Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications

Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony

October 13, 2006

Abstract

A meromorphic transform between complex manifolds is a surjective mutivalued map with an analytic graph.

Let F_n be a sequence of meromorphic transforms from a compact Kähler manifold (X, ω) into compact Kähler manifolds (X_n, ω_n). Let σ_n be an appropriate probability measure on X_n and σ the product measure of σ_n, on $\mathbf{X} := \prod_{n\geq 1} X_n$. We give conditions which imply that for σ-almost every $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{X}$

$$\frac{1}{d(F_n)}[(F_n)^*(\delta_{x_n}) - (F_n)^*(\delta_{x'_n})] \to 0.$$

Here δ_{x_n} is the Dirac mass at x_n and $d(F_n)$ the maximal intermediate degree of F_n.

Using this formalism, we obtain sharp results on the limit distribution of zeros, for random l holomorphic sections of high powers L^n of a positive holomorphic line bundle L over a projective manifold X.

We consider also the equidistribution problem for random iteration of correspondences. Assume that $f_n : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ are correspondences between k-dimensional compact manifolds and let $F_n := f_n \circ \cdots \circ f_1$. We give conditions implying that $[d(F_n)^{-1}](F_n)^*\omega_n^k$ has a limit. In particular, when f is a meromorphic self correspondence of topological degree d_t of a compact Kähler manifold X, under a hypothesis on the dynamical degrees, we show that $d_t^{-n}(f^n)^*\omega^k$ converges to a probability measure μ, satisfying $f^*\mu = d_t\mu$. Moreover, quasi-p.s.h. functions are μ-integrable. Every projective manifold admits such correspondences. When f is a meromorphic map, the measure μ is exponentially mixing.

1 Introduction

Une variété projective de type général admet au plus un nombre fini d'endomorphismes méromorphes dominants [17]. C'est dire que la dynamique de ces applications est très pauvre. Il est souvent délicat de construire des applications méromorphes d'une variété compacte dans elle-même. Il n'en est plus de même dès qu'on considère les correspondances. En effet, si X est une variété projective de dimension k et si g et h désignent deux projections holomorphes surjectives de X sur $\mathbb{P}^k$, le sous-ensemble analytique

$$\Gamma := \{(x, y) \in X \times X,\ g(x) = h(y)\}$$

définit une correspondance sur X, *c.-à-d.* une fonction multivaluée $f := h^{-1} \circ g$. On peut aussi considérer $h^{-1} \circ u \circ g$, où u est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$. En choisissant u convenablement, on obtient une correspondance dont la dynamique est très riche (*voir* aussi [4, 30, 7] pour les exemples et les applications).

Dans un cadre plus large: celui des transformations méromorphes, bon nombre de questions dynamiques, ou de comportements asymptotiques de préimages, se ramènent à l'étude du problème suivant.

Soient (X, ω), (X_n, ω_n) des variétés kählériennes compactes de dimensions respectives k et k_n. On considère une suite $F_n : X \longrightarrow X_n$ d'applications méromorphes, de correspondances ou plus généralement de transformations méromorphes et on se pose la question de donner des critères vérifiables sur les F_n et les X_n assurant que les préimages $F_n^{-1}(x_n)$ par F_n des points $x_n \in X_n$ sont équidistribuées dans X.

Précisons les problèmes. Une transformation méromorphe de codimension l de X dans X_n est la donnée d'un sous-ensemble analytique $\Gamma^{(n)}$ de dimension pure $k_n + l$ de $X \times X_n$, $1 \leq l \leq k - 1$. On suppose que les projections π et π_n, restreintes à chaque composante irréductible de $\Gamma^{(n)}$, sur X et X_n, sont surjectives. Pour $x_n \in X_n$ générique, la fibre $F_n^{-1}(x_n) := \pi(\pi_{n|\Gamma^{(n)}})^{-1}(x_n)$ est de dimension l. Si δ_{x_n} désigne la masse de Dirac en x_n, on pose

$$(F_n)^*(\delta_{x_n}) := \pi_*(\pi_{n|\Gamma^{(n)}})^*\delta_{x_n}.$$

C'est un courant de bidimension (l, l) porté par $F_n^{-1}(x_n)$.

Sans hypothèse sur les transformations F_n, on ne peut s'attendre à trouver en général une limite des courants $(F_n)^*(\delta_{x_n})$, convenablement normalisés. Mais, $\Gamma^{(n)}$, les graphes de F_n, étant holomorphes, on peut espérer que dans les cas "intéressants", génériquement $F_n^*(\delta_{x_n})$ et $F_n^*(\delta_{x'_n})$, convenablement normalisés, ont la même répartition asymptotique. On se pose deux problèmes.

Problème d'équidistribution. Trouver des conditions vérifiables, pour que génériquement sur les suites (x_n) et (x'_n)

$$\frac{1}{d(F_n)}\left[F_n^*(\delta_{x_n}) - F_n^*(\delta_{x'_n})\right] \longrightarrow 0$$

au sens des courants. Ici $d(F_n)$ désigne la masse d'une fibre générique de F_n, celle-ci est indépendante de la fibre.

Problème de convergence. Dans certains cas, trouver la limite de la suite de courants

$$\frac{1}{d(F_n)}F_n^*(\delta_{x_n}).$$

Un cas particulier du problème de convergence est celui où on se donne une suite $f_n : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ de correspondances, *i.e.* une suite de transformations méromorphes de codimension 0 entre des variétés X_{n-1}, X_n de même dimension. On veut sous des hypothèses convenables, trouver la limite de la suite de mesures

$$\frac{1}{d_1 \dots d_n}(f_n \circ \cdots \circ f_1)^*(\delta_x)$$

et en donner les propriétés. On est dans le cas où $F_n := f_n \circ \cdots \circ f_1$, le nombre de points d'une fibre générique de f_n étant égal à d_n.

Commençons par une situation étudiée récemment par Shiffman et Zelditch [25] et sur laquelle il existe par ailleurs une vaste littérature classique, ainsi que de nombreux articles récents de physiciens. C'est celle des zéros de polynômes aléatoires. Nous renvoyons à [25] pour quelques éléments bibliographiques.

Soit L un fibré holomorphe ample sur une variété projective X. On munit L d'une métrique dont la forme de courbure ω est positive. Notons $\mathrm{H}^0(X, L^n)$ l'espace des sections holomorphes de L^n et notons $X_n := \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ l'espace projectif associé. Il est facile de définir une transformation méromorphe F_n telle que pour $s_n \in X_n$, $F_n^*(\delta_{s_n})$ soit le courant d'intégration $[Z_{s_n}]$ sur l'ensemble des zéros de s_n. On se donne des mesures de probabilité σ_n sur X_n et on considère la mesure σ produit des σ_n sur $\prod_{n\geq 1} X_n$.

Théorème 1.1 (Shiffman-Zelditch [25]) *Lorsque σ_n est la mesure de Lebesgue sur X_n pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\frac{1}{n}[Z_{s_n}] \longrightarrow \omega$$

pour σ-presque tout $(s_n) \in \prod_{n\geq 1} X_n$.

Nous donnons une version abstraite de cet énoncé (théorème 4.1), dans le cadre des transformations méromorphes. Notre méthode fournit des précisions nouvelles.

1. Si ψ désigne une forme test de classe $\mathcal{C}^2$

$$\sigma_n\big(|\langle n^{-1}[Z_{s_n}] - \omega, \psi\rangle| \geq \epsilon\big) \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^2} n^{mk} \exp(-\epsilon\alpha n)$$

où $c > 0$, $m \geq 0$ et $\alpha > 0$ sont des constantes indépendantes de n et de ϵ.

2. On obtient le même résultat en prenant pour σ_n les mesures de Lebesgue normalisées sur la partie réelle de X_n. Ce qui revient à étudier les zéros des "sections à coefficients réels", par exemple, les zéros complexes des polynômes homogènes à coefficients réels pour le cas où $X = \mathbb{P}^k$.

3. On obtient un théorème d'équidistribution, avec des estimations analogues, pour les zéros communs de l sections holomorphes:

$$\frac{1}{n^l}[Z_{s_n^1} \cap \ldots \cap Z_{s_n^l}] \longrightarrow \omega^l.$$

Il s'agit dans ces résultats de résoudre le problème d'équidistribution. En effet, un théorème de Tian-Zelditch [29, 31] (*voir* le théorème 7.2) implique que la moyenne des courants $n^{-l}[Z_{s_n^1} \cap \ldots \cap Z_{s_n^l}]$ converge vers ω^l quand n tend vers l'infini.

Dans le cas général, notre critère d'équidistribution utilise deux notions: l'une liée à la croissance des transformations F_n et l'autre à la géométrie des X_n. En particulier si les X_n sont égales, seule la croissance des F_n intervient.

Les indicateurs de croissance sont les degrés intermédiaires d'ordres k_n et $k_n - 1$, classiques en théorie de distribution des valeurs, associés aux F_n:

$$d(F_n) := \int_X F_n^*(\omega_n^{k_n}) \wedge \omega^{k-l} \quad \text{et} \quad \delta(F_n) := \int_X F_n^*(\omega_n^{k_n-1}) \wedge \omega^{k-l+1}.$$

C'est le comportement de la suite des $\delta(F_n)d(F_n)^{-1}$ qui joue un rôle. Observons que le calcul de $d(F_n)$ et $\delta(F_n)$ est cohomologique, $d(F_n)$ est la masse d'une fibre générique de F_n et par exemple dans le cas de l'espace projectif $\delta(F_n)$ est la masse de l'image réciproque d'une droite générique.

La géométrie des variétés intervient par l'intermédiaire des meilleures constantes pour résoudre $\mathrm{dd^c}$ dans une classe de cohomologie donnée. Pour les extensions ci-dessus du théorème de Shiffman-Zelditch, la propriété suivante est cruciale: *pour toute fonction* φ *q.p.s.h. sur* $\mathbb{P}^k$ *vérifiant* $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ *et* $\int_{\mathbb{P}^k} \varphi \mathrm{d}m = 0$ *on a*

$$\max_{\mathbb{P}^k} \varphi \leq c(1 + \log k).$$

Ici m est la mesure invariante sur $\mathbb{P}^k$ ou sur $\mathbb{RP}^k$, ω_{FS} étant la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$ normalisée par $\int_{\mathbb{P}^k} \omega_{\mathrm{FS}}^k = 1$ et $c > 0$ est une constante indépendante de k. On calcule dans cet exemple que $\delta(F_n) = 1$ et $d(F_n) = \mathrm{O}(n)$. Les estimations des constantes géométriques pour les variétés multiprojectives permettent de déduire la convergence pour les zéros communs de plusieurs sections holomorphes. C'est bien sûr la dépendance par rapport à la dimension qui est importante.

On peut souligner deux autres raisons pour s'intéresser au comportement de suites d'applications et pas seulement aux itérés d'une application. La première est que du point de vue physique, on compose des applications voisines, et un théorème dans ce cadre est signe de la robustesse du résultat. La seconde est que pour l'itération d'applications birationnelles f, on est amené à considérer le comportement de la suite (f^n, f^{-n}). Dans ce cas, on obtient des résultats qui sont beaucoup moins évidents si on en considère séparément les suites f^n et f^{-n}.

Les résultats généraux que nous obtenons sont démontrés au paragraphe 4. Nous en donnons des applications dans les paragraphes suivants. Précisons un cas simple.

Théorème 1.2 *Soient* $F_n : X \longrightarrow X'$ *des transformations méromorphes de codimension* l *entre variétés kählériennes compactes de dimensions respectives* k *et* k'. *Soient* δ_n, d_n *leurs degrés intermédiaires d'ordre* $k'-1$ *et* k'. *Notons* $\mathcal{E}$ *l'ensemble (exceptionnel) des* $x' \in X$ *tels que*

$$\frac{1}{d_n}[(F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*(\omega'^{k'})] \quad \textit{ne converge pas vers } 0.$$

(1) *Si* $\sum \delta_n d_n^{-1} < +\infty$ *alors* $\mathcal{E}$ *est pluripolaire.*

(2) *Si* $\sum \exp(-\delta_n^{-1} d_n t) < +\infty$ *pour tout* $t > 0$ *alors* $\mathcal{E}$ *est de mesure de Lebesgue nulle et de* σ*-mesure nulle pour toute mesure modérée* σ.

Les mesures de Lebesgue sur X ou sur une sous-variété analytique totalement réelle de dimension maximale sont des exemples de mesures modérées. Dans ce contexte, le cas (1) avec des applications rationnelles F_n de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^{k'}$ a été étudié par Russakovskii-Sodin et Russakovskii-Shiffman [22, 23]. Pour le cas des itérés d'une application holomorphe de $\mathbb{P}^k$ *voir* [11, 26, 3, 8].

Les transformations F_n étant aléatoires, la suite $d_n^{-1}(F_n)^*(\omega'^{k'})$ n'a pas de limite en général. Lorsque les transformations F_n sont les itérés f^n d'une correspondance $f : X \longrightarrow X$, on obtient le théorème suivant qui fournit une solution au problème de convergence dans ce cas (d'autres variantes de ce résultat pour les itérations aléatoires sont données au paragraphe 5).

Théorème 1.3 *Soit $f : X \longrightarrow X$ une correspondance méromorphe de degré topologique d_t sur une variété kählérienne compacte (X, ω) de dimension k. Supposons que le degré dynamique d'ordre $k-1$*

$$d_{k-1} := \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X (f^n)^* \omega^{k-1} \wedge \omega \right)^{1/n}$$

vérifie $d_{k-1} < d_t$. Alors la suite $\mu_n := d_t^{-n}(f^n)^*(h_n\omega_n^k)$ converge vers une mesure μ f^*-invariante, i.e. $f^*\mu = d_t\mu$. La convergence est uniforme sur les h_n positives vérifiant $\int h_n\omega^k = 1$ et $\|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X)}^{1/n} = \mathrm{o}(d_{k-1}^{-1}d_t)$. Lorsque f est une application méromorphe, la mesure μ est mélangeante à vitesse exponentielle. De plus toute fonction q.p.s.h. φ est μ-intégrable (μ est PLB) et $\langle \mu_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle \mu, \varphi\rangle$.

En appliquant les méthodes de Lyubich [20], Briend-Duval [3] et [8, 7], on peut montrer que les points périodiques répulsifs sont denses dans le support de μ et que l'ensemble exceptionel $\mathcal{E}$ est une réunion finie ou dénombrable d'ensembles analytiques. Lorque f est une application rationnelle sur une variété projective, V. Guedj [14] a, dans un travail récent, construit la mesure μ et prouvé les propriétés ci-dessus. Dans [9], nous avons montré que μ est d'entropie maximale $\log d_t$. Observons que toute variété projective admet des correspondances satisfaisant l'hypothèse du théorème 1.3.

Notre approche du problème d'équidistribution général reprend celle que nous avons utilisée pour l'étude des applications à allure polynomiale dans une variété de Stein [8]. Ici, après avoir défini convenablement les images réciproques F_n^* et les images directes $(F_n)_*$ des courants, il faut évaluer

$$\frac{1}{d(F_n)} \left\langle F_n^*(\delta_{x_n}) - F_n^*(\omega_n^{k_n}), \psi \right\rangle \quad = \quad \frac{1}{d(F_n)} \left\langle \delta_{x_n} - \omega_n^{k_n}, (F_n)_*\psi \right\rangle \quad (1.1)$$

pour une forme test lisse ψ de bidegré (l,l), la forme de Kähler ω_n étant normalisée par $\int_{X_n} \omega_n^{k_n} = 1$.

L'idée est de remplacer $(F_n)_*\psi$ par une autre solution ψ_n de l'équation $\mathrm{dd^c}\psi_n = \mathrm{dd^c}(F_n)_*\psi$, *c.-à-d.* de retrancher à $(F_n)_*\psi$ une constante convenable. Les mesures δ_{x_n} et $\omega_n^{k_n}$ étant de même masse, le membre à droite de (1.1) ne change pas lorsqu'on remplace $(F_n)_*\psi$ par ψ_n. On estime ψ_n en fonction de $\mathrm{dd^c}(F_n)_*\psi$, d'où l'introduction de $\delta(F_n)$ qui essentiellement mesure la masse de $\mathrm{dd^c}(F_n)_*\psi$.

Les propriétés de convergence de la suite $\delta(F_n)[d(F_n)]^{-1}$ ont pour conséquence des propriétés de convergence de (1.1) vers 0 sauf sur des ensembles dont nous pouvons majorer la mesure. Lorsque la série $\sum \delta_n d_n^{-1}$ n'est pas convergente (c'est le cas pour la distribution des zéros de sections holomorphes aléatoires de fibrés positifs) on est amené à utiliser la notion de mesure modérée. On obtient grâce à cela des résultats d'équidistribution presque partout comme au théorème 1.2 en supposant seulement que $\delta_n d_n^{-1} = \mathrm{o}(1/\log n)$.

Cette méthode de dualité permet d'obtenir des estimées exponentielles des volumes de l'ensemble des "mauvaises sections" dans le théorème de Shiffman-Zelditch, ou encore des estimées de la vitesse de mélange dans le théorème 1.3. Bien sûr, dans les applications, que nous donnons, il faut calculer les constantes géométriques ainsi que les degrés dynamiques.

