Espaces twistoriels et 3-variétés complexes

Guillaume Deschamps

Motivation historique

Structure $\mathcal{C}^\infty$	Structure complexe	Propriété
$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{C}P^1$	projective
$\mathbb{T}^4_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{T}^2_{\mathbb{C}}$	Kähler
$\mathbb{T}^4_{\mathbb{R}} \times \mathbb{S}^2$	$\mathbb{T}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^1$	Kähler

Théorème (Blanchard 56) : $\mathbb{T}^4_{\mathbb{R}} \times \mathbb{S}^2$ admet une structure complexe :

(i) non kählerienne
(ii) non déformation de la structure complexe produit $\mathbb{T}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^1$.

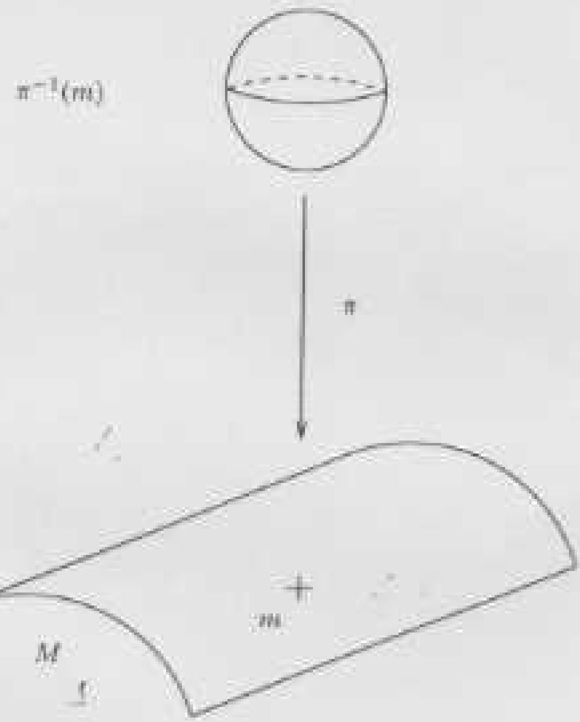
Problème 1 : Trouver des surfaces complexes $M_{\mathbb{C}}$ telles qu'on puisse munir le produit $M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{S}^2$ d'une structure complexe qui n'est pas une déformation de la structure produit (i.e. $M_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^1$) ?

Fibré twistoriel d'une 4-variété riemannienne orientée

Notation : (M, g, w) 4-variété (réelle) riemannienne orientée.

Définition : Le fibré twistoriel est le fibré $\pi : \tau(M, g, w) \longrightarrow M$:

$$\pi^{-1}(m) = \Big\{ J \in O(T_m M) / J^2 = -Id \text{ et } J >> 0 \Big\} \simeq \mathbb{S}^2.$$

