamma) .$$

Notons que tout cylindre et tout cône (paramétrés d'une manière arbitraire) est une surface localement euclidienne.

Théorème 3.5.12 (*Interprétation géométrique de la condition $K \equiv 0$*) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $K(u) = 0$ pour tout $u \in U$, c'est à dire la courbure de Gauss est identiquement nulle,
2. f est localement euclidienne au sens de la définition 3.5.11.

La partie difficile (et surprenante) du théorème est l'implication 2. \Rightarrow 1. En effet, notre définition de la courbure de Gauss suggère qu'elle dépend des deux formes fondamentales de f tandis que la condition 2. concerne seulement la première forme fondamentale. D'autre part on va voir dans le chapitre suivant que, d'après le *Teorema Egregium* de Gauss la courbure de Gauss dépend seulement de la première fondamentale et de ses dérivées.

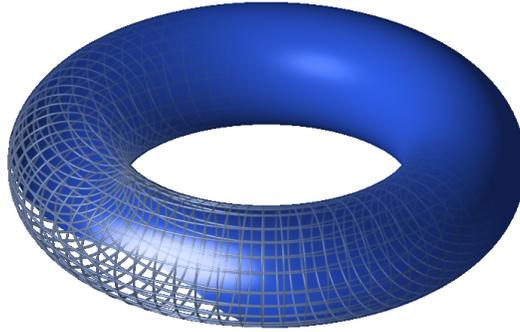
Pour conclure ce chapitre étudions un exemple intéressant de surface paramétrée pour laquelle on va déterminer les courbures et les directions principale, la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

Exemple (voir le cours de Boris Thibert [T]) :

Considérons deux nombres réels $0 < r < R$ et le tore de révolution T obtenu en faisant tourner un cercle de rayon r autour de l'axe Ox_3 tel que le centre du cercle mobile décrit un cercle de rayon R dans le plan x_1Ox_2 . Un tel tore est paramétré par l'immersion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (R + r \cos u) \cos v \\ (R + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix} .$$

1. Calculer l'aire de cette surface.
2. Que représentent géométriquement les courbes $C_1 = \{f(0, v) \mid v \in \mathbb{R}\}$ et $C_2 = \{f(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$?
3. Montrer que les vecteurs tangents à ces courbes au point d'intersection $m = f(0, 0)$ sont orthogonaux.
4. Calculer en tout point $(u, v) \in [0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ la première et la seconde forme fondamentale $h(u, v)$, ainsi que les courbures principales, directions principales et les vecteurs unitaires w_1, w_2 correspondants.



5. Calculer la courbure de Gauss $K(u, v)$ et la courbure moyenne $H(u, v)$. Déterminer les points $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels

- (a) $K(u, v) > 0$,
- (b) $K(u, v) < 0$,
- (c) $K(u, v) = 0$,

et dans chaque cas préciser l'ensemble $T_+ \subset T$ (respectivement $T_- \subset T$, $T_0 \subset T$) des points images $m = f(u, v) \in T$ qui correspondent à ces points. Interpréter géométriquement ces résultats.

Solution :

1. En utilisant la proposition 3.2.7 et en tenant compte que la restriction de f sur $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ est injective et $f([0, 2\pi[\times [0, 2\pi]) = T$, on obtient

$$A(T) = \int_{[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[} \|\partial_1 f(u, v) \wedge \partial_2 f(u, v)\| dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |r(R + r \cos u)| dudv = 4\pi^2 rR .$$

2. L'image du lieu défini par $u = 0$ correspond au cercle C_1 de rayon $R + r$ dans le plan $x_1 O x_2$ (plus précisément le cercle extérieur de l'intersection $T \cap (x_1 O x_2)$) et l'image du lieu défini $v = 0$ est le cercle C_2 de centre $(R, 0, 0)$ et rayon r contenu dans le plan $x_1 O x_3$.

3. Les deux cercles C_1 et C_2 s'intersectent au point $m = (R + r, 0, 0)$. Un vecteur tangent à la courbe C_1 au point m est $\partial_2 f(0, 0)$ et un vecteur tangent à la courbe C_2 au point m est $\partial_1 f(0, 0)$. Calculons ces dérivées partielles $\partial_i f(u, v)$:

$$\partial_1 f(u, v) = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \quad \partial_2 f(u, v) = \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $g_{12}(u, v) = \langle \partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v) \rangle = 0$, donc ces deux vecteurs sont toujours orthogonaux. En particulier, les vecteurs tangents aux deux cercles C_1 et C_2 au point d'intersection $m = f(0, 0)$ sont orthogonaux.

4. Les coefficients de la première forme fondamentale sont :

$$g_{11}(u, v) = \langle \partial_1 f(u, v), \partial_1 f(u, v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v \\ -r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix} \right\rangle = r^2, \quad g_{12}(u, v) = 0,$$

$$g_{22}(u, v) = \langle \partial_2 f(u, v), \partial_2 f(u, v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(R + r \cos u) \sin v \\ (R + r \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (R + r \cos u)^2,$$

On note $n(u, v)$ le vecteur normal standard (de Gauss) au point (u, v) , donc :

$$n(u, v) = \frac{1}{\|\partial_1 f(u, v) \wedge \partial_2 f(u, v)\|} \partial_1 f(u, v) \wedge \partial_2 f(u, v) .$$

Mais

$$\partial_1 f(u, v) \wedge \partial_2 f(u, v) = -r(R + r \cos u) \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix},$$

et la norme de ce vecteur est $r(R + r \cos u)$, donc

$$n(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}.$$

Pour les coefficients de la seconde forme fondamentale on obtient

$$h_{11}(u, v) = \langle \partial_{11} f(u, v), n(u, v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r \cos u \cos v \\ -r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \right\rangle = r,$$

$$h_{12}(u, v) = \langle \partial_{12} f(u, v), n(u, v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} r \sin u \sin v \\ -r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

$$h_{22}(u, v) = \langle \partial_{22} f(u, v), n(u, v) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -(R_r \cos u) \cos v \\ -(R + r \cos u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos u \cos v \\ -\cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \right\rangle = (R + r \cos u) \cos u.$$

La matrice de l'endomorphisme de Weingarten $l_{u,v} : T_{u,v}f \rightarrow T_{u,v}f$ dans la base $(\partial_1 f(u, v), \partial_2 f(u, v))$ est diagonale, à savoir :

$$\mathbf{L}(u, v) = \mathbf{G}(u, v)^{-1} \mathbf{H}(u, v) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r \cos u) \cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & (R + r \cos u)^{-1} \cos u \end{pmatrix}.$$

Donc les directions principales sont $\mathbb{R}\partial_1 f(u, v)$, $\mathbb{R}\partial_2 f(u, v)$, les vecteurs unitaires correspondants sont

$$w_1 = \frac{1}{\|\partial_1 f(u, v)\|} \partial_1 f(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\|\partial_2 f(u, v)\|} \partial_2 f(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Les courbures principales, la courbure de Gauss et la courbure moyenne sont :

$$\lambda_1 = r^{-1}, \quad \lambda_2 = (R + r \cos u)^{-1} \cos u, \quad K(u, v) = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det \mathbf{H}(u, v)}{\det \mathbf{G}(u, v)} = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)},$$

$$H(u, v) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2r(R + r \cos u)}(R + 2r \cos u).$$

Notons que le signe de la courbure de Gauss $K(u, v)$ coïncide avec le signe de $\cos(u)$ donc

$$K(u, v) > 0 \Leftrightarrow u \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ 2\mathbb{Z}\pi, \quad K(u, v) < 0 \Leftrightarrow u \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[+ 2\mathbb{Z}\pi, \quad K(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi.$$

L'ensemble T_0 des points de T correspondant au paires (u, v) avec $\cos u = 0$ (soit $u \in \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$) est

$$T_0 := \begin{pmatrix} R \cos v \\ R \sin v \\ \pm r \end{pmatrix},$$

qui est la réunion de deux cercles horizontaux de rayon R , qu'on va noter C_{\pm} , qui sont situés dans les plans horizontaux $x_3 = \pm r$. Interprétation géométrique : Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre infini ayant Ox_3 comme axe et le cercle $C(0, R) \subset x_1 O x_2$ comme base. Plus précisément Γ est défini par l'équation $x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Remarquer que

$$T_0 = \Gamma \cap T.$$

Soit Γ_+ l'extérieur du cylindre Γ (donc l'ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 défini par $x_1^2 + x_2^2 > R^2$), et Γ_- l'intérieur du cylindre Γ (donc l'ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 défini par $x_1^2 + x_2^2 < R^2$). On obtient

$$T_+ = \Gamma_+ \cap T, \quad T_- = \Gamma_- \cap T.$$

En particulier, les points du tore T auxquels T a localement la forme d'une "selle de cheval" sont précisément les points qui se trouvent à l'intérieur du cylindre Γ , donc (intuitivement) vers la partie intérieure du tore par rapport aux cercles C_{\pm} .

3.6 La convention de sommation d'Einstein

En géométrie différentielle on utilise souvent la convention de sommation d'Einstein, qui permet d'écrire des formules compliquées sous une forme compacte. Cette convention nous permet de supprimer les signes de sommation Σ dans la plupart des formules de géométrie différentielle. Pour utiliser cette convention nous devons respecter la règle suivante :

Si nous avons un produit de variables numérotées par des indices inférieurs et supérieurs et on veut faire une sommation par rapport à un indice qui varie de 1 à un nombre naturel connu, on va faire figurer cet indice une fois en position supérieure et une fois en position inférieure. Un tel indice est dit *indice muet* et dans la présence d'un tel indice dans un produit on sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Un indice non muet est dit *indice réel* et ne peut apparaître qu'une seule fois dans le terme en question. L'expression en question va dépendre de cet indice, donc si un indice réel i varie (disons) de 1 à m , il s'agit de la i -ème expression dans une suite de m expression similaires. Par exemple dans l'expression $X_j^i Y^j$ l'indice j est un indice muet (de sommation) tandis que i est un indice réel. En utilisant la convention de sommation de Einstein, et en supposant que i varie de 1 à m et j de 1 à n , on a $X_j^i Y^j = \sum_{j=1}^n X_j^i Y^j$, donc il s'agit de l' i -ème élément de la suite finie de sommes

$$\sum_{j=1}^n X_j^1 Y^j, \sum_{j=1}^n X_j^2 Y^j, \dots, \sum_{j=1}^n X_j^m Y^j.$$

Regardons en détail quelques exemples :

Exemple 1 : Soient V, W deux espaces vectoriels de dimension m, n respectivement, soit (f_1, \dots, f_m) une base de V et (g_1, \dots, g_n) une base de W et $u : V \rightarrow W$ une application linéaire. Les coefficients de la matrice A de f par rapport à ces bases sont donnés par les formules :

$$u(f_i) = a_i^j g_j.$$

A remarquer :

1. L'indice de sommation j varie de 1 à n , et cet indice est un indice muet. Conformément à la convention de Einstein, on l'a écrit une fois en haut et une fois en bas. D'après cette convention c'est inutile d'écrire le symbole de sommation $\sum_{j=1}^n$, parce que la dimension de W est connue n , donc on sous-entend que j varie de 1 à n . On peut utiliser n'importe quelle lettre pour cet indice, le résultat sera bien sûr le même, à savoir la somme $a_i^1 g_1 + a_i^2 g_2 + \dots + a_i^n g_n$. Par contre, l'indice i varie de 1 à m et est un indice réel, il apparaît une seule fois en même position à gauche et à droite, et l'expression $a_i^j g_j$ dépend effectivement de cet indice : il s'agit de l'image de l' i -ème vecteur de la base (f_1, \dots, f_m) .