Revenons sur la solution du problème de convergence pour les correspondances: théorème 1.3. On montre que pour toute fonction q.p.s.h. φ, $\langle d_t^{-n}(f^n)^*\omega^k, \varphi\rangle$ est convergente. Pour cela, étant donné une fonction q.p.s.h. φ sur X. On pose

$$b_0 := \int \varphi\omega^k, \qquad \varphi_0 = \varphi - b_0$$

et

$$b_n := \int f_*\varphi_{n-1}\omega^k, \qquad \varphi_n := f_*\varphi_{n-1} - b_n.$$

On a par itération

$$\left\langle \frac{(f^n)^*\omega^k}{d_t^n}, \varphi \right\rangle = b_0 + \frac{b_1}{d_t} + \cdots + \frac{b_n}{d_t^n} + \left\langle \omega^k, \frac{\varphi_n}{d_t^n} \right\rangle.$$

Puisque les φ_n sont convenablement normalisées, on peut estimer φ_n à l'aide de $\mathrm{dd^c}\varphi_n$ et l'hypothèse $d_{k-1} < d_t$ implique $\langle \omega^k, d_t^{-n}\varphi_n\rangle \to 0$. La "continuité" de f_* implique que $|b_n|$ est de l'ordre d_{k-1}^n. Ce qui démontre la convergence.

Lorsque $f : X \longrightarrow X$ est une application birationnelle on a toujours $d_t = 1$ donc les hypothèses du théorème 1.3 ne sont pas vérifiées. Nous obtenons cependant un résultat d'équidistribution en considérant simultanément le graphe de f^n et f^{-n}. On peut alors prendre des intersections de ces graphes avec des sous-variétés et appliquer notre théorème abstrait. Donnons un exemple: soit f un automorphisme polynomial régulier de $\mathbb{C}^k$ [26], notons d_+ le degré algébrique de f et d_- celui de f^{-1}. On montre [26] que le courant

$$\frac{1}{(d_+)^{nl}(d_-)^{ml'}}[f^{-n}(\omega_{\mathrm{FS}}^l) \cap f^m(\omega_{\mathrm{FS}}^{l'})]$$

tend faiblement vers un courant positif fermé $T_{l,l'}$ de bidegré $(l+l', l+l')$ lorsque m et n tendent vers l'infini. Les entiers l, l' admissibles sont définis par les ensembles d'indétermination de f et f^{-1}. Ce courant $T_{l,l'}$ a des propriétés d'invariance par rapport à f qui en font un objet dynamique intéressant. Il peut être obtenu autrement.

Notons G_l la grassmannienne des plans projectifs de dimension $k-l$ dans $\mathbb{P}^k$. Il existe un ensemble pluripolaire $\mathcal{E} \subset \mathrm{G}_l \times \mathrm{G}_{l'}$, $l \geq 1$, $l' \geq 1$, tel que pour $(x, x') \in \mathrm{G}_l \times \mathrm{G}_{l'} \setminus \mathcal{E}$ la suite de courants

$$\frac{1}{(d_+)^{-nl}(d_-)^{-ml'}}[f^{-n}(\mathbb{P}_x^{k-l}) \cap f^m(\mathbb{P}_{x'}^{k-l'})]$$

converge faiblement vers $T_{l,l'}$ (*voir* théorème 6.3).

Pour démontrer ce résultat, on résout le problème d'équidistribution pour la suite de transformations méromorphes $F_{n,m} : \mathbb{P}^k \longrightarrow \mathrm{G}_l \times \mathrm{G}_{l'}$ définies par les relations $F_{n,m}^{-1}(x, x') = f^{-n}(\mathbb{P}_x^{k-l}) \cap f^m(\mathbb{P}_{x'}^{k-l'})$.

L'article est organisé de la manière suivante. Au paragraphe 2, nous donnons quelques résultats de compacité pour les fonctions q.p.s.h. dans une variété kählérienne compacte. C'est la base de notre approche. On utilise les fonctions q.p.s.h. pour tester la convergence. Leurs propriétés de compacité jouent un rôle clé dans les estimations.

Nous définissons les opérations image directe et image réciproque des courants dans les cas que nous utilisons.

Le paragraphe 3 introduit les opérations de composition, de produit et d'intersection, sur les transformations méromorphes. Nous donnons les estimations fondamentales des degrés intermédiaires d'une composée ou d'un produit de transformations méromorphes sur les variétés projectives.

Au paragraphe 4 nous démontrons notre résultat de convergence abstrait (théorème 4.1) sur l'équidistribution, pour des transformations méromorphes générales. Nous l'appliquons ensuite aux diverses situations que nous avons discutées. Dans un appendice, nous avons rassemblé quelques propriétés des ensembles pluripolaires et les estimations des constantes géométriques qui nous sont nécessaires. Nous introduisons aussi une notion de capacité dans les variétés compactes qui peut être utile dans d'autres questions.

Dans tout l'article (X,ω), (X',ω') et (X_n,ω_n), $n\geq 0$ désignent des variétés kählériennes compactes de dimensions respectives k, k' et k_n. On suppose que $\int_{X'}{\omega'}^{k'}=1$ et $\int_{X_n}\omega_n^{k_n}=1$ pour tout $n\geq 1$. Les constantes géométriques $r(X,\omega)$, $\mathrm{R}_1^*(X,\omega)$, $\mathrm{R}_2^*(X,\omega,p)$ sont définies au paragraphe 2.1, $\mathrm{R}_i(X,\omega,\sigma)$, $\Delta(X,\omega,\sigma,t)$ au paragraphe 2.2, les degrés intermédiaires $\lambda_l(F)$, les degrés dynamiques $d_l(F)$, le degré topologique $d_t(F)$ et $\mathrm{A}(f)$ sont définis au paragraphe 3. L'espace projectif $\mathbb{P}^k$ est muni de la forme de Fubini-Study ω_{FS} normalisée par $\int\omega_{\mathrm{FS}}^k=1$, de la mesure de probabilité invariante Ω_{FS} et de la mesure de probabilité invariante m_{FS} sur sa partie réelle $\mathbb{RP}^k$. L'espace multiprojectif $\mathbb{P}^{k,l}=\mathbb{P}^k\times\cdots\times\mathbb{P}^k$ (l fois) est muni de la forme de Kähler ω_{MP}, de la mesure de probabilité invariante naturelle Ω_{MP} et de la mesure de probabilité invariante naturelle m_{MP} sur sa partie réelle (*voir* appendice pour les détails).

2 Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés des fonctions q.p.s.h. sur une variété kählérienne compacte. Nous définissons des constantes géométriques relatives à la résolution de $\mathrm{dd^c}$. Nous introduisons les opérateurs image directe et image réciproque d'un courant par une application holomorphe.

Si S est un courant réel fermé de bidegré (r,r) de X, notons $\mathrm{cl}(S)$ sa classe dans le groupe de cohomologie de Dolbeault

$$\mathcal{H}^{r,r}(X,\mathbb{R}):=\mathcal{H}^{r,r}(X,\mathbb{C})\cap\mathcal{H}^{2r}(X,\mathbb{R}).$$

On dira que $\mathrm{cl}(S)\leq\mathrm{cl}(S')$ si la classe de $S'-S$ peut être représentée par un courant positif fermé. Si S, S' sont des courants positifs fermés de bidegré (r,r) et si $\mathrm{cl}(S)\leq\mathrm{cl}(S')$, leurs masses vérifient $\|S\|\leq\|S'\|$, où on a posé $\|S\|:=\int_X S\wedge\omega^{k-r}$. Lorsque S est positif, sa masse ne dépend que de la classe $\mathrm{cl}(S)$. Les espaces $\mathrm{L}^p(X)$ sont définis par rapport à la forme volume ω^k.

2.1. *Fonctions q.p.s.h. et fonctions d.s.h.*

Une fonction φ sur X est *quasi-plurisousharmonique (q.p.s.h.)* si elle est intégrable, semi-continue supérieurement (s.c.s.) et vérifie $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -c\omega$ au sens des courants, pour une constante $c \geq 0$. Une telle fonction φ appartient à $\mathrm{L}^p(X)$ pour tout $p \geq 1$. En effet, localement elle diffère d'une fonction p.s.h. par une fonction lisse. Pour toute suite (φ_n) de fonctions q.p.s.h. négatives vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi_n \geq -\omega$, on peut extraire une sous-suite qui, ou bien, converge dans tout $\mathrm{L}^p(X)$, $p \geq 1$, vers une fonction q.p.s.h. φ vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$, ou bien, converge uniformément vers $-\infty$, [15, p.94].

Proposition 2.1 *La famille des fonctions ψ q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\psi \geq -\omega$ et l'une des deux conditions de normalisation*

$$\max_X \varphi = 0 \qquad \textit{ou} \qquad \int_X \varphi\omega^k = 0$$

est compacte dans $\mathrm{L}^p(X)$ pour tout $p \geq 1$. De plus, ces fonctions sont bornées supérieurement par une même constante.

Démonstration. Soit (φ_n) une suite de fonctions vérifiant l'hypothèse du lemme. Notons $a_n := \sup_X \varphi_n$. Aucune sous-suite de $(\varphi_n - a_n)$ ne peut tendre uniformément vers $-\infty$ car $\sup_V(\varphi_n - a_n) = 0$. Par conséquent, la suite $(\varphi_n - a_n)$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(X)$ pour tout $p \geq 1$. Les conditions de normalisation impliquent que

$$a_n = 0 \quad \text{ ou } \quad a_n \int_X \omega^k = -\int_X (\varphi_n - a_n)\omega^k.$$

Donc la suite (a_n) est bornée. Ceci implique que la suite (φ_n) est bornée dans $\mathrm{L}^p(X)$ et qu'on peut extraire des sous-suites convergentes.

□

La proposition A.3 de l'appendice fournit des estimations sur les intégrales $\int_X \exp(-\alpha\varphi)\omega^k$ avec $\alpha > 0$, pour φ q.p.s.h.

Proposition 2.2 *Il existe une constante $r > 0$ telle que, pour tout courant positif fermé T de bidegré $(1,1)$ et de masse 1, il existe une $(1,1)$-forme lisse α, qui ne dépend que de $\mathrm{cl}(T)$, et une fonction q.p.s.h. φ vérifiant $-r\omega \leq \alpha \leq r\omega$ et $\mathrm{dd^c}\varphi - T = \alpha$.*

Démonstration. On choisit des formes réelles lisses α_i de bidegré $(1,1)$ avec $i = 1, \ldots, m$ telles que les classes $\mathrm{cl}(\alpha_i)$ engendrent le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathcal{H}^{1,1}(X, \mathbb{R})$. La famille des courants T de masse 1 étant compacte, il existe une constante $c > 0$ indépendante de T et des nombres réels $c_1, \ldots, c_m$ tels que $\mathrm{cl}(T) = \sum c_i \mathrm{cl}(\alpha_i)$ avec $|c_i| \leq c$. La dernière relation entraîne l'existence d'une fonction q.p.s.h. φ telle que $\mathrm{dd^c}\varphi = T - \sum c_i\alpha_i$. Soit $r > 0$ une constante telle que $-r\omega \leq \sum c_i\alpha_i \leq r\omega$ pour tous les c_i vérifiant $|c_i| \leq c$. La constante r, la forme $\alpha := \sum c_i\alpha_i$ et la fonction φ vérifient la proposition.

□

On dit qu'un sous-ensemble de X est *pluripolaire* s'il est contenu dans $\{\varphi = -\infty\}$ où φ est une fonction q.p.s.h. (*voir* appendice). On appelle *fonction d.s.h.* toute fonction, définie hors d'un sous-ensemble pluripolaire, qui s'écrit comme différence de deux fonctions q.p.s.h. Deux fonctions d.s.h. sur X sont *égales* si elles sont égales hors d'un ensemble pluripolaire. Notons $\mathrm{DSH}(X)$ l'espace des fonctions d.s.h. sur X. On vérifie facilement que, pour une fonction d.s.h. ψ sur X, il existe deux courants $T^\pm$ positifs fermés de bidegré $(1,1)$ tels que $\mathrm{dd^c}\psi = T^+ - T^-$. On a $\mathrm{cl}(T^+) = \mathrm{cl}(T^-)$ et $\|T^+\| = \|T^-\|$. Réciproquement, d'après la proposition 2.2, si $T^\pm$ sont deux courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ tels que $\mathrm{cl}(T^+) = \mathrm{cl}(T^-)$, alors il existe une fonction ψ d.s.h. sur X telle que $\mathrm{dd^c}\psi = T^+ - T^-$. On peut choisir ψ telle que $\int_X \psi\omega^k = 0$.

Notons $r(X,\omega)$ la borne inférieure des constantes r qui vérifient la proposition 2.2. Posons

$$\mathrm{Q}(X,\omega) \quad := \quad \Big\{\varphi \text{ q.p.s.h. sur } X,\ \mathrm{dd^c}\varphi \geq -r(X,\omega)\omega\Big\} \tag{2.1}$$

Si $\dim \mathcal{H}^{1,1}(X,\mathbb{R}) = 1$ on a $r(X,\omega) = 1$. C'est le cas si X est l'espace projectif $\mathbb{P}^k$ muni de la forme de Fubini-Study ω_{FS}. En général, on a $r(X,\omega) \geq 1$. Pour l'espace multiprojectif $\mathbb{P}^{k,l}$ muni de la forme de Kähler ω_{MP}, on a $r(\mathbb{P}^{k,l},\omega_{\mathrm{MP}}) \leq cl$ où $c > 0$ est une constante indépendante de k (*voir* appendice A.11).

Remarque 2.3 D'après Kodaira-Spencer [18, p.73], si (X_t) est une famille lisse de variétés kählériennes compactes, alors $\dim \mathcal{H}^{1,1}(X_t,\mathbb{R})$ est localement constante et on peut trouver des formes de Kähler ω_t sur X_t qui dépendent de façon $\mathcal{C}^\infty$ du paramètre t. On en déduit que les constantes $r(X_t,\omega_t)$ sont localement majorées.

Observons que deux fonctions ψ_1, ψ_2 dans $\mathrm{L}^1(X)$ diffèrent par une constante si et seulement si $\mathrm{dd^c}\psi_1 = \mathrm{dd^c}\psi_2$. Nous définissons deux constantes positives liées à la résolution de $\mathrm{dd^c}$ sur (X,ω) pour des solutions normalisées. Supposons que $\int_X \omega^k = 1$. Posons pour tout $p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1^*(X,\omega) &:= \sup_\varphi \left\{ \max_X \varphi,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi\omega^k = 0 \right\} \\
&= \sup_\varphi \left\{ -\int \varphi\omega^k,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \max_X \varphi = 0 \right\} \qquad (2.2) \\
\mathrm{R}_2^*(X,\omega,p) &:= \sup_\varphi \left\{ \|\varphi\|_{\mathrm{L}^p(X)},\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi\omega^k = 0 \right\} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

On verra à la proposition 2.5, que $\mathrm{R}_2^*(X,\omega,1) \leq 2\mathrm{R}_1^*(X,\omega)$.

2.2. *Mesures PLB et mesures modérées.*

Soit μ une mesure positive sur X. On dira que μ est *PLB* si les fonctions q.p.s.h. sont μ-intégrables. Dans le cas de dimension 1, μ est PLB si et seulement si elle admet localement un potentiel borné [8]. Il est clair que les mesures PLB ne chargent pas les ensembles pluripolaires de X. On montre à la proposition A.1, qu'elles ne chargent pas les sous-ensembles analytiques propres de X.

Soient $c > 0$ et $\alpha > 0$. Nous dirons que μ est (c,α)-*modérée* si

$$\int_X \exp(-\alpha\varphi)\mathrm{d}\mu \leq c$$

pour toute φ q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$ et $\max_X \varphi = 0$. On déduit d'un résultat classique [16, p.105] que la mesure ω^k est (c,α)-modérée pour certaines constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ (*voir* proposition A.3). On verra aussi que les mesures invariantes sur les sous-espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^k$ de $\mathbb{P}^k$ sont modérées (*voir* proposition A.9). Si une mesure μ de $\mathbb{P}^1$ vérifie localement $\int_\mathbb{C} |z-\xi|^{-\alpha}\mathrm{d}\mu(\xi) \leq A$ pour une constante $A > 0$ alors elle est (c,α)-modérée pour une constante $c > 0$ convenable. On a noté z, ξ des coordonnées affines sur une carte $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$. Il est clair que toute mesure modérée est PLB.

Proposition 2.4 *Soit μ une mesure PLB sur X. La famille des fonctions q.p.s.h. φ, vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$, et l'une des deux conditions de normalisation*

$$\max_X \varphi = 0 \quad \textit{ou} \quad \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0$$

est bornée dans $\mathrm{L}^1(\mu)$ et est bornée supérieurement. De plus, il existe $c > 0$ indépendant de φ tel que pour tout $t > 0$ on ait $\mu(\varphi < -t) \leq ct^{-1}$.

Démonstration. Soit (φ_n) une suite de fonctions q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi_n \geq -\omega$ et $\max_X \varphi_n = 0$. Montrons que (φ_n) est bornée dans $\mathrm{L}^1(\mu)$. Sinon, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\int \varphi_n \mathrm{d}\mu \leq -n^2$. Posons $\Phi := \sum n^{-2}\varphi_n$. D'après la proposition 2.1, Φ est une fonction q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\Phi \geq -2\omega$. On a $\int_X \Phi \mathrm{d}\mu = -\infty$. Cela contredit que Φ soit μ-intégrable.

