Géométrie Différentielle – Examen de 2me session, juin 2014

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (**6p**) Considérons un parallélipipède rectangle $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ et notons par $x,\ y,\ z \in]0,+\infty[$ les longueurs de ses cotés.

1. (1p) Exprimer la surface $S(x,y,z)$ et le volume $V(x,y,z)$ de Π en fonction de $x,\ y,\ z$.
2. (1p) Soit
$$v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \ .$$
Calculer les différentielles $d_{v_0}S$, $d_{v_0}V$ et les gradients $\nabla_{v_0}S$, $\nabla_{v_0}V$ des applications S et V.
3. (3p) Soit $S_0 \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange étudier le problème d'extrema liés associé à l'application V et à la liaison $S(x,y,z) = S_0$. Préciser s'il s'agit d'un point de minimum ou maximum.
4. (1p) Quelle est l'interprétation géométrique de votre résultat ?

Exercice 2 (**12p**) Considérons deux nombres réels $0 < a < b$ et la surface de révolution T obtenu en faisant tourner un cercle de rayon a autour de l'axe Ox_3 tel que le centre du cercle mobile décrit un cercle de rayon b dans le plan x_1Ox_2. Une telle surface est paramétrée par l'immersion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (b + a\cos u)\cos v \\ (b + a\cos u)\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix} \ .$$

1. (2p) Calculer l'aire de la surface $f([0,2\pi] \times [0,2\pi])$.
2. (1p) Que représentent géométriquement les courbes $C_1 = \{f(0,v) |\ v \in \mathbb{R}\}$ et $C_2 = \{f(u,0) |\ u \in \mathbb{R}\}$?
3. (1p) Montrer que les vecteurs tangents à ces courbes au point d'intersection $m = f(0,0)$ sont orthogonaux.
4. (3p) Calculer en tout point $(u,v) \in [0,2\pi[\times[0,2\pi[$ la première et la seconde forme fondamentale $h(u,v)$, ainsi que les courbures principales, directions principales et les vecteurs unitaires w_1, w_2 correspondants.
5. (3p) Calculer la courbure de Gauss $K(u,v)$ et la courbure moyenne $H(u,v)$. Déterminer les points $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels
   (a) $K(u,v) > 0$,
   (b) $K(u,v) < 0$,
   (c) $K(u,v) = 0$,
6. (2p) Préciser les ensembles $T_+ \subset T$, $T_- \subset T$, $T_0 \subset T$ des points $m = f(u,v) \in T$ qui correspondent respectivement à chacune des trois conditions ci-dessus. Interpréter géométriquement ces résultats.

Exercice 3 (**7p**) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane non-dégénérée et soit $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On appelle le cône de sommet p et base γ la surface paramétrée $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (1-u)p + u\gamma(v) = \begin{pmatrix} ux(v) \\ uy(v) \\ 1-u \end{pmatrix}$$
où on a noté $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

1. (1p) Quelle est l'interprétation géométrique des courbes paramétrées $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u,v_0)$ pour $v_0 \in I$ fixé ?
2. (1p) Quelle est l'interprétation géométrique de la courbe paramétrée $I \ni v \mapsto f(u_0,v)$ pour $u_0 \in [0,1]$ fixé ? *Indication : discuter selon les cas $u = 1$, $u = 0$, $u \in]0,1[$.*
3. (1p) Déterminer les points $(u,v) \in \mathbb{R} \times I$ où f est une immersion.
4. (4p) Supposons que γ est normale (paramétrée par l'abscisse curvilgne) et soit $D \subset \mathbb{R} \times I$ le domaine maximal sur lequel f est une immersion. Pour la restriction de f à D calculer la matrice de la première forme fondamentale (1p), la seconde forme fondamentale (1p), les courbures principales (1p), la courbure moyenne et la courbure de Gauss de f (1p). Exprimer vos résultats en utilisant la courbure κ_γ.