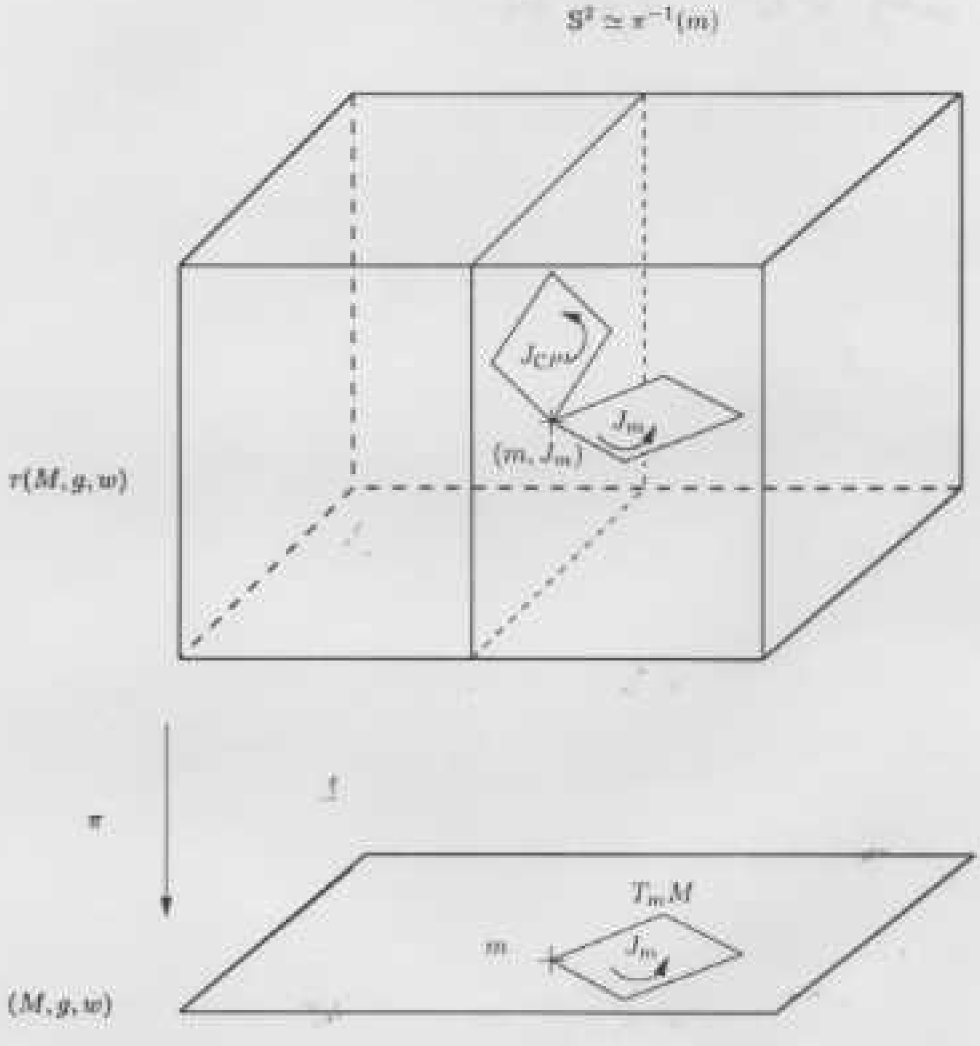


Propriétés : (i) Fibré lisse localement trivial.
(ii) Groupe structural SO(3).
(iii) $\forall g, h$:

$$\begin{tikzcd} \tau(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \mathbf{w}) \arrow[rr, "\text{difféo}", "\sim"'] \arrow[dr] & & \tau(\mathbf{M}, \mathbf{h}, \mathbf{w}) \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Structure presque complexe canonique sur $\tau(M, g, w)$

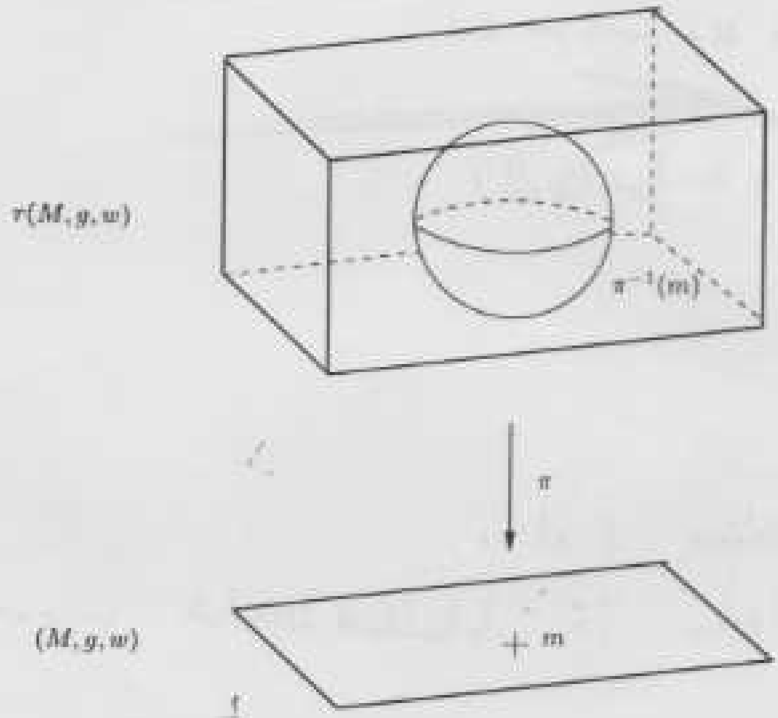
$$\pi^{-1}(m) = \left\{ J \in O(T_m M) / J^2 = -Id \text{ et } J >> 0 \right\} \simeq \mathbb{S}^2$$



Remarque : Cette structure presque complexe dépend beaucoup de la métrique g et de l'orientation w sur M.