Soit maintenant (φ_n) une suite de fonctions q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi_n \geq -\omega$ et $\int \varphi_n \mathrm{d}\mu = 0$. Posons $a_n := \max_X \varphi_n$ et $\widetilde{\varphi}_n := \varphi_n - a_n$. On a $\sup_X \widetilde{\varphi}_n = 0$. D'après la partie précédente, $(\widetilde{\varphi}_n)$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\mu)$. Or $a_n = -\int \widetilde{\varphi}_n \mathrm{d}\mu$, donc (a_n) est bornée et par suite (φ_n) est bornée dans $\mathrm{L}^1(\mu)$. On en déduit aussi que (φ_n) est bornée supérieurement.

La famille de fonctions q.p.s.h. considérées étant bornée dans $\mathrm{L}^1(\mu)$, il existe $c > 0$ tel que $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leq c$ pour tout φ dans cette famille. On a donc

$$\mu(\varphi < -t) \leq t^{-1}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leq ct^{-1}.$$

□

Soit μ une mesure de probabilité PLB. Il résulte de la proposition 2.4 qu'on peut définir les meilleures constantes pour la résolution de $\mathrm{dd^c}$, avec une normalisation associée à μ. Posons

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_1(X,\omega,\mu) &:= \sup_\varphi \left\{ \max_X \varphi,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0 \right\} \\
&= \sup_\varphi \left\{ -\int \varphi \mathrm{d}\mu,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \max_X \varphi = 0 \right\} \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{R}_2(X,\omega,\mu) := \sup_\varphi \left\{ \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)},\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0 \right\} \qquad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_3(X,\omega,\mu) &:= \sup_\varphi \left\{ \left| \int \varphi\omega^k \right|,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0 \right\} \\
&:= \sup_\varphi \left\{ \left| \int \varphi \mathrm{d}\mu \right|,\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi\omega^k = 0 \right\} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\Delta(X,\omega,\mu,t) := \sup_\varphi \left\{ \mu(\varphi < -t),\ \varphi \in \mathrm{Q}(X,\omega), \int \varphi \mathrm{d}\mu = 0 \right\} \qquad (2.7)$$

Proposition 2.5 *Soit μ une mesure de probabilité PLB sur (X,ω). On a $\mathrm{R}_2(X,\omega,\mu) \leq 2\mathrm{R}_1(X,\omega,\mu)$ et $\mathrm{R}_3(X,\omega,\mu) \leq \mathrm{R}_1(X,\omega,\mu) + \mathrm{R}_1^*(X,\omega)$. Si μ est (c,α)-modérée alors $\Delta(X,\omega,\mu,t) \leq c\exp(-\alpha r^{-1}t)$ où $r := r(X,\omega)$.*

Démonstration. Soit φ une fonction q.p.s.h. telle que $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -r\omega$ et $\int \varphi \mathrm{d}\mu = 0$. Posons $m := \max_X \varphi$. On a $m - \varphi \geq 0$ et donc

$$\begin{aligned}\int |\varphi| \mathrm{d}\mu &\leq \int |\varphi - m| \mathrm{d}\mu + m = \int (m - \varphi)\mathrm{d}\mu + m \\ &= 2m - \int \varphi \mathrm{d}\mu = 2m \leq 2\mathrm{R}_1(X, \omega, \mu).\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{R}_2(X, \omega, \mu) \leq 2\mathrm{R}_1(X, \omega, \mu)$.

Puisque $\max_X \varphi - m = 0$, d'après (2.2), on a

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi \omega^k\right| &\leq \int |\varphi - m|\omega^k + m = \int (m - \varphi)\omega^k + m \\ &\leq \mathrm{R}_1^*(X, \omega) + \mathrm{R}_1(X, \omega, \mu).\end{aligned}$$

Ceci implique que $\mathrm{R}_3(X, \omega, \mu) \leq \mathrm{R}_1(X, \omega, \mu) + \mathrm{R}_1^*(X, \omega)$.

Supposons que μ soit (c, α)-modérée. Posons $\psi := r^{-1}(\varphi - m)$. On a $\mathrm{dd^c}\psi \geq -\omega$ et $\max_X \psi = 0$. Puisque $\int \varphi \mathrm{d}\mu = 0$, on a $m \geq 0$ et donc $\psi \leq r^{-1}\varphi$. La mesure μ étant (c, α)-modérée, on a

$$\begin{aligned}\mu(\varphi < -t) &= \mu(r^{-1}\varphi < -r^{-1}t) \leq \mu(\psi < -r^{-1}t) \\ &\leq \exp(-\alpha r^{-1}t) \int \exp(-\alpha\psi)\mathrm{d}\mu \\ &\leq c \exp(-\alpha r^{-1}t).\end{aligned}$$

Donc $\Delta(X, \omega, \mu, t) \leq c \exp(-\alpha r^{-1}t)$.

□

2.3. *Image directe d'un courant.*

Soit π une application holomorphe surjective de X dans X'. Si S est un courant de bidimension (r, r) de X, avec $0 \leq r \leq k, k'$, le courant $\pi_*(S)$ est défini par

$$\langle \pi_*(S), \psi \rangle := \langle S, \pi^*(\psi) \rangle$$

pour toute forme lisse ψ de bidegré (r, r) de X'.

Si S est une forme à coefficients dans $\mathrm{L}^1(X)$, $\pi_*(S)$ l'est aussi. En effet, on peut supposer que S est réelle positive; une forme positive est à coefficients dans $\mathrm{L}^1(X)$ si et seulement si, elle définit un courant positif de masse finie dont les coefficients dans une carte sont des fonctions mesurables. Les coefficients de $\pi_*(S)$ sont obtenus par intégration sur les fibres qui sont presque partout de même dimension.

Si les fibres génériques de π sont discrètes, en général, l'image par π_* d'une fonction q.p.s.h. n'est pas q.p.s.h., elle est différence de telles fonctions, d'où l'introduction des fonctions d.s.h.

Proposition 2.6 *Soient (X,ω) et (X',ω') des variétés kählériennes compactes de dimension k. Supposons que pour un point générique $x' \in X'$ la fibre $\pi^{-1}(x')$ soit finie et non vide. Alors*

(a) *L'image de* $\mathrm{DSH}(X)$ *par* π_* *est contenue dans* $\mathrm{DSH}(X')$.

(b) *L'image de la famille* $\{\varphi$ *q.p.s.h. sur* X, $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega, \int_X \varphi\omega^k = 0\}$ *par* π_* *est relativement compacte dans* $\mathrm{L}^p(X')$ *pour tout* $p \geq 1$.

Démonstration. (a) Soit ψ une fonction q.p.s.h. dans X. Notons $I(\pi)$ l'ensemble des points $x' \in X'$ tels que la fibre $\pi^{-1}(x')$ ne soit pas finie. Il est clair que la fonction $\pi_*(\psi)$ est définie hors de l'ensemble $I(\pi)$ qui est pluripolaire (*voir* proposition A.1). Rappelons que pour $x' \in X' \setminus I(\pi)$ on a

$$\pi_*(\psi)(x') = \sum_{\pi(x_i)=x'} \psi(x_i).$$

Soient $T^{\pm}$ des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ tels que $\mathrm{dd^c}\psi = T^+ - T^-$. On a $\mathrm{dd^c}\pi_*\psi = \pi_*(T^+) - \pi_*(T^-)$. Puisque $\pi_*(T^{\pm})$ sont des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$, la fonction $\pi_*(\psi)$ est d.s.h.

(b) Soit (ψ_n) une suite de fonctions q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\psi_n \geq -\omega$ et $\int_X \psi_n\omega^k = 0$. D'après la proposition 2.1, cette suite de fonctions est bornée dans $\mathrm{L}^p(X)$ et est bornée supérieurement. Il faut montrer que la suite des $\pi_*(\psi_n)$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(X')$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ψ_n converge ponctuellement vers une fonction ψ hors d'un ensemble de mesure nulle.

Les fonctions $\pi_*(\psi_n)$ sont dans $\mathrm{L}^p(X')$ et vérifient $\mathrm{dd^c}\pi_*(\psi_n) \geq -\pi_*(\omega)$. D'après la proposition 2.2, il existe une fonction φ q.p.s.h. sur X' vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq \pi_*(\omega) - c\omega'$ où $c \geq 0$ est une constante. Posons $\varphi_n := \pi_*(\psi_n) + \varphi$. On a $\mathrm{dd^c}\varphi_n \geq -c\omega'$. Montrons que (φ_n) est bornée dans $\mathrm{L}^p(X')$. La suite (φ_n) étant bornée supérieurement, il suffit d'observer que ψ_n converge presque partout vers ψ et donc, aucune sous-suite de (φ_n) ne converge uniformément vers $-\infty$. Il en résulte que $\pi_*(\psi_n)$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(X')$. On peut en extraire des sous-suites convergentes.

□

2.4. *Image réciproque d'un courant.*

Soit π une application holomorphe surjective de X dans X'. L'image réciproque $\pi^*(\alpha)$ d'un courant α sur X' est définie lorsque π est une submersion. Si π n'est pas une submersion, on définit π^* dans les cas spéciaux suivants. Lorsque γ est une (p,q) forme à coefficients dans $\mathrm{L}^\infty(X')$, la forme $\pi^*(\gamma)$ est bien définie. C'est une forme à coefficients dans $\mathrm{L}^\infty(X)$. Lorsque ψ est une fonction d.s.h. sur X', si π est surjective, $\psi \circ \pi$ est aussi une fonction d.s.h. sur X; en particulier, on a $\psi \circ \pi \in \mathrm{L}^p(X)$ pour tout $p \geq 1$. On peut définir $\pi^*(\psi\gamma) := (\psi \circ \pi)\pi^*(\gamma)$.

Proposition 2.7 *Soit* $\pi : X \longrightarrow X'$ *une application holomorphe surjective. L'image par* π^* *de la famille*

$$\left\{\varphi \textit{ q.p.s.h. sur } X',\ \mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega',\int_{X'} \varphi {\omega'}^{k'} = 0\right\}$$

est relativement compacte dans $\mathrm{L}^p(X)$ *pour tout* $p \geq 1$.

Démonstration. Soit (ψ_n) une suite bornée dans $\mathrm{L}^p(X')$ telle que $\mathrm{dd^c}\psi_n \geq -\omega'$. Il suffit de montrer que la suite $(\pi^*(\psi_n))$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(X)$. D'après la proposition 2.1, les fonctions ψ_n sont bornées supérieurement par une même constante, il en est donc de même des fonctions $\pi^*(\psi_n)$. De plus, $\mathrm{dd^c}\pi^*(\psi_n) \geq -\pi^*(\omega') \geq -c\omega_1$ où $c := \|\pi\|_{\mathcal{C}^2}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\pi^*(\psi_n)$ tend vers une fonction φ avec $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -c\omega$ ou sinon $\pi^*(\psi_n)$ tend uniformément vers $-\infty$. Le deuxième cas ne se produit pas car la suite (ψ_n) est bornée dans $\mathrm{L}^p(X')$. On en déduit que $\pi^*(\psi_n)$ tend vers φ dans $\mathrm{L}^p(X)$.

□

Définissons π^* pour les courants de bidegré $(1,1)$ lorsque π est surjective et $k \geq k'$. Soit S un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans X', et soit α une forme lisse de bidegré $(1,1)$ de X' cohomologue à S. Il existe une fonction q.p.s.h. ψ dans X' telle que $\mathrm{dd^c}\psi = S - \alpha$. Posons $\varphi := \psi \circ \pi$. On a $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\pi^*(\alpha)$. C'est donc une fonction q.p.s.h. On pose $\pi^*(S) := \mathrm{dd^c}\varphi + \pi^*(\alpha)$. C'est un courant positif fermé de masse finie. Cette opération est continue et indépendante du choix de α et de ψ [21]. On a aussi $\mathrm{cl}(\pi^*(S)) = \mathrm{cl}(\pi^*(\alpha))$. Si ψ est une fonction d.s.h. sur X' avec $\mathrm{dd^c}\psi = T^+ - T^-$, on a $\mathrm{dd^c}\pi^*(\psi) = \pi^*(T^+) - \pi^*(T^-)$.

Notons I l'ensemble des points $x' \in X'$ tels que $\dim \pi^{-1}(x') > k - k'$. C'est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2 de X' car $\dim \pi^{-1}(I)$ est au plus égale à $k-1$. Soit H un sous-ensemble analytique de dimension pure l de X'. Supposons que $\dim \pi^{-1}(H \cap I) < l + k - k'$. Dans ce cas, on peut définir $\pi^*[H]$ comme le courant d'intégration sur $\pi^{-1}(H)$, il est alors de même bidegré que $[H]$.

Lorque X' est une variété projective et T est un courant positif fermé de bidegré (r, r), on peut définir "la partie principale" de l'image réciproque de T. On a le lemme suivant.

Lemme 2.8 **[9]** *Soit X' une variété projective munie d'une forme de Kähler ω'. Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de (X', ω'), telle que pour tout courant positif fermé T de bidegré (r, r) sur X' on puisse trouver une suite de courants positifs fermés lisses $(T_m)_{m\geq 1}$, de bidegré (r, r), vérifiant les propriétés suivantes*

1. *La suite (T_m) converge vers un courant positif fermé T'.*
2. *$T' \geq T$, c'est-à-dire que le courant $T' - T$ est positif.*
3. *On a $\|T_m\| \leq c\|T\|$ pour tout $m \geq 1$.*

Remarques 2.9 Observons que l'ensemble des classes $\mathrm{cl}(S)$ des courants S positifs fermés de bidegré (r, r) de masse 1, est borné dans $\mathcal{H}^{r,r}(X', \mathbb{R})$. Il existe donc une constante $\alpha_X > 0$ indépendante de S telle que la classe de $\alpha_X {\omega'}^r - S$ soit représentée par une forme lisse positive. On dira que S est *cohomologiquement dominé* par $\alpha_X {\omega'}^r$. Les courants T_m dans le lemme 2.8 sont cohomologiquement dominés par $c_X \|T\| {\omega'}^r$ où $c_X := c\alpha_X$.

Soit X' une variété kählérienne compacte pour laquelle il existe une projection holomorphe surjective de X sur une variété kählérienne compacte homogène de même dimension. Le lemme 2.8 reste alors valable pour tout courant T qui ne charge pas les sous-ensembles analytiques de X'.

Soit $\Omega \subset X$ l'ouvert, Zariski dense, où π est une submersion locale. Le courant $(\pi_{|\Omega})^*(T)$ est bien défini, positif, fermé sur Ω. Le lemme 2.8 permet de montrer que $(\pi_{|\Omega})^*(T)$ est de masse finie et donc, d'après Skoda [27], son prolongement trivial $\widetilde{(\pi_{|\Omega})^*(T)}$ est positif fermé sur X.

Proposition 2.10 **[9]** *Soit T un courant positif fermé sur une variété projective X'. Alors $(\pi_{|\Omega})^*(T)$ est de masse finie et l'opérateur $T \mapsto \widetilde{(\pi_{|\Omega})^*(T)}$ est semi-continu inférieurement. Plus précisément, si $T_n \to T$, tout courant adhérent à la suite $\widetilde{(\pi_{|\Omega})^*T_n}$ est supérieur ou égal à $\widetilde{(\pi_{|\Omega})^*T}$.*

3 Transformations méromorphes

Dans ce paragraphe, nous définissons les opérations: composition, produit, intersection, sur les transformations et les correspondances méromorphes. Nous étudions l'effet de ces opérations sur les degrés intermédiaires.

3.1. *Définitions.*

Notons $\pi_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$, les projections canoniques de $X_1 \times X_2$ sur X_1 et X_2. On appelle *m-chaîne holomorphe positive* de $X_1 \times X_2$ toute combinaison finie $\Gamma := \sum \Gamma_j$ où les Γ_j sont des sous-ensembles analytiques irréductibles de dimension m de $X_1 \times X_2$. Les Γ_j ne sont pas nécessairement distincts. D'après un théorème de Lelong [19], l'intégration sur la partie lisse d'une m-chaîne holomorphe positive Γ définit un courant positif fermé $[\Gamma]$ de bidimension (m, m) sur $X_1 \times X_2$. Notons $\overline{\Gamma}$ l'image de Γ par l'application $(x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$.

Soit l un entier naturel, $k_1 - k_2 \leq l < k_1$. On appelle *transformation méromorphe* F de X_1 dans X_2 toute $(k_2 + l)$-chaîne holomorphe positive $\Gamma = \sum \Gamma_j$ de $X_1 \times X_2$ telle que la restriction de π_i à chaque composante irréductible Γ_j soit surjective, $i = 1, 2$. On dira que Γ est *le graphe* de F et que $\operatorname{codim}(F) := l$ est *la codimension* de F. La transformation méromorphe $\overline{F}$ de X_2 dans X_1 associée à la $(k_2 + l)$-chaîne holomorphe $\overline{\Gamma}$ est appelée *transformation méromorphe adjointe* de F, elle est de codimension $k_2 - k_1 + l$.

Posons $F := \pi_2 \circ (\pi_{1|\Gamma})^{-1}$ et $F^{-1} := \pi_1 \circ (\pi_{2|\Gamma})^{-1}$. Ces "applications" sont définies sur les sous ensembles de X_1 et X_2. *La fibre* $F^{-1}(x_2)$ de $x_2 \in X_2$ est génériquement un sous-ensemble analytique de dimension l de X_1.