2. Les éléments de la matrice associée à une application linéaire sont indexés en utilisant un indice supérieur (l'indice de ligne) et un indice inférieur (l'indice de colonne).

Exemple 2 : En utilisant les notations de l'exemple précédent, soit $v \in V$ et $w \in W$. En décomposant ces vecteurs par rapport aux bases $(f_1, \dots, f_m), (g_1, \dots, g_n)$ on obtient :

$$v = v^i f_i, w = w^j g_j.$$

Remarquer que, afin de respecter la convention de Einstein, nous sommes obligés d'utiliser des indices supérieurs pour les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base. Dans les formules ci-dessus i et j sont des indices muets, et nous n'avons pas de indices réels. En appliquant l'application linéaire u au vecteur $v = v^i f_i$ on obtient

$$u(v) = u(v^i f_i) = v^i u(f_i) = v^i a_i^j g_j = a_i^j v^i g_j.$$

Remarquer que dans cette formule i et j sont des indices muets (de sommation) qui varient de 1 à m et de 1 à n respectivement. Remarquer aussi que, en écrivant le résultat sous la forme $(a_i^j v^i) g_j$ on voit que, en notant par w^j la j -ème coordonnée de $f(v)$ par rapport à la base (g_1, \dots, g_n) on obtient

$$w^j = a_i^j v^i,$$

et dans cette formule $j \in \{1, \dots, n\}$ est indice réel et $i \in \{1, \dots, m\}$ est un indice muet (de sommation).

Exemple 3 : En utilisant les notations de l'exemple 1, supposons que V, W sont des espaces vectoriels réels et soit $\phi = V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Alors l'expression de ϕ par rapport aux bases $(f_1, \dots, f_m), (g_1, \dots, g_n)$ sera

$$\phi(v, w) = \phi_{ij} v^i w^j,$$

où $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ sont des indices muets. Il s'agit donc d'une somme double, par rapport à deux indices :

$$\phi_{ij}v^i w^j := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \phi_{ij}v^i w^j .$$

Remarquer donc que les éléments de la matrice d'une forme bilinéaire sont indexés par deux indices inférieurs. La convention de sommation de Einstein, en plus de simplifier les formules, a donc un autre avantage important : elle nous permet de reconnaître plus facilement l'interprétation correcte d'une expression en regardant la position des indices : un symbole du type v^i suggère la i -ème coordonnée d'un vecteur (par rapport à une base), un symbole du type f_i suggère le i -ème vecteur d'une famille de vecteurs (par exemple d'une base), un symbole du type a_j^i suggère l'élément d'indices (i, j) de la matrice associée à une application linéaire et un symbole du type ϕ_{ij} suggère l'élément d'indices (i, j) de la matrice associée à une forme bilinéaire.

Exemple 4 : Soit $A = (a_j^i) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice réelle d'ordre n et $B := A^{-1}$ son inverse. Alors la relation $BA = I_n$ devient

$$b_k^i a_j^k = \delta_j^i ,$$

où i, j sont des indices réels et k est un indice muet. Par contre si nous avons une matrice réelle d'ordre n donnée sous la forme $\Phi = (\phi_{ij})$, alors ce sera naturel d'écrire la matrice inverse $\Psi = \Phi^{-1}$ sous la forme $\Psi = (\psi^{ij})$ et la formule $\Psi\Phi = I_n$ devient

$$\psi^{ik} \phi_{kj} = \delta_j^i ,$$

où de nouveau i, j sont des indices réels et k est un indice muet (de sommation). Par exemple, si $g_{ij}(u)$ sont les coefficients de la première forme fondamentale d'une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ au point $u \in U$, alors $g^{ij}(u)$ vont désigner les coefficients de la matrice inverse donc on obtient une application différentiable $\mathbf{G}^{-1} : U \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})_{\text{sym}}$, $\mathbf{G}^{-1}(u) = (g^{ij}(u))$ telle que $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$. Nous aurons donc

$$g^{11}(u) = \frac{1}{\det(\mathbf{G}(u))} g_{22}(u) , \quad g^{22}(u) = \frac{1}{\det(\mathbf{G}(u))} g_{11}(u) , \quad g^{12}(u) = -\frac{1}{\det(\mathbf{G}(u))} g_{12}(u) .$$

3.7 Les formules de Gauss et Codazzi-Mainardi. Teorema Egregium.

Dans ce chapitre, pour simplifier les notations et les formules on va utiliser la convention de sommation d'Einstein et on va désigner par des indices inférieurs les dérivées partielles. Par exemple, pour une application différentiable $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on va utiliser les notations

$$\psi_i := \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial u^i} , \quad \psi_{ij} := \partial_{ij} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^i \partial u^j} , \quad \psi_{ijk} := \partial_{ijk} \psi = \frac{\partial^3 \psi}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} .$$

Remarquer que, pour respecter la convention de Einstein, nous avons utilisé des indices supérieurs pour les coordonnées d'un point $u \in U$.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée dans \mathbb{R}^3 , $n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ son champ normal unitaire, $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $h_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ les coefficients de la première et la seconde forme fondamentale de f et $g^{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ les coefficients de la matrice inverse \mathbf{G}^{-1} de $\mathbf{G} = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ (voir l'exemple 3 de la section 3.6). On va commencer par le théorème suivant qui donne des formules explicites pour les dérivées partielles d'ordre 2 de f et les dérivées partielles du premier ordre de n .

Théorème 3.7.1 *On a les identités*

$$\begin{aligned} f_{ik} &= \Gamma_{ik}^l f_l + h_{ik} n \quad \text{où} \quad \Gamma_{ik}^l := g^{lj} \langle f_{ik}, f_j \rangle = \frac{1}{2} g^{lj} (g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}) , \\ n_i &= -g^{kl} h_{li} f_k . \end{aligned} \tag{46}$$

Dans la définition de Γ_{ik}^l on a utilisé les notations

$$g_{ij,k} := \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} , \quad g_{jk,i} := \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} , \quad g_{ki,j} := \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} .$$

En général, pour désigner les dérivées partielles d'une application dont le symbole contient déjà des indices inférieurs (par exemple $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$), les indices de dérivation seront écrits après une virgule.

Démonstration: Puisque $(f_1(u), f_2(u), n(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 pour tout $u \in U$ on peut décomposer les dérivées partielle du deuxième ordre f_{ik} par rapport à cette base et obtenir des formules du type

$$f_{ik} = \gamma_{ik}^l f_l + a_{ik} n, \quad (47)$$

avec des coefficients inconnus $\gamma_{ik}^l, a_{ik} : U \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème est donc de déterminer ces coefficients. Remarquons d'abord que, en utilisant la symétrie des dérivées partielle du deuxième ordre on obtient les propriétés de symétrie évidentes :

$$\gamma_{ik}^l = \gamma_{ki}^l, \quad a_{ik} = a_{ki}.$$

En prenant le produit scalaire des deux membres avec n et en utilisant $\langle f_l, n \rangle = 0, \langle n, n \rangle = 1$ on obtient $a_{ik} = \langle f_{ik}, n \rangle = h_{ik}$. En prenant le produit scalaire avec f_j on obtient $\gamma_{ik}^l \langle f_l, f_j \rangle = \langle f_{ik}, f_j \rangle$, donc $\gamma_{ik}^l g_{lj} = \langle f_{ik}, f_j \rangle$. On multiplie à gauche et à droite par g^{js} et on fait la somme par rapport à j en respectant la convention d'Einstein. On obtient $\gamma_{ik}^l g_{lj} g^{js} = \langle f_{ik}, f_j \rangle g^{js}$. Mais $g_{lj} g^{js} = \delta_l^s$, donc $\gamma_{ik}^l g_{lj} g^{js} = \gamma_{ik}^s$, et la relation obtenue $\gamma_{ik}^l g_{lj} g^{js} = \langle f_{ik}, f_j \rangle g^{js}$ devient

$$\gamma_{ik}^s = g^{sj} \langle f_j, f_{ik} \rangle. \quad (48)$$

D'autre part, en dérivant par rapport à u^k les identités $g_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle$ on obtient

$$g_{ij,k} = \langle f_{ik}, f_j \rangle + \langle f_i, f_{jk} \rangle \quad (49)$$

et les permutations circulaires des indices donnent :

$$g_{jk,i} = \langle f_{ji}, f_k \rangle + \langle f_j, f_{ki} \rangle \quad (50)$$

$$g_{ki,j} = \langle f_{kj}, f_i \rangle + \langle f_k, f_{ij} \rangle \quad (51)$$

Donc, en tenant compte de la symétrie des dérivées partielles du second ordre, on obtient

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} = 2\langle f_{ik}, f_j \rangle, \quad \langle f_{ik}, f_j \rangle = \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}).$$

Il suffit de remplacer $\langle f_{ik}, f_j \rangle$ par $\frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j})$ dans (48) et on obtient $\gamma_{ik}^s = \Gamma_{ik}^s$ ce qui achève la démonstration de la première formule de (46). Pour démontrer la deuxième formule notons que, en dérivant l'identité $\langle n, n \rangle = 1$ par rapport à u^i on obtient $\langle n_i, n \rangle = 0$, donc pour tout $u \in U$ le vecteur $n_i(u)$ est orthogonal à $n(u)$ donc appartient à l'espace tangent $T_u f$ dans lequel nous avons la base $(f_1(u), f_2(u))$. On a donc une décomposition de la forme

$$n_i = b_i^k f_k$$

où les coefficients b_i^k sont des fonctions différentiables $U \rightarrow \mathbb{R}$. Le produit scalaire des deux membres avec f_j donne

$$\langle n_i, f_j \rangle = b_i^k \langle f_k, f_j \rangle.$$

D'autre part nous savons (voir les sections 3.3, 3.4) que

$$h_{ij} = -\langle n_i, f_j \rangle, \quad \langle f_k, f_j \rangle = g_{kl},$$

donc $b_i^k g_{kj} = -h_{ij}$. Nous multiplions les deux membres de cette égalité par g^{jl} , nous faisons la somme par rapport à j en utilisant la convention de Einstein et en tenant compte que $g_{kj} g^{jl} = \delta_k^l$. On obtient $b_i^l = -g^{lj} h_{ij}$, c'est à dire $b_i^k = -g^{kl} h_{li}$. ■

Définition 3.7.2 Les coefficients Γ_{ik}^l définis dans (46) s'appellent les coefficients de Christoffel de deuxième espèce. Les coefficients de Christoffel de première espèce sont définis par

$$\Gamma_{ikj} := \frac{1}{2}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}).$$

Remarquons les identités

$$\Gamma_{ik}^l = g^{lj} \Gamma_{ikj}, \quad \Gamma_{ikj} = \Gamma_{kij}, \quad \Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l,$$

donc les coefficients de Christoffel de deuxième espèce sont symétriques par rapport aux indices inférieurs, et les coefficients de Christoffel de première espèce sont symétriques par rapport aux premiers deux indices.