Résumé

(M, g, w) : 4-variété riemannienne orientée.
$\tau(M, g, w)$: 6-variété réelle munie d'une spc canonique.



Théorème (AHS, 78) : $\tau(M, g, w)$ complexe $\Longleftrightarrow$ g ASD ($W^+ = 0$).

Remarque : Si la signature de (M, w) est nulle alors :

$$g \ \ ASD \Longleftrightarrow g \text{ est localement conformément plate.}$$

Reformulation du problème 1

Problème 1 : Trouver des surfaces complexes $M_{\mathbb{C}}$ telles qu'on puisse munir le produit $M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{S}^2$ d'une structure complexe qui n'est pas une déformation de la structure produit ?

Méthode : Classifier les 4-variétés (M, g, w) telles que :
(i) $\tau(M, g, w) \simeq M \times \mathbb{S}^2$.
(ii) M admet une structure complexe.
(iii) $\tau(M, g, w)$ complexe (i.e. g riemannienne ASD).

Remarque : Sous les hypothèses (i), (ii) et (iii) :
a) $\tau(M, g, w)$ n'est jamais Kähler (Hitchin 1981).
b) $\tau(M, g, w)$ n'est jamais biméromorphe à une variété Kähler (Campana 1991).
c) $\tau(M, g, w)$ n'est jamais une déformation de $M_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^1$.

Résultats existants

Problème 1 : Classifier les 4-variétés (M, g, w) telles que :

(i) M admet une structure complexe : $M_{\mathbb{C}}$
(ii) $\tau(M, g, w) \simeq M \times \mathbb{S}^2$
(iii) $\tau(M, g, w)$ complexe.

Cas des métriques à courbure scalaire nulle : Hitchin (74)

a) les tores
b) les surfaces hyperelliptiques
c) les surfaces K3.

Cas des métriques hermitiennes : Boyer (86)

a) les tores
b) les surfaces hyperelliptiques
c) les surfaces K3
d) certaines surfaces de Hopf bien précises.

[illegible] la particularité [illegible] = spc...

section globale = spc ∀ [illegible]

Résolution du problème 1

Rappel : Classifier les 4-variétés (M, g, w) telles que :

(i) $\tau(M, g, w) \simeq M \times \mathbb{S}^2$.

(ii) M admet une structure complexe.

(iii) $\tau(M, g, w)$ complexe (i.e. g riemannienne ASD).

Théorème 1 : Si (M, g, w) satisfait (i), (ii), (iii) alors c'est :

a) une surface K3

b) un tore

c) une surface hyperelliptique

d) une surface de Hopf

e) une surface minimale spin de dimension de Kodaira un.

Réciproquement dans les cas **a**, **b**, **c** et **d** il existe toujours une métrique riemannienne anti-autoduale.

Classification de Kodaira

Surfaces complexes minimales	c_1^2	spin
Surfaces rationnelles	8 ou 9	
Hopf primaires	0	oui difféormorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$
Hopf secondaires	0	? quotient de Hopf primaires
Surfaces d'Inoue	0	?
Classe VII_0^+	< 0	
Surfaces réglées de genre 1	0	celles de forme d'intersection paire
Surfaces réglées de genre g>1	$8(1-g)$	
Tores	0	oui
Surfaces hyperelliptiques	0	?
Surfaces K3	0	oui ($K_S = \mathcal{O}_S$)
Surfaces d'Enriques	0	non ($\tau \not\equiv 0[16]$)
Surfaces de Kodaira primaires	0	oui ($K_S = \mathcal{O}_S$)
Surfaces de Kodaira secondaires	0	? quotient de Kodaira primaires
Proprement elliptiques	0	certaines seulement
Surfaces de type géréral	> 0	