Notons $I_i(F) := \{x \in X_i,\ \dim \pi_i^{-1}(x) > k_2 + l - k_i\}$. C'est un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2 de X_i. En effet, s'il était de codimension 1, le graphe contiendrait un ouvert sur lequel π_i ne serait pas une submersion. On dira que $I_1(F)$ (resp. $I_2(F)$) est le *premier* (resp. *deuxième*) *ensemble d'indétermination* de F.

Définissons les opérateurs F^* et F_*. Soit S un courant de bidegré (r, r) sur X_2, $k_2 + l - k_1 \leq r \leq k_2$. On définit $F^*(S) := (\pi_1)_*(\pi_2^*(S) \wedge [\Gamma])$. C'est un courant de bidimension $(k_2 + l - r, k_2 + l - r)$ porté par $F^{-1}(\operatorname{supp}(S))$. Cet opérateur est défini dans les deux espaces suivants:

1. L'espace des formes lisses.

2. L'espace engendré par les courants $[H]$ où H est un sous-ensemble analytique de dimension pure $k_2 - r$ de X_2 vérifiant $\dim(\pi_{2|\Gamma})^{-1}(H \cap$

$I_2(F)) \leq k_2 - r + l - 1$.

Considérons une résolution des singularités $\pi : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ [12]. Posons $\tau_i := \pi_i \circ \pi$. On a $F = \tau_2 \circ \tau_1^{-1}$ et $F^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2^{-1}$. On a aussi $F^* = (\tau_1)_* (\tau_2)^*$ lorsque cet opérateur agit sur les courants décrits ci-dessus.

Posons $F_* := \overline{F}^* = (\tau_2)_*(\tau_1)^*$. Observons que lorsque $\mathrm{codim}(F) = 0$, l'opérateur F_* agit aussi sur les fonctions q.p.s.h. et donc sur les courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$. Dans ce cas, on peut aussi utiliser, à la place des applications τ_i, les fonctions q.p.s.h. sur les sous-ensembles analytiques.

Lorsque S est lisse, le courant $F^*(S)$ est une forme à coefficients dans $\mathrm{L}^1(X)$. Pour $x_2 \in X_2 \setminus I_2(F)$ le courant $F^*(\delta_{x_2})$ est un courant d'intégration sur une l-chaîne positive portée par $F^{-1}(x_2)$.

Pour tout s, $k_2 - k_1 + l \leq s \leq k_2$, on appelle *degré intermédiaire d'ordre* s de F le nombre

$$\begin{aligned} \lambda_s(F) \;\; &:= \;\; \int_{X_1} F^*(\omega_2^s) \wedge \omega_1^{k_2+l-s} = \int_{X_2} \omega_2^s \wedge F_*(\omega_1^{k_2+l-s}) \\ &= \;\; \int_\Gamma \pi_1^*(\omega_1^{k_2+l-s}) \wedge \pi_2^*(\omega_2^s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Par continuité, la masse du courant $F^*(\delta_{x_2})$, qui se calcule cohomologiquement, ne dépend pas de x_2, pour x_2 générique dans X_2. On en déduit que cette masse est égale au dernier degré intermédiaire $\lambda_{k_2}(F)$ de F.

Finalement, on dira qu'un point $(x_1, x_2) \in \Gamma$ est *générique* si la restriction de $\pi_{i|\Gamma}$ à un voisinage de (x_1, x_2) est une submersion pour $i = 1, 2$. Notons $\mathrm{Gen}(\Gamma)$ l'ensemble de ces points. C'est un ouvert de Zariski dense de Γ.

3.2. *Composition de transformations méromorphes.*

Soit F une transformation méromorphe de codimension l de X_1 dans X_2 comme ci-dessus. Soit F' une autre transformation méromorphe de X_2 dans X_3 associée à une $(k_3 + l')$-chaîne holomorphe $\Gamma' = \sum \Gamma'_j$ de $X_2 \times X_3$. Supposons que $l + l' < k_1$.

Considérons d'abord le cas où Γ et Γ' sont irréductibles. Définissons la composée $\Gamma' \circ \Gamma$ des graphes. Notons π_1, π_2 les projections de $X_1 \times X_2$ sur X_1 et X_2 et π'_2, π'_3 les projections de $X_2 \times X_3$ sur X_2 et X_3. Soient $x_2 \in X_2$ un point générique et (x_1, x_2), (x_2, x_3) des points génériques de $\Gamma \cap \pi_2^{-1}(z_2)$ et $\Gamma' \cap \pi_2'^{-1}(x_2)$. On peut supposer que $(x_1, x_2) \in \mathrm{Gen}(\Gamma)$ et $(x_2, x_3) \in \mathrm{Gen}(\Gamma')$. Soient $U \subset \mathrm{Gen}(\Gamma)$ et $U' \subset \mathrm{Gen}(\Gamma')$ des petits voisinages de (x_1, x_2) dans $\mathrm{Gen}(\Gamma)$ et de (x_2, x_3) dans $\mathrm{Gen}(\Gamma')$. Par définition de $\mathrm{Gen}(\Gamma)$ et $\mathrm{Gen}(\Gamma')$, on peut supposer que U et U' admettent des structures produit $U \simeq W_1 \times V_2$

et $U' \simeq V_2 \times W_3$ où V_2 désigne un voisinage de x_2 dans X_2. Les projections π_2, π'_2 de U et U' sur X_2 coïncident avec les projections des produits sur le facteur V_2. Les projections de U sur X_1 et de U' sur X_3 correspondent à des applications holomorphes $\tau : U \longrightarrow X_1$ et $\tau' : U' \longrightarrow X_3$.

Le modèle local de $\Gamma' \circ \Gamma$ est l'image de $W_1 \times V_2 \times W_3$ dans $X_1 \times X_3$ par l'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\tau(x_1, x_2), \tau'(x_2, x_3))$. On suppose que cette image est de dimension $k_3 + l + l'$. On dira alors que Γ et Γ' *se composent correctement*. Si cette hypothèse est vérifiée dans les petits ouverts, elle est vérifiée en tout point générique.

Le graphe $\Gamma' \circ \Gamma$ de $F' \circ F$ est alors l'adhérence de l'ensemble des $(x_1, x_3) \in X_1 \times X_3$ pour lesquels il existe $x_2 \in X_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Gen}(\Gamma)$ et $(x_2, x_3) \in \mathrm{Gen}(\Gamma')$ tel qu'aux voisinages de ces points Γ et Γ' se composent correctement. Le point (x_1, x_3) est compté avec la multiplicité m si m est le nombre de x_2 pour lesquels x_1, x_2, x_3 vérifient la propriété ci-dessus. Puisque Γ et Γ' se composent correctement, m est fini.

Dans le cas où Γ et Γ' ne sont pas irréductibles, on pose $\Gamma' \circ \Gamma := \sum \Gamma'_j \circ \Gamma_i$ en supposant que Γ_i et Γ'_j se composent correctement pour tout i, j. Observons que $\Gamma' \circ \Gamma$ est une $(k_3 + l + l')$-chaîne holomorphe et qu'on a $\mathrm{codim}(F' \circ F) = \mathrm{codim}(F) + \mathrm{codim}(F') = l + l'$. Observons aussi que les transformations de codimension 0 entre variétés de même dimension (*c.-à-d.* les correspondances) se composent toujours correctement.

Proposition 3.1 *Soit X_2 une variété projective de dimension k_2 munie d'une forme de Kähler ω_2. Alors il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de (X_2, ω_2), telle que*

$$\lambda_s(F' \circ F) \leq c\lambda_{k_2 - k_3 + s - l'}(F)\lambda_s(F')$$

pour tout s avec $k_3 - k_1 + l + l' \leq s \leq k_3$ et pour toutes les transformations méromorphes F de (X_1, ω_1) dans (X_2, ω_2) et F' de (X_2, ω_2) dans (X_3, ω_3).

Démonstration. Observons que dans (3.1) les formes étant lisses ou à coefficients dans L^1, les intégrales peuvent ne porter que sur des ouverts de mesure totale. Posons $S := (F')^*(\omega_3^s)$. C'est un courant positif fermé à coefficients dans $\mathrm{L}^1(X_2)$ de bidegré (r, r) sur X_2 où $r := k_2 - k_3 + s - l'$. D'après le lemme 2.8 et la remarque 2.9, il existe des courants S_m positifs fermés lisses cohomologiquement dominés par $c_{X_2}\|S\|\omega_2^r$ qui convergent vers un courant S' vérifiant $S' \geq S$. On a

$$\begin{aligned}\lambda_s(F' \circ F) &= \int_{\mathrm{Gen}(\Gamma)} (\pi_1)^*(\omega_1^{k_3+l+l'-s}) \wedge (\pi_2)^*(S) \\ &\leq \int_{\mathrm{Gen}(\Gamma)} (\pi_1)^*(\omega_1^{k_3+l+l'-s}) \wedge (\pi_2)^*(S') \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \int_\Gamma (\pi_1)^*(\omega_1^{k_3+l+l'-s}) \wedge (\pi_2)^*(S_m) \\ &\leq c_{X_2}\lambda_s(F') \int_\Gamma (\pi_1)^*(\omega_1^{k_3+l+l'-s}) \wedge (\pi_2)^*(\omega^r) \\ &= c_{X_2}\lambda_{k_2-k_3+s-l'}(F)\lambda_s(F').\end{aligned}$$

La première égalité résulte de la description locale de $\Gamma' \circ \Gamma$, la linéarité permet ensuite d'utiliser des partitions de l'unité. Pour la deuxième inégalité, on utilise une suite exhaustive de compacts de $\mathrm{Gen}(\Gamma)$.

□

3.3. *Produit et intersection de transformations méromorphes.*

Considérons deux transformations méromorphes $F_1 : X \longrightarrow X_1$ et $F_2 : X \longrightarrow X_2$ de codimensions respectives l_1 et l_2. On suppose que $l_1 + l_2 \geq k$ et qu'il existe des ouverts, Zariski denses, $\Omega_1 \subset X_1$ et $\Omega_2 \subset X_2$ tels que $F_1^{-1}(x_1) \cap F_2^{-1}(x_2)$ soit de dimension pure $l_1 + l_2 - k$ pour tout $(x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Définissons *le produit* $F_1 \bullet F_2$. C'est une transformation méromorphe de X dans $X_1 \times X_2$ de codimension $l_1 + l_2 - k$ dont nous allons décrire le graphe. Notons $\Gamma^1 = \sum \Gamma_i^1$ et $\Gamma^2 = \sum \Gamma_j^2$ les graphes de F_1 et F_2. Considérons d'abord le cas où Γ^1 et Γ^2 sont irréductibles. Le graphe $\Gamma^1 \bullet \Gamma^2$ de $F_1 \bullet F_2$ est alors l'adhérence de l'ensemble des $(x, x_1, x_2) \in X \times \Omega_1 \times \Omega_2$ avec $x \in F_1^{-1}(x_1) \cap F_2^{-1}(x_2)$. Dans le cas général, on pose $\Gamma^1 \bullet \Gamma^2 := \sum \Gamma_i^1 \bullet \Gamma_j^2$.

On munit $X_1 \times X_2$ de la forme de Kähler $\omega_{12} := c_{12}(\pi_1^*(\omega_1) + \pi_2^*(\omega_2))$ où π_1, π_2 sont des projections sur X_1 et X_2 et $c_{12}^{-k_1-k_2} := \binom{k_1+k_2}{k_1}$. Le choix de c_{12} implique que $\int_{X_1\times X_2} (\omega_{12})^{k_1+k_2} = 1$.

Proposition 3.2 *Soit X une variété projective munie d'une forme de Kähler ω. Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de (X, ω) telle que pour tout s vérifiant $k_1 + k_2 - 2k + l_1 + l_2 \leq s \leq k_1 + k_2$ on ait*

$$\lambda_s(F_1 \bullet F_2) \leq c c_{12}^s \sum \binom{s}{s_1} \lambda_{s_1}(F_1)\lambda_{s_2}(F_2)$$

avec $k_1 - k + l_1 \leq s_1 \leq k_1$, $k_2 - k + l_2 \leq s_2 \leq k_2$ *et* $s_1 + s_2 = s$.

Démonstration. Posons $F := F_1 \bullet F_2$. On a pour $r := k_1 + k_2 + l_1 + l_2 - k - s$

$$\begin{aligned} \lambda_s(F) &= \int_X F^*(\omega_{12}^s) \wedge \omega^r \\ &= c_{12}^s \sum_{s_1, s_2} \binom{s}{s_1} \int_X (F_1)^*(\omega_1^{s_1}) \wedge (F_2)^*(\omega_2^{s_2}) \wedge \omega^r \qquad (3.2) \end{aligned}$$

La dernière égalité se vérifie sur des modèles locaux à l'aide de partitions de l'unité. Estimons l'intégrale dans (3.2). Posons $S_i := (F_i)^*(\omega_i^{s_i})$. D'après le lemme 2.8, il existe des courants lisses $S_{i,m}$ cohomologiquement dominés par $c_X \|S_i\| \omega^{s_i}$ qui tendent vers un courant $S_i' \geq S_i$. L'intégrale dans (3.2) est donc majorée par

$$c_X^2 \|S_1\| \|S_2\| \int_X \omega^k = c_X^2 \lambda_{s_1}(F_1) \lambda_{s_2}(F_2).$$

□

Soient $G_1 : X_1 \longrightarrow X$ et $G_2 : X_2 \longrightarrow X$ deux transformations méromorphes. On définit *l'intersection* $G_1 \cap G_2$ de G_1 et G_2 comme l'adjoint $\overline{\overline{G}_1 \bullet \overline{G}_2}$ du produit $\overline{G}_1 \bullet \overline{G}_2$ lorsque ce produit est bien défini. C'est une transformation méromorphe de $X_1 \times X_2$ dans X. Pour (x_1, x_2) générique, $(G_1 \cap G_2)(x_1, x_2)$ est l'intersection de $G_1(x_1)$ et $G_2(x_2)$.

Remarque 3.3 Pour la validité des relations de la proposition 3.1 (resp. proposition 3.2), il suffit de supposer l'existence d'une application holomorphe surjective π de X_2 (resp. X) dans une variété kählérienne compacte homogène de même dimension (*voir* remarques 2.9).

3.4. *Familles méromorphes adaptées de sous-ensembles analytiques.*

Soit F' une transformation méromorphe de codimension l' de X_2 dans X_3 dont le graphe est irréductible. Puisque F' est surjective , la réunion de ses fibres $\mathcal{H}_{x_3} := {F'}^{-1}(x_3)$ est égale à X_2. On dira que $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{x_3})$ est *une famille adaptée d'ensembles analytiques de dimension* l'. Si x_3 n'appartient pas au deuxième ensemble d'indétermination $I_2(F')$ de F', $\mathcal{H}_{x_3}$ est de dimension $l' = \mathrm{codim}(F')$. D'après le théorème de Bertini [24, p.141], pour x_3 générique, les composantes de $\mathcal{H}_{x_3}$ sont de multiplicité 1. On a donc $[\mathcal{H}_{x_3}] = (F')^*(\delta_{x_3})$.

Comme précédemment, soit F une transformation méromorphe de codimension l de X_1 dans X_2. Supposons que $l + l' < k_1$. On dira que $\mathcal{H}$ est F-régulière si pour $x_3 \in X_3$ générique, la dimension de $F^{-1}(\mathcal{H}_{x_3} \cap I_2(F))$ est strictement plus petite que $(l+l')$. Pour un tel x_3, le courant $F^*F'^*(\delta_{x_3})$ est bien défini. C'est un courant d'intégration sur une chaîne holomorphe de dimension $(l+l')$. La famille $\mathcal{H}$ est dite *régulière*, si elle est F-régulière pour toute transformation méromorphe F d'une variété X_1 dans X_2. Les familles adaptées de sous-variétés associées aux transformations méromorphes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et $F_{l,n}$ que nous allons décrire au paragraphe 3.6 sont régulières.

Les *intersections de familles adaptées* de sous-ensembles analytiques sont définies comme étant associées aux produits de transformations méromorphes.

3.5. *Correspondances méromorphes.*

Supposons que $\dim X_1 = \dim X_2 = k$. Une *correspondance (méromorphe)* de X_1 dans X_2 est une transformation méromorphe f de codimension 0 de X_1 dans X_2. Notons $\Gamma = \sum \Gamma_i$ le graphe de f. La correspondance $\overline{f}$ de X_2 dans X_1 associée à $\overline{\Gamma}$ est appelée *correspondance adjointe* de f.

Lorsque la restriction de π_1 à Γ est injective hors d'un sous-ensemble analytique, on dira que f est une *application méromorphe surjective*. On dit que f est *biméromorphe* si f et son adjoint $\overline{f}$ sont des applications méromorphes surjectives.

Notons $\mathrm{D}(X_1, \omega_1)$ l'ensemble des fonctions ψ d.s.h. sur X_1 pour lesquelles il existe des courants $T^\pm$ positifs fermés de bidegré $(1,1)$ et de masse 1 vérifiant $\mathrm{dd^c}\psi = T^+ - T^-$. Posons

$$\mathrm{A}(f) \;\;:=\;\; \sup_{\psi} \left\{ \left| \int_{X_2} f_*(\psi)\omega_2^k \right|,\ \psi \in \mathrm{D}(X_1, \omega_1), \int \psi\omega_1^k = 0 \right\} \qquad (3.3)$$

D'après les propositions 2.6 et 2.7, cette constante est finie. Elle mesure combien f_* perturbe la normalisation $\int \psi\omega_1^k = 0$.