Écrivons la première formule de (46) pour les paires d'indices (i, j) et (i, k) :

$$f_{ij} = \Gamma_{ij}^l f_l + h_{ij} n, \quad f_{ik} = \Gamma_{ik}^l f_l + h_{ik} n \quad (52)$$

En dérivant la première formule de (52) par rapport à u^k et la deuxième formule par rapport à u^j on va obtenir les dérivées partielles du 3me ordre f_{ijk} et f_{ikj} respectivement. Mais le théorème de symétrie de Schwartz se généralise pour toutes les dérivées partielles donc on a $f_{ijk} = f_{ikj}$. En comparant les coefficients de f_l dans les deux membres de l'égalité $f_{ijk} = f_{ikj}$ on obtient une identité très importante qui fait apparaître les dérivées partielles des coefficients de Christoffel. En comparant les coefficients de n dans les deux membres de l'égalité $f_{ijk} = f_{ikj}$ on obtient une deuxième identité très importante qui fait apparaître les dérivées partielles des coefficients h_{ij} de la seconde forme fondamentale.

Théorème 3.7.3 (Conditions d'intégrabilité) *Pour une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ nous avons les identités :*

$$\Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) = g^{lm} (h_{ij} h_{kl} - h_{ik} h_{jl}) \quad (\text{l'équation de Gauss}) . \quad (53)$$

$$h_{ij,k} - h_{ik,j} + \Gamma_{ij}^l h_{lk} - \Gamma_{ik}^l h_{lj} = 0 \quad (\text{l'équation de Codazzi-Mainardi}) . \quad (54)$$

Démonstration: Puisque $(f_1(u), f_2(u), n(u))$ est une base de \mathbb{R}^3 pour tout $u \in U$ on a décompositions de la forme

$$f_{ijk} = A_{ijk}^m f_m + B_{ijk} n$$

En dérivant l'égalité $f_{ij} = \Gamma_{ij}^l f_l + h_{ij} n$ par rapport à u^k et en tenant compte de formules connues $n_k = -h_{kl} g^{lm} f_m$, on obtient facilement

$$A_{ijk}^m = \Gamma_{ij,k}^m + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - h_{ij} h_{kl} g^{lm} .$$

La propriété de symétrie $f_{ijk} = f_{ikj}$ implique $A_{ijk}^m = A_{ikj}^m$ donc $\Gamma_{ij,k}^m + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - h_{ij} h_{kl} g^{lm} = \Gamma_{ik,j}^m + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m - h_{ik} h_{jl} g^{lm}$, ce qui démontre l'équation de Gauss.

Pour calculer le coefficient B_{ijk} de n dans la décomposition de f_{ijk} on utilise la même méthode mais on tient compte que le coefficient de n dans f_{lk} est h_{lk} . On obtient

$$B_{ijk} = \Gamma_{ij}^l h_{lk} + h_{ij,k} ,$$

et la propriété de symétrie $B_{ijk} = B_{ikj}$ nous donne l'équation de Codazzi-Mainardi. ■

D'une manière similaire, on peut écrire la deuxième formule de (46) pour les indices i et j

$$n_i = -g^{kl} h_{li} f_k , \quad n_j = -g^{kl} h_{lj} f_k . \quad (55)$$

Remarque 3.7.4 *En dérivant la première formule de (55) par rapport à j et la deuxième par rapport à i on obtient les dérivées partielles n_{ij} et n_{ji} respectivement. Le théorème de symétrie de Schwartz nous donne $n_{ij} = n_{ji}$, et en comparant les coefficients de f_l dans les deux membres de cette égalité on obtient une deuxième démonstration de l'équation de Codazzi-Mainardi. En comparant les coefficients de n dans les deux membres de l'égalité $n_{ij} = n_{ji}$ on obtient l'égalité évidente $-h_{il} g^{lk} h_{kj} = -h_{jl} g^{lk} h_{ki}$ (obtenue par une simple permutation des indices de sommation l, k).*

Définition 3.7.5 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. Les composantes du tenseur de courbure de f sont les fonctions $R_{iljk} := g_{lm} R_{ijkm}^m : U \rightarrow \mathbb{R}$ où*

$$R_{ijkm}^m := \Gamma_{ij,k}^m - \Gamma_{ik,j}^m + (\Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^m) .$$

Le tenseur de courbure de f au point $u \in U$ est l'application l'application multilinéaire

$$R_u : T_u f \times T_u f \times T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}$$

donnée par

$$R_u(\xi^i f_i, \eta^l f_l, \zeta^j f_j, \omega^k f_k) = R_{iljk}(u) \xi^i \eta^l \zeta^j \omega^k .$$

Remarquons que le tenseur de courbure de f a $2^4 = 16$ composantes qui sont définies en utilisant seulement les coefficients de la première forme fondamentale de f et ses dérivées partielles du premier ordre (qui interviennent dans les coefficients de Christoffel) et second ordre (qui interviennent dans les dérivées partielles des coefficients de Christoffel). L'équation de Gauss nous permet d'exprimer ces composantes en utilisant les coefficients de la seconde forme fondamentale et de démontrer quelques propriétés de symétrie de ce système de fonctions.

Corollaire 3.7.6 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée.*

1. Les composantes du tenseur de courbure s'expriment en termes des coefficients de la seconde forme fondamentale :

$$R_{iljk} = h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl} , \quad (56)$$

2. Nous avons les propriétés de symétrie

$$R_{iljk} = -R_{ilkj} = -R_{ljk i} = R_{jkil} , \quad (57)$$

donc R_{iljk} est antisymétrique par rapport aux permutation des premiers et des derniers deux indices, et est symétrique par rapport à la permutation des paires (i, l) , (j, k) .

3. Toutes les composantes du tenseur de courbure (et donc le tenseur de courbure en intégralité) en $u \in U$ sont déterminées par

$$R_{1212}(u) = -R_{2112}(u) = -R_{1221}(u) = R_{2121}(u) = \det(\mathbf{H}(u)) ,$$

où $\det(\mathbf{H}(u)) = h_{11}(u)h_{22}(u) - h_{12}(u)^2$ est le déterminant de la seconde forme fondamentale de f en u .

En lisant de droite à gauche la formule (56) on constate qu'on peut exprimer le déterminant de la seconde forme fondamentale en termes des coefficients de la première forme fondamentale (et de leurs dérivées partielles du premier et second ordre), donc on obtient facilement un résultat surprenant qui a joué un rôle très important dans le développement de la géométrie différentielle : il s'agit de Teorema Egregium (le théorème remarquable) de Gauss

Théorème 3.7.7 (Teorema Egregium) La courbure de Gauss $K(u)$ d'une surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ s'exprime en termes des coefficients de la première forme fondamentale et de leur dérivées partielles du premier et second ordre. Plus précisément nous avons

$$K(u) = \frac{R_{1212}(u)}{\det(\mathbf{G}(u))} .$$

Pourquoi ce théorème est-il si important ? Il est important parce qu'il montre que la courbure de Gauss est un invariant métrique intrinsèque, ce qu'on va expliquer maintenant. En s'inspirant de la définition 3.5.11 on va dire que

Définition 3.7.8 Deux surfaces paramétrées $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont isométriques (au sens riemannien) s'il existe un difféomorphisme $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ telle que l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. les coefficients des premières formes fondamentales de f et $\tilde{f} \circ \phi$ coïncident, c'est à dire

$$g_{ij}(u) = \tilde{g}_{ik}(\phi(u)) \frac{\partial \phi^l}{\partial u^i}(u) \frac{\partial \phi^k}{\partial u^j}(u) \quad \forall u \in U .$$

2. pour toute courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow U$ on a $l(f \circ \gamma) = l(\tilde{f} \circ \phi \circ \gamma)$.

La première condition requiert que, après un changement de variables, les coefficients des premières formes fondamentales des deux surfaces coïncident. La deuxième condition requiert qu'il existe un changement de variables $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ tel que les longueurs de deux courbes paramétrées (sur les deux surfaces) qui se correspondent (via ϕ) coïncident.

Si f et \tilde{f} sont injectives alors un tel difféomorphisme ϕ définit une bijection $\Phi := \tilde{f} \circ \phi \circ f^{-1} : \text{im}(f) \rightarrow \text{im}(\tilde{f})$ qui préserve la longueur des courbes paramétrées, donc dans ce cas la condition de la définition 3.7.8 requiert l'existence d'une bijection différentiable entre les images $S := \text{im}(f)$, $\tilde{S} := \text{im}(\tilde{f})$ qui préserve la longueur des courbes paramétrées sur ces surfaces. Dans ce cas on va dire que S et \tilde{S} sont isométriques (au sens riemannien) et que $\Phi : S \rightarrow \tilde{S}$ est une isométrie (au sens riemannien) entre les deux surfaces. C'est cette terminologie qui correspond à notre intuition géométrique pour la notion de isométrie entre les surfaces.