Démonstration du théorème 1

Surfaces complexes à fibré twistoriel trivial :

$$\kappa = -\infty \begin{cases} \text{Les surfaces réglées de genre un spin } (\nexists g \text{ ASD}) \\ \text{Les surfaces de Hopf } (\exists g \text{ ASD}) \\ \text{Les surfaces d'Inoue } (\nexists g \text{ ASD}) \end{cases}$$

$$\kappa = 0 \begin{cases} \text{Les tores} \\ \text{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \text{Les surfaces de Kodaira } (\nexists g \text{ ASD}) \\ \text{Les surfaces K3} \end{cases}$$

$\kappa = 1$ Les surfaces proprement elliptiques spin (donner des contraintes)

Théorème Goldman-Kamishima (81-86) :

$$\begin{cases} (M, g) \text{ localement conformément plat} \\ \pi_1 \text{ virtuellement résoluble} \end{cases} \Longrightarrow \tilde{M} = \mathbb{S}^4, \mathbb{T}^4, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$$

Surfaces complexes à fibré twistoriel trivial

Théorème 1 : Les surfaces complexes à fibré twistoriel trivial sont :

$$Kod(M) = -\infty : \begin{cases} \text{Les surfaces réglées de genre un} \\ \quad \text{dont la forme d'intersection est paire} \\ \text{Les surfaces de Hopf} \\ \text{Les surfaces d'Inoue} \end{cases}$$

$$Kod(M) = 0 : \begin{cases} \text{Les tores} \\ \text{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \text{Les surfaces de Kodaira} \\ \text{Les surfaces K3} \end{cases}$$

$Kod(M) = 1$: Les surfaces minimales qui sont spin.

$Kod(M) = 2$: Aucune surface.

en particulier ... Anne ...

Généralisation

Problème 1 : Trouver des surfaces complexes $M_{\mathbf{C}}$ telles qu'on puisse munir le produit $M_{\mathbf{R}} \times \mathbb{S}^2$ d'une structure complexe qui n'est pas une déformation de la structure produit (i.e. $M_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}P^1$) ?

Problème 1 bis : Peut-on trouver plusieurs structures complexes différentes sur $M_{\mathbf{R}} \times \mathbb{S}^2$?

Problème 1 ter : et sur $M_{\mathbf{R}} \times \Sigma_g$?

$f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ application holomorphe de d° d

K3 : Calabi Yau
$\mathbb{T}^4$: plat
$S^1 \times S^3$: [illegible]

Prolongement
(idées de Lebrun et d'Hitchin)

Proposition 3 : Si (M, g) est : $\begin{cases} \text{une surface } K3 \\ \text{un tore } \mathbb{T}^4 \\ \text{une surface de Hopf quaternionique} \end{cases}$

alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists J_m$ une structure complexe sur $M \times \mathbb{S}^2$ telle que :

a) $(M \times \mathbb{S}^2, J_m)$ non biméromorphe à une variété Kähler
b) J_m n'est pas une déformation de J_p si $p \neq m$.

Remarque : Cette proposition reste vraie avec $M \times \Sigma_g$. Où Σ_g est une surface de Riemann de genre $g \geq 0$.

Nouveau problème

Problème 2 : Trouver des 4-variétés réelles $M_{\mathbb{R}}$ sans structure complexe dont le produit $M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{S}^2$ admet une structure complexe.

Méthode : Trouver une famille de 4-variétés (M, g, w) telles que :
(i) $\tau(M, g, w) \simeq M \times \mathbb{S}^2$.
(ii) M n'admet pas de structure complexe.
(iii) $\tau(M, g, w)$ complexe (i.e. g ASD).

Petites remarques

Corollaire : Pour toute 3-variété hyperbolique orientable H, le produit $H \times \mathbb{S}^1$ est une 4-variété parallélisable sans structure complexe.

Proposition (Yau 1976) : La variété $(\mathbb{T}^3 \sharp \mathbb{R}P^3) \times \mathbb{S}^1$ est une 4-variété parallélisable sans structure complexe.

Remarque : Le corollaire reste vrai pour un fibré en cercle $\mathbb{S}^1$ au-dessus de H.