Considérons le cas où $X_1 = X_2 = X$. On notera f^n la correspondance $f \circ \cdots \circ f$ (n fois). Pour tout $0 \leq s \leq k$, on définit le degré dynamique d'ordre s de f par la formule suivante:

$$d_s(f) \;\;:=\;\; \limsup_{n\to\infty} \left[\lambda_s(f^n)\right]^{1/n} \qquad (3.4)$$

Le dernier degré dynamique $d_k(f)$ est égal au nombre d'éléments de la fibre $f^{-1}(z)$ pour un point z générique (ce nombre ne dépend pas de z).

C'est *le degré topologique* de f, on le note par $d_t(f)$. On a aussi $d_0(f) = d_t(\overline{f})$. Observons que si X est une variété projective, d'après le lemme 2.8, $\lambda_{s+s'}(f) \leq c\lambda_s(f)\lambda_{s'}(f)$. Dans ce cas, la suite $[\lambda_s(f)]^{1/n}$ converge vers sa borne inférieure $\inf_{n\geq 1}[\lambda_s(f^n)]^{1/n}$ (*voir* [9]).

3.6. *Exemples.*

(a) Notons $\mathbb{P}^k$ l'espace projectif complexe et $\mathrm{G}(k-l+1,k+1)$ la grassmannienne qui paramètre la famille des sous-espaces projectifs de dimension $k-l$ de $\mathbb{P}^k$. Pour $\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}(k-l+1,k+1)$, soit $\mathbb{P}^{k-l}_{\hat{\mathbf{s}}}$ le sous-espace projectif de dimension $k-l$ correspondant. Posons

$$\Gamma_1 := \{(z,\hat{\mathbf{s}}) \in \mathbb{P}^k \times \mathrm{G}(k-l+1,k+1),\ z\in \mathbb{P}^{k-l}_{\hat{\mathbf{s}}}\}.$$

La transformation méromorphe Ψ_1 de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathrm{G}(k-l+1,k+1)$ associée à la variété Γ_1 est de codimension $k-l$. En effet, si $\hat{\mathbf{s}}$ est un point de $\mathrm{G}(k-l+1,k+1)$, $\Psi_1^{-1}(\hat{\mathbf{s}})$ est le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{k-l}_{\hat{\mathbf{s}}}$ de $\mathbb{P}^k$.

Donnons une autre manière de voir ces transformations méromorphes. Soit $\mathbb{P}^{k*} := \mathrm{G}(k,k+1)$ le dual de $\mathbb{P}^k$ et soit $\mathrm{G}^*(l,k+1)$ la grassmannienne qui paramètre les sous-espaces projectifs de dimension $l-1$ de $\mathbb{P}^{k*}$. Elle est biholomorphe à $\mathrm{G}(k-l+1,k+1)$. Pour tout $\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}^*(l,k+1)$ notons $\mathbb{P}^{(l-1)*}_{\check{\mathbf{s}}}$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}^{k*}$ associé à $\check{\mathbf{s}}$. On choisit l points $s_1,\ldots,s_l$ de $\mathbb{P}^{(l-1)*}_{\check{\mathbf{s}}}$ qui engendrent $\mathbb{P}^{(l-1)*}_{\check{\mathbf{s}}}$. Notons $\mathbb{P}^{k-1}_{s_i}$ l'hyperplan de $\mathbb{P}^k$ associé à s_i et $\mathbb{P}^{k-l}_{\check{\mathbf{s}}} := \mathbb{P}^{k-1}_{s_1}\cap\ldots\cap\mathbb{P}^{k-1}_{s_l}$. Le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{k-l}_{\check{\mathbf{s}}}$ de $\mathbb{P}^k$ est indépendant du choix des s_i.

Posons

$$\Gamma_2 := \{(z,\check{\mathbf{s}}) \in \mathbb{P}^k \times \mathrm{G}^*(l,k+1),\ z\in \mathbb{P}^{k-l}_{\check{\mathbf{s}}}\}.$$

La transformation méromorphe Ψ_2 de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathrm{G}^*(l,k+1)$ associée à Γ_2 est de codimension $k-l$. Si $\check{\mathbf{s}}$ est un point de $\mathrm{G}^*(l,k+1)$, $\Psi_2^{-1}(\check{\mathbf{s}})$ est le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{k-l}_{\check{\mathbf{s}}}$ de $\mathbb{P}^k$.

(b) Considérons *l'espace multiprojectif* $\mathbb{P}^{k,l*} := \mathbb{P}^{k*}\times\cdots\times\mathbb{P}^{k*}$ (l fois). Posons

$$\begin{aligned}\Gamma_3 \ := \ \Big\{&(\mathbf{s},\check{\mathbf{s}}) \in \mathbb{P}^{k,l*}\times \mathrm{G}^*(l,k+1),\\ &\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_l), \mathbb{P}^{k-l}_{\check{\mathbf{s}}} \subset \mathbb{P}^{k-1}_{s_i} \text{ pour } i=1,\ldots,l\Big\}.\end{aligned}$$

Notons Π_l la transformation méromorphe de $\mathbb{P}^{k,l*}$ dans $\mathrm{G}^*(l,k+1)$ associée à Γ_3. C'est une application méromorphe surjective. Soit $\overline{\Pi}_l$ son adjoint. La composée $\Psi_3 := \overline{\Pi}_l \circ \Psi_2$ est une transformation méromorphe de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^{k,l*}$. Pour un point $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l)$ générique de $\mathbb{P}^{k,l*}$, la fibre $\Psi_3^{-1}(\mathbf{s})$ est le sous-espace projectif $\mathbb{P}^{k-l}_{\mathbf{s}} := \mathbb{P}^{k-1}_{s_1} \cap \ldots \cap \mathbb{P}^{k-1}_{s_l}$ de $\mathbb{P}^k$.

(c) Nous allons étendre la définition des transformations méromorphes de (a) et (b) avec, pour espace d'arrivée, un espace projectif de sections holomorphes. Considérons une variété projective X et soit L un fibré en droites ample sur X. Pour $n \geq 1$, notons $\mathrm{H}^0(X, L^n)$ l'espace des sections holomorphes de $L^n := L \otimes \cdots \otimes L$ (n fois), $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ l'espace projectif associé et k_n la dimension de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$. Pour tout $s^* \in \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ notons H_{s^*} l'hyperplan projectif de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ associé à s^*. Rappelons que $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ est aussi le dual de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$. Pour tout $s \in \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$, notons H^*_s l'hyperplan projectif de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ associé à s.

Pour $x \in X$, notons $s^*_x \in \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ le point tel que l'hyperplan $H_{s^*_x}$ soit l'ensemble des sections s'annulant en x. Considérons l'application holomorphe Φ_n de X dans $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ définie par $x \mapsto \Phi_n(x) := s^*_x$. Puisque L est ample, pour n assez grand, l'application Φ_n définit un plongement de X dans $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$, c'est le plongement de Kodaira. Observons que $\Phi_n^{-1}(H^*_s \cap \Phi_n(X))$ est l'ensemble des zéros de s. D'après le théorème de Bertini [24, p.141], cette intersection est transverse et définit une hypersurface lisse de X pour tout s hors d'un sous-ensemble analytique de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$.

Notons $\mathrm{G}^X_{l,n}$ la grassmannienne des sous-espaces projectifs de dimension $l-1$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$. On définit comme dans (a) une transformation méromorphe $\Psi_{l,n}$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ dans $\mathrm{G}^X_{l,n}$. Pour tout point $\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}^X_{l,n}$, $\Psi^{-1}_{l,n}(\check{\mathbf{s}})$ est un sous-espace projectif de dimension $k_n - l$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$. Posons $R_{l,n} := \Psi_{l,n} \circ \Phi_n$. C'est une transformation méromorphe de codimension $k - l$ de X dans $\mathrm{G}^X_{l,n}$. Précisons cela.

Notons $s_1, \ldots, s_l$ des points qui engendrent le sous-espace $\mathbb{P}^{l-1}_{\check{\mathbf{s}}}$ de dimension $l-1$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$, pour $\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}^X_{l,n}$. Alors $\Psi^{-1}_{l,n}(\check{\mathbf{s}})$ est égal au sous-espace projectif $H^*_{s_1} \cap \ldots \cap H^*_{s_l}$ de dimension $k_n - l$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$. On en déduit que $R^{-1}_{l,n}(\check{\mathbf{s}})$ est l'ensemble $\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}$ des zéros communs des sections s_1, …, s_l. Cet ensemble ne dépend pas du choix des s_i. D'après le théorème de Bertini [24, p.141], pour $\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}^X_{l,n}$ hors d'un sous-ensemble analytique, l'intersection de $\Psi^{-1}_{l,n}(\check{\mathbf{s}})$ avec $\Phi_n(X)$ est transverse. Pour un tel $\check{\mathbf{s}}$, $\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}$ est lisse.

Soit $\Pi_{l,n}$ l'application méromorphe de $\mathbb{P}^X_{l,n} := \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n) \times \cdots \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ (l fois) dans $\mathrm{G}^X_{l,n}$ définie comme dans (b). Soit $\overline{\Pi}_{l,n}$ sont adjoint. Posons

$F_{l,n} := \overline{\Pi}_{l,n} \circ R_{l,n}$. C'est une transformation méromorphe de X dans $\mathbb{P}^X_{l,n}$. Pour tout $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l) \in \mathbb{P}^X_{l,n}$, la fibre $F^{-1}_{l,n}(\mathbf{s})$ est l'ensemble des zéros communs des sections holomorphes $s_1, \ldots, s_l$ de L^n. Pour un $\mathbf{s}$ générique, cette fibre est égale à $\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}$ avec $\check{\mathbf{s}} := \Pi_{l,n}(\mathbf{s})$. En particulier, c'est un sous-ensemble analytique lisse de dimension $k - l$, sans multiplicité.

Soient $z_1, \ldots, z_m$ des points de X. Pour n suffisamment grand, on peut trouver un sous-espace projectif de dimension l de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$ passant par $\Phi_n(z_1), \ldots, \Phi_n(z_m)$. C'est-à-dire qu'on peut trouver une famille libre de l sections holomorphes de L^n qui s'annulent simultanément en $z_1, \ldots, z_m$. On peut définir les auto-intersections des transformations méromorphes $F_{l,n}$ et $R_{l,n}$, en posant $F_{l,n,m} := F_{l,n} \cap \ldots \cap F_{l,n}$ (m fois) et $R_{l,n,m} := R_{l,n} \cap \ldots \cap R_{l,n}$ (m fois). Ce sont des transformations méromorphes de X^m dans $\mathbb{P}^X_{l,n}$ et dans $\mathrm{G}^X_{l,n}$. Un point $(z_1, \ldots, z_m) \in X^m$ appartient à la fibre $F^{-1}_{l,n,m}(\mathbf{s})$ (resp. $R^{-1}_{l,m,n}(\check{\mathbf{s}})$) si et seulement si $\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}$ passe par $z_1, \ldots, z_m$.

(d) Soit f une application méromorphe de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$. Pour étudier les images réciproques par f^n des sous-espaces de dimension $k - l$, nous introduisons les transformations méromorphes $F_n := \Psi_2 \circ f^n$ avec Ψ_2 définie dans l'exemple (a) On se ramène à l'étude des images réciproques des points de $\mathrm{G}^*(l, k+1)$ par F_n.

4 Distribution des préimages de sous-variétés

Dans ce paragraphe, nous donnons des solutions au problème d'équidistribution dans un cadre abstrait. Nous allons, dans les paragraphes 6 et 7, appliquer ces résultats aux cas particuliers que nous avons discutés dans l'introduction. Des idées analogues permettent de construire, au paragraphe 5, les mesures d'équilibre pour les correspondances méromorphes.

Soit σ_n une mesure de probabilité PLB sur X_n. On munit $\mathbf{X} := \prod_{n\geq 1} X_n$ de la mesure de probabilité σ, égale au produit des σ_n. Considérons des transformations méromorphes F_n de même codimension l de X dans X_n, $0 \leq l < k$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{X}$. Si x_n n'appartient pas au deuxième ensemble d'indétermination $I_2(F_n)$ de F_n, le courant $T^{\mathbf{x}}_n := (F_n)^*(\delta_{x_n})$ est bien défini. C'est un courant d'intégration sur une chaîne holomorphe de dimension l de X. Posons $T_n := (F_n)^*(\sigma_n)$.

Soient δ_n et d_n les degrés intermédiaires d'ordre $k_n - 1$ et d'ordre k_n de F_n. Posons $\mathrm{R}_{1,n} := \mathrm{R}_1(X_n, \omega_n, \sigma_n)$, $\mathrm{R}_{2,n} := \mathrm{R}_2(X_n, \omega_n, \sigma_n)$ et $\Delta_n(t) :=$

$\Delta(X_n, \omega_n, \sigma_n, t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (*voir* paragraphe 2). On a le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Supposons que la suite* $(\mathrm{R}_{1,n}\delta_n d_n^{-1})_{n\geq 1}$ *tend vers* 0 *et que l'une des deux propriétés suivantes soit satisfaite:*

(1) *La série* $\sum_{n\geq 1} \mathrm{R}_{2,n}\delta_n d_n^{-1}$ *converge.*

(2) *La série* $\sum_{n\geq 1} \Delta_n(\delta_n^{-1} d_n t)$ *converge pour tout* $t > 0$.

Alors pour σ*-presque tout* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, *la suite* $\langle d_n^{-1}(T_n^{\mathbf{x}} - T_n), \psi\rangle$ *tend vers* 0 *uniformément sur les ensembles bornés, en norme* $\mathcal{C}^2$, *de* (l,l)*-formes test* ψ *sur* X.

Nous allons montrer les estimations utiles en nous limitant à une transformation méromorphe F de codimension l, $0 \leq l \leq k-1$, de (X, ω) dans une variété kählérienne compacte (X', ω') de dimension k'. Soit σ' une mesure de probabilité PLB sur X'. Posons $\widetilde{T} := F^*(\omega'^{k'})$, $T := F^*(\sigma')$ et $T^{x'} := F^*(\delta_{x'})$ pour tout $x' \in X' \setminus I_2(F)$.

Soient δ et d les degrés intermédiaires d'ordre $k'-1$ et d'ordre k' de F. Posons $\mathrm{R}_i := \mathrm{R}_i(X', \omega', \sigma')$ pour $i = 1, 2, 3$, $\Delta(t) := \Delta(X', \omega', \sigma', t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\epsilon > 0$ définissons

$$E(\epsilon) := \bigcup_{\|\psi\|_{\mathcal{C}^2(X)} \leq 1} \Big\{ x' \in X',\ \Big|\langle d^{-1}(T^{x'} - T), \psi\rangle\Big| \geq \epsilon \Big\}.$$

Posons $S := F_*(\omega^{l+1})$. C'est un courant de bidegré $(1,1)$ sur X'. Par définition de δ, on a $\|S\| \leq \delta$. D'après la proposition 2.2, il existe une fonction q.p.s.h. φ vérifiant

$$\int_{X'} \varphi \mathrm{d}\sigma' = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{dd^c}\varphi - S \geq -r(X', \omega')\delta\omega' \tag{4.1}$$

Par définition de R_i, on a

$$\varphi \leq \delta \mathrm{R}_1, \quad \|\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\sigma')} \leq \delta \mathrm{R}_2 \quad \text{et} \quad \Big|\int \varphi \omega'^{k'}\Big| \leq \delta \mathrm{R}_3.$$

Lemme 4.2 *Soit* ψ *une* (l,l)*-forme test de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* X. *Alors on a*

(a) $\displaystyle\int_{X'} \Big|\langle T^{x'} - T, \psi\rangle\Big| \mathrm{d}\sigma'(x') \leq 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta \mathrm{R}_2.$

(b) $\Big|\langle T^{x'} - T, \psi\rangle\Big| \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\big(3\delta \mathrm{R}_1 - \varphi(x')\big).$

(c) $\left|\langle T-\widetilde{T},\psi\rangle\right|\leq 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_3$.

(d) $\sigma'(E(\epsilon))\leq\Delta(\epsilon\delta^{-1}d-3\mathrm{R}_1)$.

Démonstration. Nous devons estimer $\langle T^{x'}-T,\psi\rangle$ et $\langle T-\widetilde{T},\psi\rangle$. Ecrivons $\mathrm{dd^c}\psi=\Omega^+-\Omega^-$ avec $\Omega^\pm$ des $(l+1,l+1)$-formes positives fermées telles que $\Omega^\pm\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\omega^{l+1}$. Posons $\phi:=F_*(\psi)$ et $S^\pm:=F_*(\Omega^\pm)$. On a $\mathrm{dd^c}\phi=S^+-S^-$ et $\langle T^{x'},\psi\rangle=\phi(x')$ pour $x'\not\in I_2(F)$. On a aussi $S^\pm\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}S$ et donc $\|S^\pm\|\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta$.