Par exemple c'est facile de trouver deux surfaces S , \tilde{S} isométriques telle que S soit contenue dans un cône et \tilde{S} soit contenue dans un cylindre (ou dans un plan), bien que les "formes géométriques" des deux surfaces sont radicalement différentes. Et bien, le Teorema Egregium a comme conséquence immédiate :

Corollaire 3.7.9 Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux surfaces paramétrées isométriques (au sens riemannien) et $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ un difféomorphisme satisfaisant l'une des conditions équivalentes de la définition 3.7.8. Alors, en désignant par $K_f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $K_{\tilde{f}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ les courbures de Gauss de f et \tilde{f} on a $K_f(u) = K_{\tilde{f}}(\phi(u))$ pour tout $u \in U$.

Donc, pour deux surfaces isométriques (au sens riemannien) les deux courbures calculées dans des points correspondants coïncident.

On conclut cette section par une propriété simple concernant le tenseur de courbure d'une surface paramétrée.

Proposition 3.7.10 (*Propriétés de symétrie et d'invariance du tenseur de courbure*) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $R_u : T_u f \times T_u f \times T_u f \times T_u f \rightarrow \mathbb{R}$ son tenseur de courbure au point $u \in U$. Alors

1. $R_u(f_i, f_l, f_j, f_k) = R_{iljk}(u)$,
2. $R_u(X, Y, Z, W) = -R_u(Y, X, Z, W) = -R_u(X, Y, W, Z) = R_u(Z, W, X, Y)$ pour tous $X, Y, Z, W \in T_u f$.
3. Soit $\phi : V \rightarrow U$ un changement de variables, $\tilde{f} := f \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ et \tilde{R}_v le tenseur de courbure de \tilde{f} au point $v \in V$. Alors $R_{\phi(v)} = \tilde{R}_v$ pour tout $v \in V$.

La démonstration de la troisième affirmation s'appuie sur l'identité

$$\tilde{R}_{iljk}(v) = R_{i'l'j'k'}(\phi(v)) \frac{\partial \phi^{i'}}{\partial v^i} \frac{\partial \phi^{l'}}{\partial v^l} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial v^j} \frac{\partial \phi^{k'}}{\partial v^k} ,$$

où, à droite, nous avons une somme par rapport aux indices muets i', l', j', k' (donc une somme de $2^4 = 16$ termes). Cette identité résulte facilement de la première affirmation du corollaire 3.7.6 en utilisant la propriété d'invariance de la seconde forme fondamentale par rapport aux changements de variables.

3.8 Dérivation covariante et lignes géodésiques

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée d'image $S := \text{im}(f)$, et soit $c = f \circ \gamma$ une courbe paramétrée sur S , où $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée dans U .

Définition 3.8.1 *Un champ de vecteurs tangents le long de γ est une application différentiable $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $X(t) \in T_{\gamma(t)} f$ pour tout $t \in I$.*

Donc donner un champ de vecteurs tangents le long de γ signifie associer (d'une manière différentiable) à chaque $t \in I$ un vecteur tangent à f au point $\gamma(t)$. Si f est injective ceci revient intuitivement, à associer à chaque $t \in I$ un vecteur tangent à la surface S au point $c(t) = f(\gamma(t))$. Dans ce cas on va utiliser aussi la terminologie (plus intuitive) "champ de vecteur tangents à S le long de c ".

Soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est champ de vecteurs tangents le long de γ . Puisque $(f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)))$ est une base du plan tangent $T_{\gamma(t)} f$ on peut décomposer $X(t)$ sous la forme

$$X(t) = \xi^1(t) f_1(\gamma(t)) + \xi^2(t) f_2(\gamma(t)) = \xi^i(t) f_i(\gamma(t)) ,$$

où dans la dernière expression nous avons utilisé la convention de Einstein.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. Pour tout $u \in U$ on va désigner par $\text{pr}_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_u f$ la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur le plan tangent $T_u f$ de f au point u . Puisque la projection d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ sur la droite normale à f en u est $\langle n(u), v \rangle n(u)$ (pourquoi?) on a évidemment $\text{pr}_u(v) = v - \langle n(u), v \rangle n(u)$. D'autre part, en utilisant la base $(f_1(u), f_2(u), n(u))$ de \mathbb{R}^3 et l'orthogonalité $n(u) \perp T_u f$ on obtient la formule

$$\text{pr}_u(a^i f_i(u) + n(u)) = a^i f_i(u) . \tag{58}$$

Définition 3.8.2 *Soit $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs tangents le long de γ . La dérivée covariante de X est le champ de vecteurs tangents le long de γ donné par la formule*

$$\frac{\nabla X}{dt} := \text{pr}_{\gamma(t)} \frac{dX}{dt} .$$

Remarque 3.8.3 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $X, Y : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux champs de vecteurs tangents le long de $\gamma : I \rightarrow U$. Alors*

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla Y}{dt} \right\rangle .$$

En effet, le règle de dérivation de Leibniz donne

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t) \rangle = \left\langle \frac{dX}{dt}, Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{dY}{dt} \right\rangle .$$

En décomposant $\frac{dX}{dt} = \text{pr}_u\left(\frac{dX}{dt}\right) + \left\langle \frac{dX}{dt}, n(\gamma(t)) \right\rangle n(\gamma(t))$ et en tenant compte que $\langle n(\gamma(t)), Y(t) \rangle = 0$ (parce que $Y(t) \in T_{\gamma(t)}f$) on obtient $\left\langle \frac{dX}{dt}, Y(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\nabla X}{dt}, Y(t) \right\rangle$. Le même argument donne $\left\langle X(t), \frac{dY}{dt} \right\rangle = \left\langle X(t), \frac{\nabla Y}{dt} \right\rangle$. ■

On va donner maintenant une formule explicite pour la dérivée covariante d'un champ de vecteurs tangents le long d'un chemin. En dérivant la décomposition $X(t) = \xi^i(t)f_i(\gamma(t))$ de $X(t)$ par rapport à la base $(f_1(t), f_2(t))$ et en utilisant l'équation de Gauss on obtient par la formule (52)

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{d\xi^l}{dt}f_l(\gamma(t)) + \xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt}f_{ik}(\gamma(t)) = \frac{d\xi^l}{dt}f_l(\gamma(t)) + \xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt}(\Gamma_{ik}^l f_l + h_{ik}n)(\gamma(t)) = \\ &= \left(\frac{d\xi^l}{dt} + \Gamma_{ik}^l(\gamma(t))\xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt} \right) f_l(\gamma(t)) + h_{ik}(\gamma(t))\xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt}n(\gamma(t)) . \end{aligned}$$

En tenant compte de (58) on obtient la formule

$$\frac{\nabla X}{dt} = \left(\frac{d\xi^l}{dt} + \Gamma_{ik}^l(\gamma(t))\xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt} \right) f_l(\gamma(t)) . \quad (59)$$

Définition 3.8.4 *Un champ de vecteurs tangents le long de γ est dit parallèle si $\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0$, c'est à dire si les composantes $\xi^i : I \rightarrow \mathbb{R}$ de X vérifient le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre (sans second membre)*

$$\frac{d\xi^l}{dt} + \Gamma_{ik}^l(\gamma(t))\xi^i(t)\frac{d\gamma^k}{dt} = 0 , \quad l \in \{1, 2\} . \quad (60)$$

Écrivons ce système différentiel linéaire du premier ordre sous la forme standard utilisée dans la théorie générale des systèmes différentiels. Posons $a_i^l(t) := -\Gamma_{ik}^l(\gamma(t))\frac{d\gamma^k}{dt}$ et soit $A(t)$ la matrice carrée d'ordre 2 définie par $A(t) := (a_i^l(t))_{1 \leq l, i \leq 2}$. Notons $\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors le système différentiel (60) devient

$$\xi'(t) = A(t)\xi(t) . \quad (61)$$

Le théorème fondamental d'existence et unicité des solutions d'un systèmes différentiel linéaires du premier ordre (sans second membre) affirme

Théorème 3.8.5 *Soit $I \ni t \mapsto A(t) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une application de classe C^r . Alors l'ensemble \mathcal{S} des solutions $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système différentiel (61) est un sous-espace vectoriel de dimension n de $C^{r+1}(I, \mathbb{R}^n)$ et pour tout $t_0 \in I$ l'application $\text{ev}_{t_0} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par $\text{ev}_{t_0}(\xi) := \xi(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Donc, pour tout $v_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une unique solution $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ du système (61) qui satisfait la condition initiale $\xi(t_0) = v_0$.

Corollaire 3.8.6 *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, soit $\gamma : I \rightarrow U$ une courbe paramétrée de U et $t_0 \in I$. Alors pour tout $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}f$ il existe un unique champ $X^{v_0} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de vecteurs tangents le long de γ qui est parallèle et tel que $X^{v_0}(t_0) = v_0$.*

On dit que le champ X donné par ce corollaire est obtenu (à partir de v_0) par *transport parallèle* le long de γ . Supposons maintenant que $I = [t_0, t_1]$ et posons $u_0 := \gamma(t_0)$, $u_1 := \gamma(t_1)$. Le transport parallèle le long de γ nous permet de définir un *isomorphisme linéaire isométrique*

$$\Gamma(\gamma) : T_{u_0}f \rightarrow T_{u_1}f$$

qui s'appelle *l'isomorphisme défini par transport parallèle le long de γ* . Cet isomorphisme est défini de la manière suivante : Pour un vecteur $v_0 \in T_{u_0}f$ le vecteur tangent $\Gamma(\gamma)(v_0) \in T_{u_1}f$ est la valeur $X^{v_0}(t_1)$ du champ X^{v_0} de vecteurs tangent le long de γ qui est parallèle et satisfait la condition initiale $X^{v_0}(t_0) = v_0$. Le fait que $\Gamma(\gamma)$ est isométrique résulte facilement de la remarque 3.8.3.

Définition 3.8.7 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et $c = f \circ \gamma$ une courbe paramétrée sur $S := \text{im}(f)$, où $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ est une courbe paramétrée dans U . On dit que c est une géodésique de f si $\frac{\nabla c'(t)}{dt} = 0$, donc si le champ tangent $t \mapsto c'(t) \in T_{\gamma(t)}f$ (le champ tangent vitesse) est parallèle.

Remarque 3.8.8 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée .

1. Une courbe $c = f \circ \gamma$ sur $S := \text{im}(f)$ est une géodésique si et seulement si γ est une solution du système différentiel d'ordre 2

$$\frac{d^2\gamma^l}{dt^2} + \Gamma_{ik}^l(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0, \quad l \in \{1, 2\}. \quad (62)$$

2. Si $c = f \circ \gamma$ est une géodésique alors l'application $t \mapsto \|c'(t)\|$ est constante. Autrement dit, toute géodésique est une courbe à vitesse de norme constante.

