Géométrie Différentielle – Examen mai 2014

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (**2p**) Question proche du cours Démontrer les formules de dérivation

$$f_{ik} = \Gamma^l_{ik} f_l + h_{ik} n \text{ où } \Gamma^l_{ik} := g^{lj}\langle f_{ik}, f_j\rangle = \frac{1}{2} g^{lj}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}) \ .$$

Exercice 2 (**3p**)

1. (**2p**) Étudier le problème de maximisation sous contrainte (maximum lié)

$$\sup\left\{ \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}_+,\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\} \ .$$

Indication : montrer d'abord que le maximum est atteint dans un point dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

2. (**1p**) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_+ \ .$$

Exercice 3 (**21 p**) Considérons l'hélice $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par la paramétrisation

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ \alpha t \end{pmatrix}$$

(où $R > 0$, $\alpha > 0$).

1. (**1p**) Montrer que γ est trirégulière.
2. (**2p**) Déterminer le repère mobile de Frenet $(f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ de γ.
3. (**1p**) Déterminer la courbure et la torsion de γ.
4. (**1p**) Fixons $\varepsilon > 0$. Le *tube* de largeur ε autour de γ est la surface paramétrée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma(u) + \varepsilon\cos(v) f_2(u) + \varepsilon\sin(v) f_3(u) \ .$$

Quelle est l'interprétation géométrique des courbes paramétrées $\mathbb{R} \ni v \mapsto f(u_0, v)$ pour $u_0 \in I$ constant ? Est-ce que f est injective ?

5. (**2p**) En utilisant les formules de Frenet pour γ (formules qu'on va écrire explicitement), calculer les dérivées partielles de f, en exprimant les résultats comme combinaisons linéaires de vecteurs du repère mobile de Frenet.
6. (**2p**) Déterminer (en fonction du paramètre $\varepsilon > 0$) l'ensemble des points $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ où f n'est pas une immersion.
7. (**1p**) Montrer que, pour ε suffisamment petit, f est une immersion sur $\mathbb{R}^2$.
8. (**2p**) Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Calculer l'aire de la surface $f([0, 2\pi] \times [a, b])$. Quelle est l'interprétation géométrique de cette surface ?
9. (**5p**) Calculer la première forme fondamentale de f, le champ normal de Gauss $n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, la seconde forme fondamentale de f, les courbures principales, la courbure moyenne et la courbure de Gauss de f.
10. (**2p**) Calculer les coefficients de Christoffel Γ^i_{jk} de f.
11. (**2p**) Calculer R_{1212} et vérifier l'égalité $R_{1212} = \det(\mathbf{H})$.