D'après la proposition 2.2, on peut choisir les fonctions q.p.s.h. $\varphi^\pm$ telles que $\int_{X'}\varphi^\pm\mathrm{d}\sigma'=0$ et telles que

$$\begin{aligned}-r(X',\omega')\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\omega' &\leq \mathrm{dd^c}\varphi^+-S^+=\\ &= \mathrm{dd^c}\varphi^--S^-\leq r(X',\omega')\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\omega'. \end{aligned}\tag{4.2}$$

Par définition des R_i on a

$$\varphi^\pm\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_1,\ \|\varphi^\pm\|_{\mathrm{L}^1(\sigma')}\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_2,\ \left|\int\varphi^\pm{\omega'}^{k'}\right|\leq\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_3.\tag{4.3}$$

La fonction $\phi-(\varphi^+-\varphi^-)$ est constante car elle est pluriharmonique. Par conséquent, on a pour $x'\not\in I_2(F)$

$$\langle T^{x'}-T,\psi\rangle = \langle\delta_{x'}-\sigma',\phi\rangle=\langle\delta_{x'}-\sigma',\varphi^+-\varphi^-\rangle\tag{4.4}$$

Puisque $\int\varphi^\pm\mathrm{d}\sigma'=0$, on déduit de la relation (4.4) que

$$\langle T^{x'}-T,\psi\rangle=\varphi^+(x')-\varphi^-(x').$$

(a) On a

$$\begin{aligned}\int_{X'}\left|\langle T^{x'}-T,\psi\rangle\right|\mathrm{d}\sigma'(x') &= \int\left|\varphi^+(x')-\varphi^-(x')\right|\mathrm{d}\sigma'(x')\\ &\leq \|\varphi^+\|_{\mathrm{L}^1(\sigma')}+\|\varphi^-\|_{\mathrm{L}^1(\sigma')}\\ &\leq 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_2.\end{aligned}$$

(b) Posons $h:=\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\varphi-\varphi^+$. On a par définition de φ et φ^+:

$$\mathrm{dd^c}h-(\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}S-S^+)\geq-2r(X',\omega')\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\omega'.$$

D'une part, la fonction h vérifie $\int_{X'}h\mathrm{d}\sigma'=0$. D'autre part, $\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}S-S^+$ est un courant positif fermé dont la masse est majorée par $\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta$. D'où on déduit, par définition de R_1, que $\sup_{X'} h \leq 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_1$. On déduit de cette inégalité et de (4.3) les inégalités suivantes

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\varphi(x') - 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_1 \leq \varphi^+(x') \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta\mathrm{R}_1.$$

Avec une estimation analogue pour φ^-, on obtient finalement

$$\left|\langle T^{x'} - T, \psi\rangle\right| = \left|\varphi^+(x') - \varphi^-(x')\right| \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}^2}(3\delta\mathrm{R}_1 - \varphi(x')).$$

(c) D'après (4.3), on a

$$\begin{aligned}\left|\langle T - \widetilde{T}, \psi\rangle\right| &= \left|\langle \sigma - {\omega'}^{k'}, \varphi^+ - \varphi^-\rangle\right| = \left|\langle {\omega'}^{k'}, \varphi^+ - \varphi^-\rangle\right| \\ &\leq \left|\langle {\omega'}^{k'}, \varphi^+\rangle\right| + \left|\langle {\omega'}^{k'}, \varphi^-\rangle\right| \leq 2\delta\mathrm{R}_3.\end{aligned}$$

(d) D'après (b) appliqué au cas où $\|\psi\|_{\mathcal{C}^2} \leq 1$, l'ensemble $E(\epsilon)$ est contenu dans

$$E'(\epsilon) := \{x' \in X',\ \varphi(x') \leq -\epsilon d + 3\delta\mathrm{R}_1\}.$$

Par définition de $\Delta(t)$, les relations (4.1) entraînent que

$$\sigma'(E(\epsilon)) \leq \sigma'(E'(\epsilon)) \leq \Delta(\epsilon\delta^{-1}d - 3\mathrm{R}_1).$$

$\square$

Fin de la démonstration du théorème 4.1. Posons $S_n := (F_n)_*(\omega^{l+1})$. On a $\|S_n\| \leq \delta_n$. D'après la proposition 2.2, il existe une fonction q.p.s.h. φ_n vérifiant $\int_{X_n} \varphi_n \mathrm{d}\sigma_n = 0$ telle que

$$\mathrm{dd^c}\varphi_n - S_n \geq -r(X_n, \omega_n)\delta_n\omega_n.$$

Par définition de $\mathrm{R}_{1,n}$ et $\mathrm{R}_{2,n}$, on a $\varphi_n \leq \delta_n\mathrm{R}_{1,n}$ et $\|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_n)} \leq \delta_n\mathrm{R}_{2,n}$.

(1) Considérons la fonction réelle positive Φ sur $\mathbf{X}$

$$\Phi(\mathbf{x}) := \sum_{n\geq 1} d_n^{-1}|\varphi_n(x_n)|.$$

On a

$$\int_{\mathbf{X}} \Phi\mathrm{d}\sigma = \sum_{n\geq 1} d_n^{-1}\|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^1(\sigma_n)} \leq \sum_{n\geq 1} \mathrm{R}_{2,n}\delta_n d_n^{-1}.$$

Par hypothèse, la dernière série converge, donc $\Phi(\mathbf{x})$ est finie σ-presque partout, et $d_n^{-1}\varphi_n(x_n)$ tend vers 0 pour σ-presque tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Fixons $\mathbf{x} = (x_n) \in \mathbf{X}$ tel que $x_n \notin I_2(F_n)$ et tel que $d_n^{-1}\varphi_n(x_n)$ tende vers 0. Soit ψ une (l,l)-forme de classe $\mathcal{C}^2$ sur X. D'après le lemme 4.2, on a

$$|\langle T_n^{\mathbf{x}} - T_n, \psi\rangle| \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}^2}(3\delta_n \mathrm{R}_{1,n} - \varphi_n(x_n)).$$

Comme $\mathrm{R}_{1,n}\delta_n d_n^{-1}$ et $d_n^{-1}\varphi_n(x_n)$ tendent vers 0, la suite $d_n^{-1}\langle T_n^{\mathbf{x}} - T_n, \psi\rangle$ tend aussi vers 0 uniformément sur les ensembles bornés en norme $\mathcal{C}^2$ de (l,l)-formes test ψ sur X.

(2) Posons pour tout $\epsilon > 0$

$$E_n(\epsilon) := \bigcup_{\|\psi\|_{\mathcal{C}^2(X)} \leq 1} \left\{ x_n \in X_n,\ \left|\left\langle d_n^{-1}(T^{x_n} - T), \psi\right\rangle\right| \geq \epsilon \right\}.$$

Par hypothèse, on a $\mathrm{R}_{1,n} = \mathrm{o}(\delta_n^{-1}d_n)$. D'après le lemme 4.2(d), pour n assez grand, on a

$$\sigma_n(E_n(\epsilon)) \quad \leq \quad \Delta_n(\epsilon\delta_n^{-1}d_n - 3\mathrm{R}_{1,n}) \leq \Delta_n(\epsilon\delta_n^{-1}d_n/2) \qquad (4.5)$$

Par hypothèse, la série $\sum \Delta(\epsilon\delta_n^{-1}d_n/2)$ converge. On en déduit que la série $\sum \sigma_n(E_n(\epsilon))$ converge pour tout $\epsilon > 0$. Ceci implique la convergence annoncée.

□

La proposition suivante permet de comparer les courants obtenus en prenant les images réciproques de σ_n et de la forme volume $\omega_n^{k_n}$.

Proposition 4.3 *Supposons que la suite* $\mathrm{R}_3(X_n, \omega_n, 1)\delta_n d_n^{-1}$ *tend vers* 0. *Alors* $\langle d_n^{-1}(T_n - F_n^*(\omega_n^{k_n})), \psi\rangle$ *tend vers* 0 *uniformément sur les ensembles bornés, en norme* $\mathcal{C}^2$*, de* (l,l)*-formes* ψ *sur* X.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 4.2(c) avec les estimations comme dans la démonstration du théorème 4.1.

□

Posons $\mathrm{R}_n^* := \mathrm{R}_2^*(X_n, \omega_n, 2)$. Soient $\nu_n = h_n\omega_n^{k_n}$ et $\nu_n' = h_n'\omega_n^{k_n}$ des mesures de probabilité sur X_n où h_n et h_n' sont des fonctions dans $\mathrm{L}^2(X_n)$. On a le résultat suivant.

Théorème 4.4 *Supposons que* $\|h_n - h_n'\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} = \mathrm{o}(\delta_n^{-1}d_n(\mathrm{R}_n^*)^{-1})$. *Alors la suite*

$$d_n^{-1}\left\langle (F_n)^*(\nu_n) - (F_n)^*(\nu_n'), \psi\right\rangle$$

tend vers 0 *quand* n *tend vers l'infini, uniformément sur les ensembles bornés, en norme* $\mathcal{C}^2$*, de* (l,l)*-formes test* ψ *sur* X.

Démonstration. Utilisons les notations du théorème 4.1. Posons $\phi_n := (F_n)_*(\psi)$. Il existe des constantes a_n et des fonctions q.p.s.h. $\varphi_n^\pm$ telles que $\phi_n = \varphi_n^+ - \varphi_n^- + a_n$ et $\|\varphi_n^\pm\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \leq \|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\mathrm{R}_n^*\delta_n$. Puisque ν_n et ν_n' ont la même masse, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que

$$\begin{aligned} d_n^{-1}\big|\big\langle (F_n)^*(\nu_n) - (F_n)^*(\nu_n'), \psi\big\rangle\big| &= d_n^{-1}\big|\big\langle (h_n - h_n')\omega_n^{k_n}, \phi_n - a_n\big\rangle\big| \\ &\leq d_n^{-1}\|h_n - h_n'\|_{\mathrm{L}^2(X_n)}\|\phi_n - a_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \\ &\leq 2\|\psi\|_{\mathcal{C}^2}\delta_n d_n^{-1}\mathrm{R}_n^*\|h_n - h_n'\|_{\mathrm{L}^2(X_n)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, la dernière expression tend vers 0. Ceci implique le théorème. □

Remarque 4.5 Dans le cas où les $(X_n, \omega_n, \sigma_n)$ appartiennent à une famille compacte lisse, les constantes $\mathrm{R}_{1,n}$ et R_n^* sont uniformément bornées (*voir* remarque 2.3). Les hypothèses des théorèmes 4.1 et 4.4 ne font alors intervenir que les degrés intermédiaires de F_n. Ces degrés sont calculés cohomologiquement.

Dans la suite, nous considérons des transformations méromorphes F_n de X dans une même variété X', *c.-à-d.* qu'on suppose que $(X_n, \omega_n) = (X', \omega')$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 4.6 *Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} d_n^{-1}\delta_n$ converge. Alors il existe un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de X' tel que pour tout $x' \in X' \setminus \mathcal{E}$ la suite*

$$\big\langle d_n^{-1}\big((F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*({\omega'}^{k'})\big), \psi\big\rangle$$

tend vers 0 uniformément sur les ensembles bornés, en norme $\mathcal{C}^2$, de (l,l)-formes test ψ sur X.

Démonstration. Posons $r := r(X', \omega')$, $\mathrm{R}_1^* := \mathrm{R}_1^*(X', \omega')$, $\mathrm{R}_2^* := \mathrm{R}_2^*(X', \omega', 1)$ et $S_n := (F_n)_*(\omega^{l+1})$. On a $\|S_n\| \leq \delta_n$. D'après la proposition 2.2, il existe une fonction q.p.s.h. φ_n vérifiant

$$\int_{X'} \varphi_n {\omega'}^{k'} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{dd^c}\varphi_n - S_n \geq -r\delta_n\omega'.$$

Par définition de R_1^* et R_2^*, on a $\varphi_n \leq \mathrm{R}_1^*\delta_n$ et $\|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^1(X')} \leq \mathrm{R}_2^*\delta_n$. On en déduit que la série

$$\Phi(x') := \sum_{n\geq 1} d_n^{-1}\varphi_n(x')$$

converge vers une fonction q.p.s.h. Posons

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n\geq 1} I_2(F_n) \cup (\Phi = -\infty).$$

D'après la proposition A.1, c'est un ensemble pluripolaire de X'. Pour $x' \in X' \setminus \mathcal{E}$, on a $\lim d_n^{-1}\varphi_n(x') = 0$. D'après le lemme 4.2(b) appliqué à la mesure $\sigma' := {\omega'}^{k'}$, la suite $\langle d_n^{-1}((F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*({\omega'}^{k'})), \psi\rangle$ tend vers 0 uniformément sur les ensembles bornés, en norme $\mathcal{C}^2$, de (l,l)-formes test ψ sur X.

$\square$

Remarques 4.7 Supposons que $\sum_{n\geq 1} \delta_n^p d_n^{-p} < +\infty$ pour un $p > 1$. Soit ν une mesure de probabilité telle que $\int_X |\varphi|^p \mathrm{d}\nu < +\infty$ pour toute fonction q.p.s.h. φ sur X. En considérant la série $\Phi_p(x') := \sum_{n\geq 1} d_n^{-p}|\varphi_n(x')|^p$, on montre comme au théorème 4.6 que pour ν-presque tout $x' \in X'$ la suite de courants $d_n^{-1}(F_n^*(\delta_{x'}) - F_n^*({\omega'}^{k'}))$ tend faiblement vers 0. On a également la convergence uniforme sur les formes bornées en norme $\mathcal{C}^2$.

Soit (c_n) une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum_{n\geq 1} c_n\delta_n$ converge. Alors il existe un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de X' tel que pour $x' \in X' \setminus \mathcal{E}$ la suite $c_n\big\langle (F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*({\omega'}^{k'}), \psi\big\rangle$ tend vers 0 uniformément sur les ensembles bornés, en norme $\mathcal{C}^2$, de (l,l)-formes test sur X. Dans ce cas, l'hypothèse $\sum_{n\geq 1} \delta_n d_n^{-1} < +\infty$ n'est pas nécessaire. La même remarque est valable pour le théorème 4.1.

Théorème 4.8 *Soit σ' une mesure de probabilité PLB sur X'. Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} \Delta(X', \omega', \sigma', t\delta_n^{-1}d_n)$ converge pour tout $t > 0$. Alors pour σ'-presque tout $x' \in X'$, la suite $\langle d_n^{-1}((F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*({\omega'}^{k'})), \psi\rangle$ tend vers 0 uniformément sur les ensembles bornés, en norme $\mathcal{C}^2$, de (l,l)-formes test ψ sur X.*

Démonstration. Soient $r := r(X', \omega')$, $\mathrm{R}_1^* := \mathrm{R}_1^*(X', \omega')$ et $\Delta(t) := \Delta(X', \omega', \sigma', t)$. Posons pour tout $\epsilon > 0$

$$E_n(\epsilon) := \bigcup_{\|\psi\|_{\mathcal{C}^2(X)}\leq 1} \left\{ x' \in X',\ \left|\big\langle d_n^{-1}(F_n^*(\delta_{x'}) - F_n^*({\omega'}^{k'})), \psi\big\rangle\right| \geq \epsilon \right\}.$$

Le lemme 4.2(d) entraîne que

$$\sigma'(E_n(\epsilon)) \leq \Delta(\epsilon\delta_n^{-1}d_n - 3\mathrm{R}_1^*).$$

L'hypothèse entraîne que $\lim \delta_n^{-1} d_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\geq 1} \Delta(\epsilon\delta_n^{-1} d_n - 3\mathrm{R}_1^*)$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \sigma'(E_n(\epsilon))$ converge pour tout $\epsilon > 0$. Le théorème en découle.

□

Corollaire 4.9 *Soit σ' une mesure de probabilité (c, α)-modérée sur X' avec $c > 0$ et $\alpha > 0$. Supposons que $\sum_{n\geq 1} \exp(-\delta_n^{-1} d_n t)$ converge pour tout $t > 0$ (par exemple si $\delta_n d_n^{-1} = \mathrm{o}(1/\log n)$). Alors pour σ'-presque tout $x' \in X'$, la suite $\langle d_n^{-1}((F_n)^*(\delta_{x'}) - (F_n)^*(\omega'^{k'})), \psi\rangle$ tend vers 0 uniformément sur les ensembles bornés, en norme $\mathcal{C}^2$, de (l, l)-formes test ψ sur X.*

Démonstration. Soit $r := r(X', \omega')$. La mesure σ' étant (c, α)-modérée, la proposition 2.5 entraîne que

$$\Delta(t\delta_n^{-1} d_n) \leq c \exp(-\alpha r^{-1} t\delta_n^{-1} d_n).$$

Par conséquent, la série $\sum \Delta(t\delta_n^{-1} d_n)$ converge pour tout $t > 0$. On peut appliquer le théorème 4.8.

□

Soit $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_y)_{y\in Y}$ une famille méromorphe adaptée de sous-ensembles analytiques de dimension m d'une variété projective X' associée à une transformation méromorphe $G : X' \longrightarrow Y$. Supposons que $l + m < k$ et que pour tout n, $\mathcal{H}$ soit F_n-régulière. Pour $y \in Y$ générique, d'après le lemme 2.8, les courants $[\lambda_{k'-m}(F_n)]^{-1}(F_n)^*[\mathcal{H}_y]$ sont bien définis et de masse bornée indépendemment de n. On a le corollaire suivant.