La première affirmation résulte directement de la condition explicite de parallélisme mentionnée dans la définition 3.8.4 en remplaçant $\xi^l(t)$ par $\frac{d\gamma^l}{dt}$. La deuxième affirmation résulte facilement en dérivant la fonction $t \mapsto \|c'(t)\|^2 = \langle c'(t), c'(t) \rangle$ et en utilisant la remarque 3.8.3. ■

En utilisant la théorie générale des équations différentielles ordinaires on obtient le résultat suivant concernant l'existence et l'unicité locale des géodésiques :

Proposition 3.8.9 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, soit $S = \text{im}(f)$ son image et soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in U$ et $v_0 \in T_{u_0}f$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une géodésique $c = f \circ \gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow S$ satisfaisant les conditions initiales $\gamma(t_0) = u_0$ et $c'(t_0) = v_0$. Deux telles géodésiques coïncident sur l'intersection de leur domaines de définition.

Pourquoi on introduit et on étudie les géodésiques d'une surface paramétrée ? On va voir que les géodésiques correspondent précisément aux points critiques de la fonctionnelle d'énergie sur l'espace des courbes à extrémités fixes. Les géodésiques sont aussi des points critiques particuliers de la fonctionnelle longueur sur le même espace ; les exemples les plus simples de géodésiques sont les courbes qui minimisent cette fonctionnelle, comme par exemple les petits arcs (paramétrés à vitesse de norme constante) des grands cercles sur une sphère. On va expliquer brièvement et sans démonstrations ces propriétés importantes.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, $I = [t_0, t_1]$ un intervalle fermé fixé, et soient $u_0, u_1 \in U$ appartenant à la même composante connexe par arcs de U . Nous notons par \mathcal{C}_{u_0, u_1} l'ensemble des courbes paramétrées $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U$ telles que $\gamma(t_0) = u_0$, $\gamma(t_1) = u_1$. Une élément de \mathcal{C}_{u_0, u_1} s'appelle courbe paramétrée (ou chemin) dans U à extrémités fixes u_0, u_1 . Une famille à un paramètre $(\gamma_s)_{s \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ de \mathcal{C}_{u_0, u_1} (donc une famille à un paramètre de chemins définis sur I à extrémités fixes u_0, u_1) est dite différentiable si l'application $] -\varepsilon, \varepsilon[\times [t_0, t_1] \ni (s, t) \mapsto \gamma_s(t) \in U$ est différentiable.

Nous définissons les applications

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}_{u_0, u_1} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{E} : \mathcal{C}_{u_0, u_1} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

données par

$$\mathcal{L}(\gamma) := l(f \circ \gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t)} dt \quad (\text{la fonctionnelle longueur}),$$

$$\mathcal{E}(\gamma) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \|(f \circ \gamma)'(t)\|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) dt \quad (\text{la fonctionnelle énergie}).$$

Le théorème suivant donne une interprétation géométrique des géodésiques. Les étudiants intéressés par la géométrie différentielle sont invités à réfléchir à la démonstration et de consulter la littérature.

Théorème 3.8.10 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée et soit $\gamma \in \mathcal{C}_{u_0, u_1}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $c := f \circ \gamma$ est une géodésique,
2. γ est un point critique de la fonctionnelle d'énergie sur \mathcal{C}_{u_0, u_1} , c'est à dire pour toute famille différentiable à un paramètre $(\gamma_s)_{s \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ de \mathcal{C}_{u_0, u_1} telle que $\gamma_0 = \gamma$ on a

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{E}(\gamma_s) = 0,$$

3. $\|c'\|$ est constante et γ est un point critique de la fonctionnelle longueur sur \mathcal{C}_{u_0, u_1} , c'est à dire pour toute famille différentiable à un paramètre $(\gamma_s)_{s \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ de \mathcal{C}_{u_0, u_1} telle que $\gamma_0 = \gamma$ on a

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}(\gamma_s) = 0 .$$

Corollaire 3.8.11 *Supposons que $\|c'\|$ est constante et γ est un point de minimum absolu de la fonctionnelle longueur \mathcal{L} sur \mathcal{C}_{u_0, u_1} . Alors $c := f \circ \gamma$ est une géodésique de la surface paramétrée f .*

Une telle géodésique s'appelle *géodésique minimisante* qui joint les points $f(u_0)$, $f(u_1)$. Une telle géodésique n'existe pas toujours.

Exemple : Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et rayon 1, soit $N := (0, 0, 1)$ et considérons la paramétrisation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ donnée par l'inverse de la projection stéréographique, c'est à dire

$$f(u) := \frac{1}{\|u\|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2u^1 \\ 2u^2 \\ \|u\|^2 - 1 \end{pmatrix} .$$

On peut montrer qu'une courbe paramétrée $c = f \circ \gamma$ sur $S^2 \setminus \{N\}$ est une géodésique de f si et seulement si $\|c'\|$ est constante et $\text{im}(c)$ est contenue dans un grand cercle de S^2 . Une géodésique peut parcourir un grand cercle plusieurs fois.

Considérons deux points $a, b \in S^2 \setminus \{N\}$ qui sont proches l'un de l'autre et tels que le grand cercle qui les contient ne passe pas par N . Une paramétrisation à vitesse de norme constante du petit arc (de grand cercle) qui joint a et b définit une géodésique minimisante, tandis qu'une paramétrisation à vitesse de norme constante du grand arc (de grand cercle) qui joint a et b définit une géodésique non-minimisante.

Soient $a, b \in S^2$ tels que N se trouve sur le petit arc du grand cercle qui les contient. Ce petit arc définit bien une géodésique minimisante de S^2 qui joint a à b (par rapport à une paramétrisation convenable), mais cet arc n'est pas contenu dans $\text{im}(f) = S^2 \setminus \{N\}$. On a besoin d'une paramétrisation de la sphère dont l'image contient N pour "détecter" cette géodésique, par exemple l'inverse de la projection stéréographique de centre $S = (0, 0, -1)$ dont l'image est $S^2 \setminus \{S\}$. Dans cette situation on constate qu'il n'existe aucune géodésique minimisante de la surface paramétrée donnée f qui joint a et b .

On peut définir la notion de géodésique pour une surface non-paramétrée de \mathbb{R}^3 (voir la chapitre suivant). La sphère S^2 (en intégralité) est une telle surface. En utilisant ce formalisme on constate que *les géodésiques de la sphère sont les arcs de grands cercles (ou les grands cercles en intégralité) paramétrés à vitesse de norme constante*. Sur une surface fermée (comme c'est le cas de S^2), si on fixe deux points, il existe toujours (au moins) une géodésique minimisante qui les joint.

4 Sous-variétés dans \mathbb{R}^d . Surfaces compactes et le théorème de Gauss-Bonnet

4.1 Introduction

Nous avons vu que la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ peut être munie de plusieurs paramétrisations, par exemple l'application réciproque de la projection stéréographique $S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou la paramétrisation obtenue en regardant la sphère comme surface de révolution particulière. D'autre part on peut montrer facilement qu'il n'existe aucune immersion injective $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(U) = S^2$, donc la sphère S^2 n'est pas l'image d'une immersion injective. Nous avons besoin de plusieurs immersions injective pour couvrir la sphère, par exemple on peut prendre les applications réciproques des deux projections stéréographique $S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Ces remarques montrent que la théorie des surfaces paramétrées n'est pas adaptée à l'étude *globale* des surfaces de \mathbb{R}^3 ; cette théorie est intéressante pour comprendre la géométrie *locale* des surfaces. Par exemple, pour montrer que la courbure de la sphère $S(q, R)$ de centre $q \in \mathbb{R}^3$ et rayon R est $K = \frac{1}{R^2}$ (donc constante) il suffit de trouver pour tout $x \in S(q, R)$ une paramétrisation $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $x \in \text{im}(f) \subset S(q, R)$ telle que la courbure de Gauss de f est constante $\frac{1}{R^2}$. Donc la courbure de Gauss a un caractère local et peut être étudiée en utilisant les paramétrisations locales. Par contre, si on s'intéresse par exemple à l'aire totale d'une surface, où de l'intégrale de la courbure de Gauss sur la surface, il s'agira d'une propriété globale de la surface, donc nous devons introduire et étudier ces notions sans faire appel aux paramétrisations locales. Dans ce chapitre nous allons introduire et étudier les surfaces (non-paramétrées) de \mathbb{R}^3 , en particulier les surfaces compactes.

Avant de donner les premières définitions rappelons quelques notions fondamentales de topologie.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle *voisinage* de x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$. Remarquons qu'un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert (voir la chapitre 3.1) si et seulement si il est un voisinage de u pour tout $u \in U$. Un voisinage ouvert de x est un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x \in U$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit *point adhérent* à A si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, donc si tout voisinage de x coupe A . L'ensemble des points adhérents à A s'appelle *l'adhérence* de A et est désigné par \bar{A} . On a évidemment $A \subset \bar{A}$. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est dit *fermé* si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1. $\bar{F} = F$, donc tout point adhérent à F est élément de F .
2. Le complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.
3. Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F qui converge dans \mathbb{R}^n on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in F$.

Un *recouvrement ouvert* de A est une famille (finie ou infinie) $(U_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts U_i de \mathbb{R}^n telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit *compact* si tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de K admet un sous-recouvrement fini, donc il existe $I_0 \subset I$ fini tel que $(U_i)_{i \in I_0}$ soit encore un recouvrement de K .

L'espace \mathbb{R}^n est un espace métrique et, d'après un résultat fondamental de topologie, la compacité dans les espaces métriques est équivalente à la compacité séquentielle. Donc un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si il est séquentiellement compact, c'est à dire si toute suite de K admet une suite extraite convergente dans K . Puisque \mathbb{R}^n est un espace normé de dimension finie on peut montrer que

Proposition 4.1.1 *Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est (séquentiellement) compact si et seulement si K est fermé et borné.*

Donc K est compact si et seulement si $\bar{K} = K$ et il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in K$ on a $\|x\| \leq M$.

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : A \rightarrow B$ est dite

1. continue en $a \in A$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(B(a, \delta_\varepsilon) \cap A) \subset B(\varphi(a), \varepsilon)$,
2. continue, si φ est continue en tout point $a \in A$,
3. homéomorphisme si φ est continue, bijective et $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ est aussi continue.

En utilisant le fait que tout l'image d'un compact par une application continue est compacte, on peut démontrer facilement la proposition suivante :

Proposition 4.1.2 *Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ et $\varphi : A \rightarrow B$ une application continue est bijective. Si A est compact, alors φ^{-1} est continue, donc φ est un homéomorphisme.*

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Une séparation de A est une paire (U, V) d'ouverts de \mathbb{R}^n tels que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ et $A \cap U \cap V = \emptyset$. A est dit *connexe* s'il n'admet aucune séparation. Intuitivement "connexe" signifie être constitué "en un seul morceau". Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit *connexe par arcs* si pour toute paire $(x_0, x_1) \in A \times A$ il existe une application continue $c : [0, 1] \rightarrow A$ (donc un "chemin continu") telle que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_1$. Donc A est connexe par arcs si tous deux points de A peuvent être joints par un chemin continu dans A . Notons que

1. tout sous-ensemble connexe par arcs est connexe,
2. un sous-ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

La composante connexe (respectivement la composante connexe par arcs) dans A d'un point $x \in A$ est le sous-ensemble connexe (respectivement connexe par arcs) maximal C tel que $x \in C \subset A$. Tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ se décompose en réunion disjointe de ses composantes connexes (connexe par arcs). Par exemple le complémentaire $S^2 \setminus E$ de l'équateur $E := S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ dans S^2 a deux composantes connexes, à savoir les deux hémisphères.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un sous-ensemble $B \subset A$ est dit *ouvert dans la topologie induite* de A (ou dans la topologie de A regardé comme sous-espace de \mathbb{R}^n) s'il s'écrit sous la forme $B = A \cap U$, où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert. B est ouvert dans la topologie induite de A si et seulement si pour tout $b \in B$ il existe un voisinage ouvert U_b de b dans \mathbb{R}^n tel que $U_b \cap A \subset B$. Par exemple $S^2 \setminus E$ est un ouvert dans la topologie relative de S^2 , mais il n'est pas ouvert dans \mathbb{R}^3 .

4.2 Plongements et sous-variétés de \mathbb{R}^d

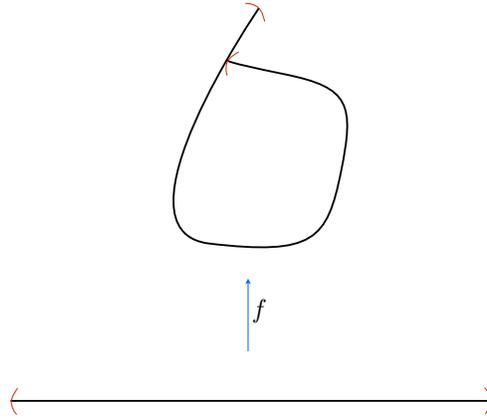
Définition 4.2.1 *Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $u \in U$. Une application différentiable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite*

1. *submersion en u si $d_u f$ est surjective, donc si on a $\text{rang}(J_u f) = n$.*
2. *submersion si elle est submersion en tout point $u \in U$.*

3. immersion en u si la différentielle $d_u f$ est injective, donc si on a $\text{rang}(J_u f) = m$.

4. immersion si elle immersion en tout point $u \in U$.

Remarquer que les conditions " f est une submersion en u ", " f est une immersion en u " sont des conditions ouvertes, i.e. si f est une submersion (immersion) en $u \in U$, alors il existe un voisinage ouvert U' de u en U tel que que f soit une submersion (immersion) sur U' .



Une immersion injective $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit une bijection continue $U \rightarrow f(U)$, mais en général cette bijection continue n'est pas un homéomorphisme, donc l'application réciproque $f(U) \rightarrow U$ n'est pas nécessairement continue. Remarquer que l'application réciproque $f(U) \rightarrow U$ est continue si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de U telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^n vers un point $f(v) \in f(U)$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$.

Le dessin ci-dessus montre un exemple d'immersion injective $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ pour laquelle l'application réciproque $f(]a, b[) \rightarrow]a, b[$ n'est pas continue. Pourquoi ?

Définition 4.2.2 Un plongement $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n est une immersion injective qui induit un homéomorphisme $U \rightarrow f(U)$.

Le dessin ci-dessus nous donne donc un exemple d'immersion injective qui n'est pas un plongement.

Définition 4.2.3 1. Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^d$ est dit sous-variété de dimension m si pour tout point $x \in M$ l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(a) Il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ de x , un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$ et un plongement $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $f(U) = V \cap M$.

(b) Il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ de x , un voisinage ouvert W de $0_{\mathbb{R}^d}$ dans \mathbb{R}^d et un difféomorphisme $\Phi : V \rightarrow W \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^{d-m}}\}) .$$

(c) Il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ de x et une application différentiable $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ telle que

(i) $V \cap M = F^{-1}(0)$ et

(ii) F est une submersion en tout point $v \in V \cap M = F^{-1}(0)$.

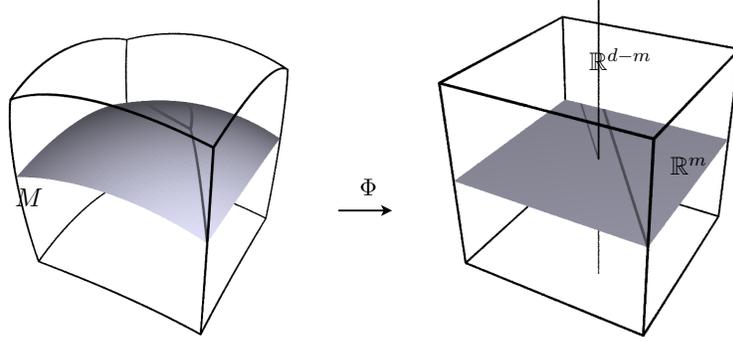
2. Si $M \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété de dimension $m = d - 1$, on va dire que M est une hypersurface de \mathbb{R}^d .

3. Si $M \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété de dimension 2, on va dire que M est une surface de \mathbb{R}^d .

4. Si $M \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété de \mathbb{R}^d qui est compacte en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^d , on va dire que M est compacte, ou fermée.

Remarque 4.2.4 Les trois conditions (a), (b), (c) dans la définition 4.2.3 sont équivalentes.

Démonstration: (a) \Rightarrow (b). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ un plongement tel que $f(U) = V \cap M$. En composant f à droite avec une translation si nécessaire on peut supposer que $0_{\mathbb{R}^m} \in U$ et $f(0_{\mathbb{R}^m}) = x$. Considérons une matrice $A \in M_{d,d-m}$ telle que la matrice $(J_{0_{\mathbb{R}^m}} f \ A) \in M_{d,d}(\mathbb{R})$ soit inversible. Pour trouver une telle matrice il suffit de compléter la famille libre formée par les m colonnes de la matrice jacobienne $J_{0_{\mathbb{R}^m}} f$ à une base de \mathbb{R}^d . La différentielle en $0_{\mathbb{R}^d} = (0_{\mathbb{R}^m}, 0_{\mathbb{R}^{d-m}})$ de l'application $\Psi : U \times \mathbb{R}^{d-m} \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\Psi(u, v) = f(u) + Av$ est bijective, donc d'après le théorème d'inversion locale il existe un voisinage ouvert $W \subset U \times \mathbb{R}^{d-m}$ de $0_{\mathbb{R}^d}$, un



voisinage ouvert $V' \subset V$ de $x = \Psi(0_{\mathbb{R}^d})$ tel que Ψ induit un difféomorphisme $W \rightarrow V'$. Il suffit de poser $\Phi := \Psi^{-1}$.

(b) \Rightarrow (c) Il suffit de poser $F := \text{pr}_{\mathbb{R}^{d-m}} \circ \Phi$, où $\text{pr}_{\mathbb{R}^{d-m}}$ désigne la projection $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$. Remarquons que l'application F ainsi obtenue est une submersion sur tout son domaine de définition.

(c) \Rightarrow (a) Soit $x \in M$. Supposons que (c) est vraie, et soit V un voisinage ouvert de x et $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ une application différentiable telle que $V \cap M = F^{-1}(0)$ et F est une submersion en tout point $v \in V \cap M = F^{-1}(0)$.

En composant F à droite avec l'isomorphisme défini par une permutation convenable des coordonnées on peut supposer que les dernières $d - m$ colonnes de la matrice jacobienne $J_x F$ sont linéairement indépendantes. Écrivons tout point $y \in V$ sous la forme $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 \in \mathbb{R}^m$, $y_2 \in \mathbb{R}^{d-m}$. D'après le théorème de la fonction implicite, on déduit que, dans un voisinage suffisamment petit $V' = U_1 \times U_2$ de $x = (x_1, x_2)$ dans \mathbb{R}^d l'équation $F(y_1, y_2) = 0$ est équivalente à une équation de la forme $y_2 = g(y_1)$ pour une fonction différentiable $g : U_1 \rightarrow U_2$. Il suffit de poser $f(u) := (u, g(u))$. ■

Si $C \subset \mathbb{R}^d$ est une sous-variété de dimension m et $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ est une submersion $F : V \rightarrow \mathbb{R}^{d-m}$ telle que $V \cap C = F^{-1}(0)$, on dit que $F = 0$ est une équation implicite locale pour la sous-variété C . Il existe des sous-variétés intéressantes qui peuvent être définies en utilisant une seule submersion, par exemple la sphère $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ est définie par l'équation $F = 0$ où $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est la submersion définie par $F(x) = \sum_{i=1}^d x_i^2 - 1 = 0$.

Définition 4.2.5 Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^d . Une paramétrisation locale de M est une application bijective $f : U \rightarrow V$, où $U \subset \mathbb{R}^m$ est ouvert et $V \subset M$ est un ouvert dans la topologie induite, telle que la composition $U \rightarrow V \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ soit un plongement $U \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'application réciproque $\alpha = f^{-1} : V \rightarrow U$ d'une paramétrisation locale s'appelle carte locale, ou système local de coordonnées de M .

Si $x \in V$ on va dire que $f : U \rightarrow V$ (respectivement $\alpha : V \rightarrow U$) est une paramétrisation locale (respectivement carte locale) de M autour de x .

Une application $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite différentiable si pour toute paramétrisation locale $f : U \rightarrow V \subset M$, la composition $F \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable.

Si M est une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^d alors, par définition, pour tout point $x \in M$ il existe une paramétrisation locale (donc aussi une carte locale) autour de x . Si $f : U \rightarrow V \subset M$, $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subset M$ sont deux paramétrisations locales, alors $f^{-1}(\tilde{V})$, $\tilde{f}^{-1}(V)$ sont des ouverts de \mathbb{R}^m et l'application $\tilde{f}^{-1} \circ f : f^{-1}(\tilde{V}) \rightarrow \tilde{f}^{-1}(V)$ est un difféomorphisme, qui s'appelle l'application de changement de paramétrisations (ou l'application de changement de cartes).