Corollaire 4.10 *Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} \lambda_{k'-m-1}(F_n)[\lambda_{k'-m}(F_n)]^{-1}$ converge et que $\mathcal{H}$ soit F_n-régulière pour tout $n \geq 1$. Supposons aussi que X' est une variété projective. Alors la suite de courants*

$$\frac{1}{\lambda_{k'-m}(F_n)}\Big((F_n)^*[\mathcal{H}_y] - (F_n)^*[\mathcal{H}_{y'}]\Big)$$

tend faiblement vers 0 pour y et y' hors d'un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de Y.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.6 et la proposition 3.1 pour les transformations méromorphes $G \circ F_n$ (*voir* aussi remarques 4.7).

□

Remarque 4.11 Lorsque X, X' sont des espaces projectifs, $\mathcal{H}$ la famille des sous-espaces projectifs de X et F_n des applications rationnelles de X dans X', des versions du corollaire 4.10 sont prouvées par Russakovkii-Sodin [22] et Russakovskii-Shiffman [23].

5 Mesures d'équilibre de correspondances

Dans ce paragraphe, on suppose que les variétés X_n sont de même dimension k. Nous étudions l'itération aléatoire d'une suite de correspondances $f_n : X_{n-1} \longrightarrow X_n$. Notons d_n le degré topologique de f_n, pour $n \geq 1$. Posons $\mathrm{R}_n^* := \mathrm{R}_2^*(X_n, \omega_n, 2)$, $\mathrm{A}_n := \mathrm{A}(f_n)$ et δ_n le degré intermédiaire d'ordre $k-1$ de $f_n \circ \cdots \circ f_1$ (*voir* définitions aux paragraphes 2.1 et 3.5). Soient h_n des fonctions positives dans $\mathrm{L}^2(X_n)$ telles que $\int_{X_n} h_n \omega_n^k = 1$. Posons $\nu_n := h_n \omega_n^k$ et $\mu_n := d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} (f_n \circ \cdots \circ f_1)^*(\nu_n)$. Les mesures de probabilité ν_n étant absolument continues par rapport aux mesures de Lebesgue, les mesures de probabilité μ_n le sont aussi. On a le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Supposons que $\delta_n \mathrm{R}_n^* \|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} = \mathrm{o}(d_1 \ldots d_n)$ et que la série $\sum_{n \geq 2} d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} \delta_{n-1} \mathrm{A}_n$ converge. Alors la suite de mesures μ_n tend faiblement vers une mesure de probabilité PLB μ sur X_0. De plus, la mesure μ est indépendante de la suite (h_n).*

Remarques 5.2 Si les $(X_n, \omega_n, f_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à une famille compacte lisse (par exemple une famille finie), les constantes R_n^* et A_n sont uniformément bornées en n (*voir* remarque 2.3). Dans ce cas, il suffit de supposer que $\delta_n \|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X)} = \mathrm{o}(d_1 \ldots d_n)$ et que la série $\sum d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} \delta_{n-1}$ converge. Si les f_n sont des applications rationnelles dominantes de degré algébrique s_n de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$, on peut majorer δ_n par $(s_1 \ldots s_n)^{k-1}$.

Le théorème 5.1 est aussi valable pour les transformations méromorphes $f_n : X_{n-1} \longrightarrow X_n$ de codimension 0 (dans ce cas, on ne suppose pas que les X_n ont la même dimension).

Démonstration. Soit φ une fonction q.p.s.h. sur X_0, $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_0$. Il nous suffit de montrer que la suite $\langle \mu_n, \varphi \rangle$ converge vers une constante c_φ indépendante de (h_n) (on posera alors $\langle \mu, \varphi \rangle := c_\varphi$ pour φ continue).

Posons $F_n := f_n \circ \cdots \circ f_1$, $T_0^- := \omega_0$ et $T_0^+ := \mathrm{dd^c}\varphi + \omega_0$. Le courant T_0^+ est positif fermé et cohomologue à ω_0. On définit par récurrence les nombres b_n et les fonctions φ_n. Posons

$$b_0 := \int_{X_0} \varphi \omega_0^k \quad \text{et} \quad \varphi_0 := \varphi - b_0.$$

D'après les propositions 2.6 et 2.7, on peut poser, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n := \int_{X_n} (f_n)_*(\varphi_{n-1}) \omega_n^k \quad \text{et} \quad \varphi_n := (f_n)_*(\varphi_{n-1}) - b_n.$$

On a

$$\mathrm{dd^c}\varphi_n = T_n^+ - T_n^- \quad \text{avec} \quad T_n^\pm = (F_n)_*(T_0^\pm).$$

De plus

$$\mathrm{cl}(T_n^\pm) = \mathrm{cl}((F_n)_*(\omega_0)) \quad \text{et} \quad \int_{X_n} \varphi_n \omega_n^k = 0.$$

On en déduit que $\|T_n^\pm\| = \|(F_n)_*(\omega_0)\| = \delta_n$.

D'après la proposition 2.2, il existe des fonctions q.p.s.h. $\varphi_n^\pm$ vérifiant $\int_{X_n} \varphi_n^\pm \omega_n^k = 0$ et

$$\mathrm{dd^c}\varphi_n^+ - T_n^+ = \mathrm{dd^c}\varphi_n^- - T_n^- \geq -r(X_n, \omega_n)\delta_n\omega_n.$$

Par définition de A_n et R_n^*, on a

$$\left| \int_{X_n} (F_n)_*(\varphi_{n-1}^\pm)\omega_n^k \right| \leq \delta_{n-1}\mathrm{A}_n \qquad \text{et} \qquad \|\varphi_n^\pm\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \leq \delta_n \mathrm{R}_n^* \quad (5.1)$$

On en déduit que $b_n \leq 2\delta_{n-1}\mathrm{A}_n$. L'hypothèse du théorème implique que la série $\sum d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} b_n$ converge. Notons c_φ la somme de cette série.

Dans la suite, on intégre seulement sur un ouvert de volume total car les mesures sont absolument continues par rapport aux mesures de Lebesgue. On a

$$\begin{aligned}
\langle \mu_n, \varphi \rangle &= \langle d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} f_1^* \ldots f_n^*(\nu_n), b_0 + \varphi_0 \rangle \\
&= b_0 + \langle d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} f_2^* \ldots f_n^*(\nu_n), (f_1)_*(\varphi_0) \rangle \\
&= b_0 + \langle d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} f_2^* \ldots f_n^*(\nu_n), b_1 + \varphi_1 \rangle \\
&= b_0 + d_1^{-1} b_1 + \langle d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} f_2^* \ldots f_n^*(\nu_n), \varphi_1 \rangle.
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient

$$\langle \mu_n, \varphi \rangle = b_0 + d_1^{-1} b_1 + \cdots + d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} b_n + d_1^{-1} \ldots d_n^{-1} \langle \nu_n, \varphi_n \rangle. \quad (5.2)$$

Vérifions que $\langle \mu_n, \varphi \rangle$ tend vers c_φ. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et les relations (5.1) impliquent que

$$\begin{aligned}
|\langle \nu_n, \varphi_n \rangle| &= |\langle h_n \omega_n^k, \varphi_n \rangle| \leq \|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \|\varphi_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \\
&\leq \|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} (\|\varphi_n^+\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} + \|\varphi_n^+\|_{\mathrm{L}^2(X_n)}) \\
&\leq 2\|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X_n)} \delta_n \mathrm{R}_n^*.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, la dernière expression est d'ordre $\mathrm{o}(d_1 \ldots d_n)$. Donc $\lim \langle \mu_n, \varphi \rangle = c_\varphi$.

Définissons la mesure μ par

$$\langle \mu, \varphi \rangle := c_\varphi \quad \text{pour } \varphi \text{ lisse.}$$

On a montré que μ_n tend faiblement vers μ.

Si φ est une fonction q.p.s.h. quelconque, par semi-continuité supérieure, on a

$$\langle \mu, \varphi \rangle \geq \limsup \langle \mu_n, \varphi \rangle = c_\varphi.$$

Puisque φ est bornée supérieurement, elle est μ-intégrable. Donc μ est PLB. $\square$

Nous allons préciser notre résultat pour l'itération d'une correspondance f de degré topologique d_t de X dans elle-même. D'après la proposition A.1, les mesures PLB sur X ne chargent pas les sous-ensembles analytiques. On peut donc définir l'image de ces mesures par f^*. On a le corollaire suivant.

Corollaire 5.3 *Soit f une correspondance méromorphe de degré topologique d_t sur une variété kählérienne compacte (X, ω). Supposons que le degré dynamique d'ordre $k-1$ de f vérifie $d_{k-1} < d_t$. Soient h_n des fonctions positives vérifiant $\int_X h_n \omega^k = 1$ et $\|h_n\|_{\mathrm{L}^2(X)}^{1/n} = \mathrm{o}(d_{k-1}^{-1} d_t)$. Alors la suite de mesures $\mu_n := d_t^{-n} (f^n)^* (h_n \omega^k)$ converge vers une mesure PLB μ indépendante de (h_n). De plus, μ vérifie la relation d'invariance $f^*(\mu) = d_t \mu$ et on a $\langle \mu_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle$ pour toute fonction q.p.s.h. φ sur X.*

Démonstration. La convergence de (μ_n) se déduit du théorème 5.1. Soit Ω une forme volume lisse telle que $\int_X \Omega = 1$. Soit φ une fonction lisse, on a

$$\begin{aligned} \langle f^*(\mu), \varphi \rangle &= \langle \mu, f_*(\varphi) \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle d_t^{-n} \Omega, (f^{n+1})_*(\varphi) \rangle \\ &= d_t \langle d_t^{-n-1} \Omega, (f^{n+1})_*(\varphi) \rangle = d_t \langle \mu, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

D'où la relation d'invariance.

Soit φ une fonction q.p.s.h. sur X avec $\mathrm{dd^c} \varphi \geq -\omega$. Montrons que $\langle \mu, \varphi \rangle = c_\varphi$. Utilisons les notations du théorème 5.1. Puisque μ est f^*-invariante, on montre comme pour la relation (5.2) que

$$\langle \mu, \varphi \rangle = b_0 + d_t^{-1} b_1 + \cdots + d_t^{-n} b_n + d_t^{-n} \langle \mu, \varphi_n^+ - \varphi_n^- \rangle. \tag{5.3}$$

D'autre part, puisque $\int \varphi_n^{\pm}\omega^k = 0$, d'après la relation (2.6), on a

$$|\langle \mu, \varphi_n^{\pm}\rangle| \leq \lambda_{k-1}(f^n)\mathrm{R}_3(X, \omega, \mu)$$

où $\lambda_{k-1}(f^n)$ est le degré intermédiaire d'ordre $k-1$ de f^n. On en déduit que le membre à droite de (5.3) tend vers c_φ. D'où $\langle \mu, \varphi\rangle = c_\varphi$.

□

Remarques 5.4 Soit f comme au corollaire 5.3. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que la suite des mesures $\mu_n^x := d_t^{-n}(f^n)^*(\delta_x)$ ne converge pas vers *la mesure d'équilibre* μ de f. On montre comme dans [7] (*voir* aussi [3, 8]) que $\mathcal{E}$ est une union finie ou dénombrable d'ensembles analytiques et que les points périodiques répulsifs de f sont denses dans le support de μ. Si le nombre de points périodiques répulsifs est d'ordre $d_t^n + \mathrm{o}(d_t^n)$ alors ils sont équidistribués sur le support de μ. Les arguments utilisés dans [8] permettent de traiter le cas des variétés kählériennes non projectives.

Remarques 5.5 Soit f une application méromorphe dominante de degré topologique d_t de X dans X telle que son degré dynamique d'ordre $k-1$ vérifie $d_{k-1} < d_t$. Lorsque X est projective, Vincent Guedj [14] a récemment construit pour f la mesure d'équilibre μ. Il a montré que μ est PLB et mélangeante. Dans [9], nous avons montré que cette mesure est d'entropie maximale $\log d_t$. V. Guedj utilise une méthode de théorie du potentiel pour construire μ. Notre construction ci-dessus, par dualité, donne dans ce cas deux informations supplémentaires. D'une part, la suite de mesures $d_t^{-n}(f^n)^*(h_n\omega^k)$ converge vers μ uniformément en (h_n); on a aussi la convergence pour toute fonction test q.p.s.h. D'autre part, on obtient une estimation de la vitesse de mélange.

Théorème 5.6 *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension k. Soit f une application méromorphe dominante de degré topologique d_t de X dans elle-même. Supposons que son degré dynamique d'ordre $k-1$ vérifie $d_{k-1} < d_t$. Alors la mesure d'équilibre μ de f est mélangeante avec une vitesse de mélange d'ordre $d_t^{-n}(d_{k-1}+\epsilon)^n$ pour tout $\epsilon > 0$. Plus précisément, si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et ψ est une fonction bornée, posons*

$$I_n(\varphi, \psi) := \int_X \varphi(\psi \circ f^n)\mathrm{d}\mu - \left(\int_X \varphi \mathrm{d}\mu\right)\left(\int_X \psi \mathrm{d}\mu\right).$$

Il existe $c > 0$ indépendante de φ et de ψ telle que

$$|I_n(\varphi, \psi)| \leq c d_t^{-n}(d_{k-1}+\epsilon)^n \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2}\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)}.$$

Démonstration. Puisque φ s'écrit comme différence de deux fonctions q.p.s.h., on peut supposer que φ est q.p.s.h. avec $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$. Du fait que $I_n(\varphi, \psi) = -I_n(\varphi, -\psi)$, il suffit de majorer $I_n(\varphi, \psi)$. Comme $I_n(\varphi, \psi + A) = I_n(\varphi, \psi)$ pour toute constante A, on peut supposer que ψ est positive. On peut également supposer que $\|\psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mu)} = 1$. Posons $c_\varphi := \langle \mu, \varphi \rangle$. Comme μ est invariante, on a

$$I_n(\varphi, \psi) = \int_X \Big(d_t^{-n}(f^n)_*(\varphi) - c_\varphi \Big) \psi \mathrm{d}\mu \leq \|d_t^{-n}(f^n)_*(\varphi) - c_\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)}.$$

On reprend les calculs déjà faits au théorème 5.1. On a

$$d_t^{-n}(f^n)_*(\varphi) - c_\varphi = d_t^{-n}\varphi_n^+ - d_t^{-n}\varphi_n^- - \sum_{i \geq n+1} d_t^{-i} b_i.$$

Comme au théorème 5.1, on a

$$|b_i| \leq c_1(d_{k-1} + \epsilon)^{i-1} \quad \text{et} \quad \|\varphi_n^\pm\|_{\mathrm{L}^2(X)} \leq c_1(d_{k-1} + \epsilon)^n$$

pour une constante $c_1 > 0$. La mesure μ étant PLB, d'après la proposition 2.4, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\|\varphi_n^\pm\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leq c_2 \|\varphi_n^\pm\|_{\mathrm{L}^2(X)}$. On en déduit que $\|d_t^{-n}(f^n)_*(\varphi) - c_\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leq c(d_{k-1} + \epsilon)^n d_t^{-n}$ pour une constante $c > 0$. Ceci termine la preuve du théorème.

□

Remarque 5.7 Si f est une correspondance, la mesure μ n'est pas f_* invariante en général. On a cependant montré dans ce cas que

$$\|d_t^{-n}(f^n)_*\varphi - c_\varphi\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \leq c d_t^{-n}(d_{k-1} + \epsilon)^n \|\varphi\|_{\mathcal{C}^2}.$$

Exemple 5.8 Nous avons montré dans [9] qu'étant donné une correspondance f d'une variété projective X, la suite $[\lambda_l(f^n)]^{1/n}$ converge vers sa borne inférieure $d_l(f) = \inf_n [\lambda_l(f^n)]^{1/n}$. Il en résulte que pour vérifier l'hypothèse du corollaire 5.6, il suffit de montrer que $\lambda_{k-1}(f) < d_t(f)$. On peut donc exhiber pour toute variété projective X des correspondances vérifiant cette dernière inégalité. Soient h et g deux projections holomorphes surjectives de X sur $\mathbb{P}^k$. Soit u un endomorphisme holomorphe de degré élevé de $\mathbb{P}^k$. Posons $f := \overline{g} \circ u \circ h$ où $\overline{g}$ est l'adjoint de g. C'est une correspondance sur X. Le lemme 2.8 montre (*voir* aussi [9, remarques 8]) que

$$\lambda_{k-1}(f) \leq c\lambda_{k-1}(\overline{g})\lambda_{k-1}(u)\lambda_{k-1}(h)$$

pour une certaine constante $c > 0$. Si le degré de u est suffisamment élevé, on a $\lambda_{k-1}(f) < d_t(f)$. En effet, $d_t(f) = d_t(\overline{g})d_t(u)d_t(h)$ et $d_t(u) >> \lambda_{k-1}(u)$ si le degré de u est suffisamment élevé. On trouve dans [9] quelques exemples d'applications rationnelles vérifiant l'hypothèse du corollaire 5.3.

6 Distribution des intersections de variétés

Considérons des transformations méromorphes $F_{1,n} : X \longrightarrow X_1$ et $F_{2,n} : X \longrightarrow X_2$ de codimensions respectives l_1, l_2. On suppose que $l_1 + l_2 \geq k$ et que les produits de $F_{1,n}$ et $F_{2,n}$ sont bien définis (*voir* paragraphe 3.3). Posons $\Phi_n := F_{1,n} \bullet F_{2,n}$, $\delta_{i,n} := \lambda_{k_i-1}(F_{i,n})$ et $d_{i,n} := \lambda_{k_i}(F_{i,n})$. Rappelons que Φ_n est une transformation méromorphe de codimension $l_1 + l_2 - k$ de X dans $X_1 \times X_2$.