Définition 4.2.6 Soit M une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^d et $x \in M$. Le sous-espace tangent $T_x M$ est défini par

$$T_x M := \text{im}(d_u f),$$

où f est une paramétrisation locale autour de x et $f(u) = x$. Le sous-espace normal $N_u M$ est le supplémentaire orthogonal $N_u M := T_u M^\perp$.

La première forme fondamentale de M est la famille $(g_x)_{x \in M}$ où, pour tout $x \in M$, on a noté par

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

le produit scalaire sur T_x défini par la restriction à $T_x M \times T_x M$ du produit scalaire standard de \mathbb{R}^d .

Un champ tangent (respectivement normal) sur M est une application différentiable $X : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $x \in M$ on a $X(x) \in T_x M$ (respectivement $X(x) \in N_x M$).

Notons que l'espace tangent $T_x M$ (et donc aussi $N_x M$) ne dépend pas de la paramétrisation locale choisie, mais seulement de x et de M . Pourquoi ?

Définition 4.2.7 *Un ensemble \mathcal{A} de cartes $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ de M s'appelle atlas si $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = M$. Un atlas \mathcal{A} de M s'appelle atlas orienté si toute application de changement de carte $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(V_\beta) \rightarrow \beta(V_\alpha)$ (pour $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$) préserve l'orientation. Une sous-variété M est dite orientable si elle admet un atlas orienté. Dans ce cas on appelle orientation de M une classe d'équivalence d'atlas orientés de M , deux atlas orientés $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ étant considérés équivalents si leur réunion $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ est un atlas orienté. Une sous-variété orientée de \mathbb{R}^d est une sous-variété de \mathbb{R}^d munie d'une orientation, donc une paire (M, \mathcal{O}) où M est une sous-variété de \mathbb{R}^d et \mathcal{O} une orientation de M .*

Soit (M, \mathcal{O}) une sous-variété orientée et \mathcal{A} un atlas orienté qui définit l'orientation fixée \mathcal{O} . On va dire qu'une carte locale $\beta : V \rightarrow A$ est compatible avec l'orientation \mathcal{O} si application de changement de carte $\beta \circ \alpha^{-1} : \alpha(V_\beta) \rightarrow \beta(V_\alpha)$ préserve l'orientation pour toute carte locale $\alpha \in \mathcal{A}$. L'ensemble des cartes locales compatibles avec \mathcal{O} est encore un atlas orienté de M , à savoir l'atlas orienté maximal qui contient \mathcal{A} . Si $\beta : V \rightarrow A$ est compatible avec \mathcal{O} , on va dire aussi que la paramétrisation locale associé $\beta^{-1} : U \rightarrow V \subset M$ est compatible avec \mathcal{O} .

Une orientation \mathcal{O} d'une sous-variété M de dimension m définit une famille $(\mathcal{O}_x)_{x \in M}$, où \mathcal{O}_x est une orientation de l'espace tangent $T_x M \subset \mathbb{R}^d$ (voir le chapitre 1.3) : \mathcal{O}_x est définie par une base (v_1, \dots, v_m) de $T_x M$ ayant la propriété que, pour une paramétrisation $f : U \rightarrow V \subset M$ compatible avec \mathcal{O} , la base $(d_u f)^{-1}(v_1, \dots, v_m)$ (où $f(u) = x$) est une base directe de \mathbb{R}^m .

Définition 4.2.8 *Soit (M, \mathcal{O}) une sous-variété orientée de dimension m de \mathbb{R}^d et $x \in M$. Nous définissons une forme m -linéaire alternée*

$$\nu_x : \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{m \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

par $\nu_x(v_1, \dots, v_m) = \det(v_i^j)$, où (v_i^1, \dots, v_i^m) sont les coordonnées de v_i par rapport à une base orthonormale du sous-espace $T_x \subset \mathbb{R}^d$ compatible avec l'orientation \mathcal{O}_x . La famille $\nu = (\nu_x)_{x \in M}$ s'appelle la forme de volume de (M, \mathcal{O}) .

Dans la terminologie de la géométrie différentielle moderne, ν est une forme différentielle de degré m sur M . En utilisant les propriétés de la matrice de Gram (plus précisément la démonstration du Corollaire 1.3.6) on obtient facilement la formule suivante qui exprime la forme de volume d'une sous-variété orientée en coordonnées locales.

Remarque 4.2.9 *Soit $f : U \rightarrow V \subset M$ une paramétrisation compatible avec \mathcal{O} . Alors*

$$\nu(\partial_1 f(u), \dots, \partial_m f(u)) = \sqrt{\det(g_{ij}(u))} \quad \text{où } g_{ij}(u) := \langle \partial_i f(u), \partial_j f(u) \rangle .$$

Si \mathcal{A} est un atlas orienté de M on obtient facilement un atlas non-équivalent (donc une autre orientation de M) en composant les cartes de \mathcal{A} avec des difféomorphismes $\phi : U' \rightarrow U$ qui changent l'orientation de \mathbb{R}^m (donc dont le jacobien est négatif en tout point). Si M est orientable et connexe alors M admet exactement deux orientations.

Pour les hypersurfaces la notion de orientation a une interprétation géométrique importante :

Remarque 4.2.10 *Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface. Alors*

1. M est orientable si et seulement si elle admet un champ normal unitaire.
2. Si M est orientable, les données suivantes sont équivalentes
 - (a) Une orientation de M .
 - (b) Un champ normal unitaire sur M .

Démonstration: 1. Si \mathcal{A} est un atlas orienté de M alors on définit un champ normal unitaire sur M de la manière suivante : soit $x \in M$, $\alpha : V \rightarrow U \in \mathcal{A}$ une carte locale autour de x et $f := \alpha^{-1} : U \rightarrow V$ la paramétrisation locale associée. On pose

$$n(x) = \frac{1}{\|\partial_1 f(u) \wedge \dots \wedge \partial_{d-1} f(u)\|} \partial_1 f(u) \wedge \dots \wedge \partial_{d-1} f(u) \quad \text{où } u = \alpha(x)$$

(voir le chapitre 1.2). En utilisant la propriété 9. de la Proposition 1.2.6 et la fait que le jacobien de l'application de changement de carte est positif, on déduit que pour toute autre carte $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U} \in \mathcal{A}$ autour de x on a

$$\partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}) \wedge \dots \wedge \partial_{d-1} \tilde{f}(\tilde{u}) \in \mathbb{R}_+^* \partial_1 f(u) \wedge \dots \wedge \partial_{d-1} f(u) \quad \text{où } \tilde{u} = \tilde{\alpha}(x) ,$$

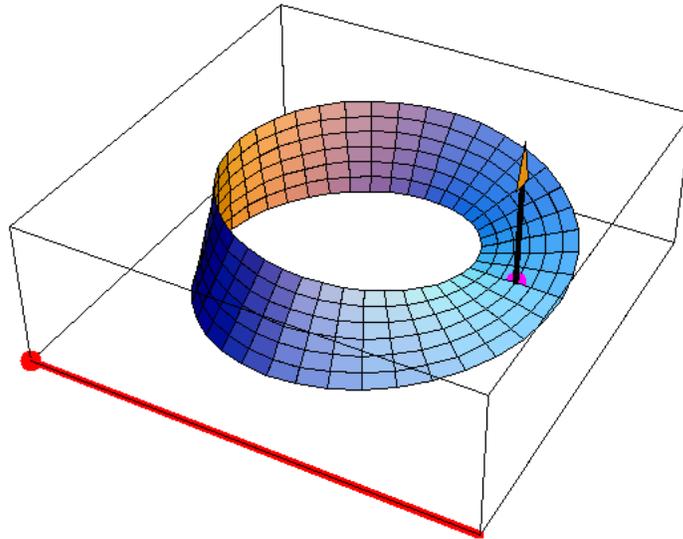
donc les vecteurs unitaires obtenus en normalisant les deux produits vectoriels

$$\partial_1 f(u) \wedge \cdots \wedge \partial_{d-1} f(u) , \partial_1 \tilde{f}(\tilde{u}) \wedge \cdots \wedge \partial_{d-1} \tilde{f}(\tilde{u})$$

coïncident. Ceci montre que $n(x)$ ne dépend pas de la carte locale autour de x choisie, donc nous avons défini d'une manière cohérente une application $n : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est évidemment différentiable, et telle que $n(u)$ est un vecteur normal unitaire pour tout $x \in M$. Réciproquement, soit $n : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ normal unitaire sur M . Une carte $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ est dite compatible avec n si, en posant $f = \alpha^{-1}$, la base $(f_1(u), \dots, f_{d-1}(u), n(u))$ est directe pour tout $u \in U_\alpha$. C'est facile de voir que l'ensemble des cartes compatibles avec n est un atlas orienté de M .

La deuxième affirmation est proposée comme exercice. ■

Exemples : La sphère, le tore, le cône, le cylindre, les surfaces quadriques, toutes les surfaces de révolution sont des surfaces orientables de \mathbb{R}^3 . Le ruban de Möbius (voir la figure ci-jointe) n'est pas orientable. Expliquer pourquoi. Essayer de construire un champ normal unitaire au ruban de Möbius.



Remarque 4.2.11 On peut montrer que toute surface compacte de \mathbb{R}^3 est orientable. Par contre, dans \mathbb{R}^4 il existe des surfaces non-orientables compactes, par exemple l'image d'un plongement dans \mathbb{R}^4 du plan projectif réel.

Définition 4.2.12 1. Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une surface.

- (a) La première forme fondamentale de M est la famille $(g_x)_{x \in M}$ où pour tout $x \in M$ on a noté par $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire sur T_x défini par la restriction à $T_x M \times T_x M$ du produit scalaire standard de \mathbb{R}^d .
- (b) La courbure de Gauss de M est l'application $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $K(x) := K_f(f^{-1}(x))$, où $f : U \rightarrow V \subset M$ est une paramétrisation de M autour de x , et $K_f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par la formule

$$K_f(u) := \frac{R_{1212}(u)}{\det(\mathbf{G}(u))}$$

(voir la définition 3.7.5).

2. Soit (M, \circ) une surface orientée dans \mathbb{R}^3 .

- (a) La seconde forme fondamentale de (M, \circ) est la famille $(h_x)_{x \in M}$ où pour tout $x \in M$ on a noté par $h_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application bilinéaire symétrique donnée par la seconde forme fondamentale en $u := f^{-1}(x)$ d'une paramétrisation locale $f : U \rightarrow V \subset M$ compatible avec l'orientation \circ .
- (b) Les courbures principales et la courbure moyenne de (M, \circ) en $x \in M$ coïncident, par définition, avec les courbures principales et la courbure moyenne en $u := f^{-1}(x)$ associées à une paramétrisation locale $f : U \rightarrow V \subset M$ compatible avec l'orientation \circ .

Remarque 4.2.13 1. En utilisant la formule donnée par le Teorema Egregium, nous avons introduit la courbure de Gauss pour une surface de \mathbb{R}^d pour $d \geq 3$ arbitraire. Si $d = 3$ on peut utiliser la formule alternative

$$K_f(u) := \frac{\det(\mathbf{H}(u))}{\det(\mathbf{G}(u))}$$

2. D'après les propriétés d'invariance connues pour les deux formes fondamentales, les courbures principales et la courbure de Gauss d'une surface paramétrée, les définitions 4.2.12 sont cohérentes, donc indépendantes des paramétrisations locales (autour de x) choisies. Pour la courbure de Gauss

3. Il faut souligner que nous avons besoin d'une orientation fixée de $M \subset \mathbb{R}^3$ pour donner un sens à la deuxième forme fondamentale et aux courbures principales de M .

4.3 Intégration sur les sous-variétés. Décompositions lisses en cellules. Le théorème de Gauss-Bonnet

Soit M une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^d . En utilisant la première forme fondamentale de M on peut définir un structure d'espace mesurable sur M et une mesure $|\nu|$ sur cet espace. Notons que pour introduire ces structures on n'a pas besoin d'une orientation de M .

On dit qu'un sous-ensemble $E \subset M$ est mesurable au sens de Lebesgue (respectivement au sens de Jordan) si pour toute carte $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ de M , l'image $\alpha(E \cap V_\alpha)$ est mesurable au sens de Lebesgue (respectivement au sens de Jordan). Si $E \subset M$ est mesurable au sens de Lebesgue alors on définit son volume $\nu(E)$ de la manière suivante

1. S'il existe une carte $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ de M telle que $E \subset V_\alpha$ alors on pose

$$|\nu|(E) = \int_{\alpha(E)} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du_1 \dots du_m, \quad (63)$$

où g_{ij} sont les coefficients de la première forme fondamentale de la paramétrisation $f := \alpha^{-1}$.

2. Dans le cas général E se décompose en réunion $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ d'une famille finie ou dénombrable de sous-ensembles mesurables tels que pour tout $i \in I$ il existe une carte $\alpha_i : V_{\alpha_i} \rightarrow U_{\alpha_i}$ avec $E_i \subset V_{\alpha_i}$ et pour $i \neq j$ on a $|\nu|(E_i \cap E_j) = 0$.

Alors on pose

$$|\nu|(E) = \sum_{i \in I} |\nu|(E_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

où chaque terme $|\nu|(E_i)$ à droite est calculé en utilisant (63).

En utilisant les formules de transformation des coefficients de la première forme fondamentale et le théorème de changement de variables pour les intégrales dans \mathbb{R}^n , on peut démontrer facilement que ces définitions sont cohérentes, donc fournissent un élément $|\nu|(E) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui est indépendant des cartes choisies.

Dans les exemples concrets on peut calculer souvent la mesure $|\nu|(E)$ d'un sous-ensemble $E \subset M$ en utilisant une seule carte. Il suffit de trouver une carte $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ de M telle que $|\nu|(E \setminus V_\alpha) = 0$, donc une carte qui contient E à un sous-ensemble négligeable (pour la mesure de Lebesgue) près. Alors

$$|\nu|(E) = \int_{\alpha(E \cap V_\alpha)} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du_1 \dots du_m \quad (64)$$

Exemple : Par exemple, la projection stéréographique $\sigma : S^{d-1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ est défini sur le complément d'un singleton qui est négligeable. Alors

$$|\nu|(S^{d-1}) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du_1 \dots du_{d-1},$$

où $g_{ij}(u)$ sont les coefficients de la première forme fondamentale de la paramétrisation

$$f := \sigma^{-1} : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow S^{d-1} \setminus \{N\}.$$

Remarque 4.3.1 Tout sous-ensemble compact $K \subset M$ est mesurable au sens de Lebesgue et $|\nu|(K)$ est fini.

La même méthode nous permet de définir l'intégrale

$$\int_K \varphi |\nu| \in \mathbb{R}$$

pour toute fonction continue $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ et sous-ensemble compact $K \subset M$.

1. Si $K \subset V_\alpha$ pour une carte $\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$ on pose

$$\int_K \varphi |\nu| := \int_{\alpha(K)} (\varphi \circ f) \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du_1 \dots du_m,$$

où $f := \alpha^{-1}$.

2. Dans la cas général, on peut trouver une décomposition

$$K = \bigcup_{j=1}^k K_j$$

de K comme réunion d'une famille *finie* de sous-ensembles compacts K_j tels que tout $j \in \{1, \dots, k\}$ il existe une carte $\alpha_j : V_{\alpha_j} \rightarrow U_{\alpha_j}$ avec $K_j \subset V_{\alpha_j}$ et pour $i \neq j$ on a $|\nu|(K_i \cap K_j) = 0$. Alors on pose

$$\int_K \varphi |\nu| := \sum_{j=1}^k \int_{K_j} \varphi |\nu| = \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_j(K_j)} (\varphi \circ f_j) \sqrt{\det(g_{kl}^j(u))} du_1 \dots du_m,$$

où $f_j := \alpha_j^{-1}$ et g_{kl}^j sont les coefficients de la première forme fondamentale de la paramétrisation f_j .

Les mêmes arguments (les formules de transformation des coefficients de la première forme fondamentale et le théorème de changement de variables pour les intégrales dans \mathbb{R}^n) montrent que ces définitions sont cohérentes, donc fournissent un nombre $\int_K \varphi |\nu| \in \mathbb{R}$ qui est indépendant des cartes choisies.

Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^d . Un *arc plongé* dans M est l'image $c := \text{im}(\gamma)$ d'une immersion injective $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. Les points $\gamma(0)$, $\gamma(1)$ s'appellent les extrémités de c (ou de γ).

Définition 4.3.2 Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une surface compacte dans \mathbb{R}^d . Une décomposition lisse en cellules de M , c'est la donnée d'une famille finie \mathcal{C} d'arcs $c_i = \text{im}(\gamma_i)$ plongés dans M appelés arêtes tels que

1. deux arêtes ne se coupent qu'en leurs extrémités ;
2. pour chaque composante connexe C du complémentaire de la réunion des arêtes, il existe une carte $\alpha : V \rightarrow U$ de M telle que $C \subset V$ et $\alpha(C)$ soit un polygone convexe dans le plan.

Soit $\mathcal{C} := (c_i)_{1 \leq i \leq A}$ une décomposition lisse en cellules de M avec A arêtes. Une composante connexe C du complémentaire de la réunion des arêtes s'appelle *face* de \mathcal{C} et un extrémité d'un arc c_i s'appelle *sommet* de \mathcal{C} . On désigne par S le nombre des sommets et par F le nombre des faces de \mathcal{C} .

Un résultat important de topologie affirme :

Théorème 4.3.3 Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une surface compacte. Alors

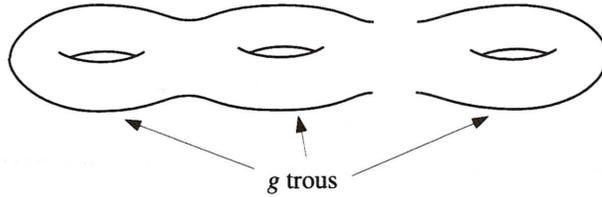
1. M admet une décomposition lisse en cellules.
2. La somme alternée $S - A + F$ associée à une telle décomposition \mathcal{C} est indépendante de \mathcal{C} et coïncide avec un invariant topologique de M qui s'appelle la caractéristique de Euler-Poincaré de M et est notée par $\chi(M)$.

La signification exacte de l'affirmation " $\chi(M)$ est un invariant topologique de M " est la suivante : Si $M \subset \mathbb{R}^d$, $S \subset \mathbb{R}^n$ sont deux surfaces compactes homéomorphes (c'est à dire deux surfaces compactes telles qu'il existe un homéomorphisme $\psi : M \rightarrow S$) alors $\chi(M) = \chi(S)$.

Exemple : 1. Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère standard. Considérons une décomposition de l'équateur $E \subset S^2$ en réunion de trois arcs de cercle. Ces arcs de cercles définissent une décomposition lisse en cellules de S^2 qui a 3 sommets et 2 faces (les deux hémisphères). Donc $\chi(S^2) = 3 - 3 + 2 = 2$. On obtient le même résultat en utilisant la décomposition lisse en cellules donnée par l'identification naturelle entre S^2 et un tétraèdre régulier ayant le centre en $0_{\mathbb{R}^3}$. Cette décomposition a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.

2. La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un tore T_g à g trous (voir la figure ci-jointe) est $\chi(T_g) = 2(1 - g)$. En particulier pour le tore de révolution T étudié dans les exercices sur la courbure de Gauss on obtient $\chi(T) = 0$.

Le théorème de Gauss-Bonnet énoncé ci-dessous est un résultat fondamental : il établit une liaison entre les propriétés métriques d'une surface compacte (plus précisément sa courbure) et ses propriétés topologiques.



Théorème 4.3.4 (*Théorème de Gauss-Bonnet*) Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ une surface compacte et $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ sa courbure de Gauss. Alors

$$\int_M K |\nu| = 2\pi\chi(M) .$$

Une démonstration élémentaire de ce théorème est présentée dans le cours de Géométrie Différentielle pour M2 de Pierre Pansu, chapitre 5 :

http://www.math.u-psud.fr/%7Epansu/web_dea/resume_dea_04.html

http://www.math.u-psud.fr/%7Epansu/web_dea/chapitre5.pdf

Références

- [B] Ch. Bär : *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, May 6, 2010.
- [K] W. Klingenberg : *Riemannian Geometry*, Walter de Gruyter, 1995 - Mathematics.
- [P] P. Pansu : Géométrie Différentielle, Cours M2, Université Paris Sud,
http://www.math.u-psud.fr/%7Epansu/web_dea/resume_dea_04.html
- [T] B. Thibert : *Courbes et surfaces*, Cours L2, Université Joseph Fourier, Grenoble I,
<http://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/cs/cs.pdf>