Théorème 6.1 *Supposons que la variété X soit projective et que les séries $\sum \delta_{i,n} d_{i,n}^{-1}$ soient convergentes pour $i = 1, 2$. Alors il existe un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de $X_1 \times X_2$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2) \setminus \mathcal{E}$, la suite de courants*

$$\frac{1}{d_{1,n} d_{2,n}} \Big(F_{1,n}^*(\delta_{x_1}) \wedge F_{2,n}^*(\delta_{x_2}) - F_{1,n}^*(\omega_1^{k_1}) \wedge F_{2,n}^*(\omega_2^{k_2}) \Big)$$

tend faiblement vers 0.

Démonstration. Soit δ_n le degré intermédiaire d'ordre $k_1 + k_2 - 1$ de Φ_n. D'après, la proposition 3.2, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\delta_n \leq c(\delta_{1,n} d_{2,n} + \delta_{2,n} d_{1,n}).$$

Le degré intermédiaire d'ordre $k_1 + k_2$ de Φ_n est égal à $d_{1,n} d_{2,n}$. Il suffit d'appliquer le théorème 4.6 pour Φ_n.

$\square$

Soit f une application biméromorphe de X dans X et soit f^{-1} son inverse. Soient $\mathcal{H}^+$, $\mathcal{H}^-$ deux familles méromorphes adaptées régulières de sous-ensembles analytiques de dimensions respectives $k - l^+$ et $k - l^-$ avec $l^+ + l^- \leq k$. Notons $P^\pm : X \longrightarrow Y^\pm$ les transformations méromorphes associées, $d_n^\pm$ les degrés dynamiques d'ordre $l^\pm$ de $f^{\pm n}$ et $\delta_n^\pm$ les degrés dynamiques d'ordre $l^\pm - 1$ de $f^{\pm n}$.

Corollaire 6.2 *Supposons que la variété X soit projective et que les séries $\sum \delta_n^\pm [d_n^\pm]^{-1}$ soient convergentes. Alors il existe un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de $Y^+ \times Y^-$ tel que pour (a_1, b_1) et (a_2, b_2) dans $(Y^+ \times Y^-) \setminus \mathcal{E}$, la suite de courants*

$$\frac{1}{d_n^+ d_n^-} \Big([f^{-n}(\mathcal{H}_{a_1}^+) \cap f^n(\mathcal{H}_{b_1}^-)] - [f^{-n}(\mathcal{H}_{a_2}^+) \cap f^n(\mathcal{H}_{b_2}^-)] \Big)$$

tend faiblement vers 0.

Démonstration. Posons $F_n^{\pm} := P^{\pm} \circ f^{\pm n}$. Ce sont des transformations méromorphes de codimension $k - l^{\pm}$ de X dans $Y^{\pm}$. Notons δ_n et d_n leurs degrés intermédiaire d'ordre $\dim Y^+ + \dim Y^- - 1$ et d'ordre $\dim Y^+ + \dim Y^-$. D'après les propositions 3.1 et 3.2, il existe $c > 0$ telle que

$$\delta_n \leq c(\delta_n^+ d_n^- + \delta_n^- d^+) \ \text{ et } \ d_n \leq c d_n^+ d_n^-.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 6.1 (*voir* aussi remarques 4.7).

□

Nous allons expliciter ce résultat dans le cadre des automorphismes réguliers de $\mathbb{C}^k$ introduits par le second auteur [26]. Soit f un automorphisme polynomial de $\mathbb{C}^k$. On note aussi f son prolongement en application birationnelle de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$. Notons I^+ (resp. I^-) l'ensemble d'indétermination de f (resp. de f^{-1}). Ce sont des sous-ensembles analytiques de l'hyperplan à l'infini. L'automorphisme f est dit *régulier* si $I^+ \cap I^- = \emptyset$ (en dimension 2, les automorphismes réguliers sont ceux du type Hénon). On a alors $\dim I^+ + \dim I^- = k - 2$. Posons $s := \dim I^+ + 1$. Notons d_+ et d_- les degrés algébriques de f et f^{-1}. Ces degrés sont liés par la relation $(d_+)^s = (d_-)^{k-s}$.

On peut construire deux courants T^+, T^- positifs fermés de bidegré $(1,1)$ de masse 1 de $\mathbb{P}^k$, à potentiel continu dans $\mathbb{C}^k$ et tels que $f^*(T^+) = d_+ T^+$, $f_*(T_-) = d_- T^-$. Pour $0 \leq l \leq s$ et $0 \leq l' \leq k - s$, le courant $T_{l,l'} := (T^+)^l \wedge (T^-)^{l'}$ est bien défini. Quand $l = s$, $l' = k - s$, on obtient une mesure de probabilité invariante à support compact dans $\mathbb{C}^k$. On a également le théorème de convergence suivant:

$$\lim_{n,m\to\infty} (d_+)^{-nl}(d_-)^{-ml'}(f^n)^*(\omega_{\mathrm{FS}}^l) \wedge (f^m)_*(\omega_{\mathrm{FS}}^{l'}) \quad = \quad T_{l,l'}. \qquad (6.1)$$

Notons G_l et $\mathrm{G}_{l'}$ les grassmanniennes qui paramètrent les sous-espaces projectifs de dimension $k - l$ et $k - l'$ de $\mathbb{P}^k$. Notons $\mathbb{P}_x^{k-l}$ et $\mathbb{P}_{x'}^{k-l'}$ les sous-espaces projectifs associés aux points $x \in \mathrm{G}_l$ et $x' \in \mathrm{G}_{l'}$. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 6.3 *Soit f un automorphisme régulier de $\mathbb{C}^k$ comme ci-dessus. Il existe un sous-ensemble pluripolaire $\mathcal{E}$ de $\mathrm{G}_l \times \mathrm{G}_{l'}$ tel que pour tout $(x, x') \in (\mathrm{G}_l \times \mathrm{G}_{l'}) \setminus \mathcal{E}$ la suite de courants*

$$(d_+)^{-nl}(d_-)^{-ml'}[f^{-n}(\mathbb{P}_x^{k-l}) \cap f^m(\mathbb{P}_{x'}^{k-l'})]$$

tend faiblement vers le courant invariant $T_{l,l'}$ quand n et m tendent vers l'infini.

Démonstration. Avec les notations du corollaire 6.2, on a $d_n^+ = d_+^{ln}$, $\delta_n^+ = d_+^{(l-1)n}$ et des relations semblables pour les inverses. Il suffit d'appliquer le corollaire 6.2 après avoir intégré par rapport aux variables a_2, b_2. On utilise ensuite la relation (6.1).

□

Remarque 6.4 On peut obtenir des résultats analogues pour les familles de sous-ensembles analytiques de degré quelconque ou pour des applications rationnelles ou birationnelles f d'une variété projective X dans elle-même.

7 Zéros des sections de fibrés en droites

Soit X une variété projective de dimension k et soit L un fibré en droites ample sur X. On munit L d'une métrique hermitienne h. Pour toute section holomorphe locale e_L de L, on définit la norme de e_L en chaque point par $\|e_L\|_h := h(e_L, e_L)^{1/2}$. Soit

$$c_1(h) := -\mathrm{dd^c} \log \|e_L\|_h$$

la forme de courbure de (L, h). Elle représente dans la cohomologie de Rham la classe de Chern $c_1(L) \in \mathcal{H}^2(X, \mathbb{Z})$ de L. Puisque L est ample, on peut choisir h de sorte que $c_1(h)$ soit une $(1,1)$-forme strictement positive. La variété X est donc munie de la forme de Kähler $\omega := c_1(h)$ et $\int_X \omega^k = c_1(L)^k \in \mathbb{Z}^+$.

Le fibré L^n est également muni d'une métrique hermitienne h_n, induite par la métrique h sur L. Plus précisément, h_n est définie localement par $\|s^n\|_{h_n} = \|s\|_h^n$. L'espace $\mathrm{H}^0(X, L^n)$ des sections holomorphes de L^n est muni du produit hermitien naturel

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \frac{1}{c_1(L)^k} \int_X h_n(s_1, s_2)\omega^k \qquad (s_1, s_2 \in \mathrm{H}^0(M, L^n)).$$

Notons ω_{FS} la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$.

Le lecteur trouvera les autres notations dans l'exemple 3.6(c). La dimension k_n de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ est donnée par le polynôme de Hilbert dont le terme dominant est égal à $c_1(L)^k n^k/k!$ [17, p.386]. Rappelons que pour n assez grand, Φ_n est le plongement de Kodaira de X dans $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)^*$, $\Psi_{l,n}$ la transformation méromorphe naturelle de $\mathbb{P}\mathrm{H}(X, L^n)^*$ dans la grassmannienne $\mathrm{G}_{l,n}^X$ des sous-espaces de dimension l de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$, $\overline{\Pi}_{l,n}$ est la transformation méromorphe naturelle de $\mathrm{G}_{l,n}^X$ dans $\mathbb{P}_{l,n}^X := \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n) \times \cdots \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ (l fois) et $F_{l,n} = \overline{\Pi}_{l,n} \circ \Psi_{l,n} \circ \Phi_n$.

Lemme 7.1 *Soient $\delta_{l,n}$ et $d_{l,n}$ les degrés intermédiaires d'ordre $lk_n - 1$ et d'ordre lk_n de $F_{l,n}$. On a $d_{l,n} = n^l c_1(L)^k$ et $\delta_{l,n} = \mathrm{O}(n^{l-1})$.*

Démonstration. L'invariance des métriques par l'action du groupe unitaire implique que

$$\Psi^*_{l,n}\overline{\Pi}^*_{l,n}(\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n}) = \alpha_{l,n}\omega_{\mathrm{FS}}^l \quad \text{et} \quad \Psi^*_{l,n}\overline{\Pi}^*_{l,n}(\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n-1}) = \beta_{l,n}\omega_{\mathrm{FS}}^{l-1} \tag{7.1}$$

où ω_{MP} est la forme kählérienne naturelle associée à $\mathbb{P}^X_{l,n}$ (*voir* appendice A.3) et $\alpha_{l,n}$, $\beta_{l,n}$ sont des constantes positives. On calcule ces constantes cohomologiquement.

Pour calculer $\alpha_{l,n}$, on remplace $\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n}$ dans (7.1) par une masse de Dirac $\delta_{\mathbf{s}}$. Son image $\Psi^*_{l,n}\overline{\Pi}^*_{l,n}(\delta_{\mathbf{s}})$ sera le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de codimension l de $\mathbb{P}\mathrm{H}(X, L^n)^*$ qui est cohomologue à ω_{FS}^l. Ceci implique que $\alpha_{l,n} = 1$.

Soit T le courant d'intégration sur une droite $\mathcal{D} \times \{s_2\} \times \cdots \times \{s_l\}$ de $\mathbb{P}^X_{l,n}$. Il est de masse $c_{k_n,l}$ (*voir* (A.3) pour la définition de $c_{k_n,l}$). Son image $\Psi^*_{l,n}\overline{\Pi}^*_{l,n}(T)$ est le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de codimension $l-1$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}(X, L^n)^*$. La masse de ce dernier courant est égale à 1. On en déduit que $\beta_{l,n} = c_{k_n,l}^{-1}$. En particulier, il est majoré par une constante qui ne dépend que de l (*voir* (A.3)).

Puisque la classe de $\Phi_n^*(\omega_{\mathrm{FS}})$ est égale à $nc_1(L)$, on a

$$d_{l,n} = \int_X \Phi_n^*\Psi_n^*\overline{\Pi}^*_{l,n}(\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n}) \wedge \omega^{k-l} = \int_X \Phi_n^*(\omega_{\mathrm{FS}}^l) \wedge \omega^{k-l} = n^l c_1(L)^k$$

et

$$\begin{aligned} \delta_{l,n} &= \int_X \Phi_n^*\Psi_n^*\overline{\Pi}^*_{l,n}(\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n-1}) \wedge \omega^{k-l+1} = \int_X \beta_{l,n}\Phi_n^*(\omega_{\mathrm{FS}}^{l-1}) \wedge \omega^{k-l+1} \\ &= \beta_{l,n} n^{l-1} c_1(L)^k. \end{aligned}$$

□

On voit que la série $\sum \delta_{l,n} d_{l,n}^{-1}$ ne converge pas. C'est donc le théorème 4.1(2) que nous appliquerons.

Le théorème suivant, dû à Zelditch [31], est une amélioration d'un théorème de Tian [29], il donne la convergence en moyenne des courants $n^{-l}[\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}]$ avec $\mathbf{s}_n \in \mathbb{P}^X_{l,n}$.

Théorème 7.2 **[31]** *Pour tout $r \geq 0$, on a*

$$\|n^{-l}\Phi_n^*(\omega_{\mathrm{FS}}^l) - \omega^l\|_{\mathcal{C}^r} = \mathrm{O}(n^{-1}).$$

Soient σ_n des mesures de probabilité PLB sur $\mathbb{P}_{l,n}^X$. Posons $\mathrm{R}_{1,n} := \mathrm{R}_1(\mathbb{P}_{l,n}^X, \omega_{\mathrm{MP}}, \sigma_n)$, $\mathrm{R}_{3,n} := \mathrm{R}_3(\mathbb{P}_{l,n}^X, \omega_{\mathrm{MP}}, \sigma_n)$ et $\Delta_n(t) := \Delta(\mathbb{P}_{l,n}^X, \omega_{\mathrm{MP}}, \sigma_n, t)$. On munit $\mathbb{P}_l^X := \prod_{n\geq 1} \mathbb{P}_{l,n}^X$ de la mesure σ, produit des σ_n. Faisons des hypothèses sur les mesures σ_n.

Théorème 7.3 *Supposons que la série $\sum_{n\geq 1} \Delta_n(nt)$ converge pour tout $t > 0$. Supposons aussi que $\mathrm{R}_{1,n} = \mathrm{o}(n)$ et $\mathrm{R}_{3,n} = \mathrm{o}(n)$. Alors pour σ-presque tout $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_n) \in \mathbb{P}_l^X$, la suite de courants $n^{-l}[\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}]$ tend faiblement vers ω^l.*

Démonstration. Les relations (7.1) et le théorème 7.2 entraînent que la suite des formes $n^{-l}F_{l,n}^*(\omega_{\mathrm{MP}}^{lk_n})$ tend vers ω^l dans $\mathcal{C}^r$ pour tout $r \geq 0$. D'après la proposition 4.3, la suite de courants $n^{-l}F_{l,n}^*(\sigma_n)$ tend faiblement vers ω^l car $n^{-l}\delta_{l,n}\mathrm{R}_{3,n}$ tend vers 0 par hypothèse. D'après le théorème 4.1(2), pour σ-presque tout $\mathbf{s} \in \mathbb{P}_l^X$, la suite de courants $n^{-l}([\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}] - F_{l,n}^*(\sigma_n))$ tend faiblement vers 0.

□

Remarque 7.4 Si au théorème 7.3, on suppose que $\mathrm{R}_{3,n} = \mathrm{O}(\log n)$ alors il existe des constantes $c > 0$, $\alpha > 0$ et $m \geq 0$ telles que pour tout $\epsilon > 0$

$$\sigma_n\big(\mathbf{s} \in \mathbb{P}_l^X,\ |\langle n^{-l}[\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}] - \omega^l, \psi\rangle| \geq \epsilon\big) \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^2} n^{mk} \exp(-\alpha\epsilon n).$$

Cette estimation résulte de l'inégalité (4.5), du théorème 7.2 et de la proposition 4.2(c).

Posons $\mathrm{G}_l^X := \prod_{n\geq 1} \mathrm{G}_{l,n}^X$. Soit $\Omega_{l,n}$ la mesure de probabilité invariante sur $\mathrm{G}_{l,n}^X$. Notons Ω_l la mesure de probabilité sur G_l^X, produit des $\Omega_{l,n}$. Fixons des sous-espaces réels $\mathbb{R}\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(X, L^n)$ invariants par l'action du groupe orthogonal associé. Soit $\mathbb{R}\mathrm{G}_{l,n}^X$ la sous-grassmannienne totalement réelle de $\mathrm{G}_{l,n}^X$ correspondante. Soit $m_{l,n}$ la mesure invariante de masse 1 sur $\mathbb{R}\mathrm{G}_{l,n}^X$. Notons m_l le produit des $m_{l,n}$ qui est une mesure de probabilité sur G_l.

Corollaire 7.5 *Soient $\mu_{l,n} := \Omega_{l,n}$ ou $m_{l,n}$ et $\mu_l := \Omega_l$ ou m_l. Alors pour μ_l-presque tout $\check{\mathbf{s}} = (\check{\mathbf{s}}_n) \in \mathrm{G}_l$, la suite de courants $n^{-l}[\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}_n}]$ tend faiblement vers ω^l. De plus, on a*

$$\mu_{l,n}\big(\check{\mathbf{s}} \in \mathrm{G}_l^X,\ |\langle n^{-l}[\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}_n}] - \omega^l, \psi\rangle| \geq \epsilon\big) \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^2} n^{mk} \exp(-\alpha\epsilon n)$$

où $m \geq 0$, $\alpha > 0$ et $c > 0$ sont des constantes indépendantes de ϵ.

Démonstration. Notons $\mathbb{RP}_{l,n}^X := \mathbb{RPH}^0(X, L^n) \times \cdots \times \mathbb{RPH}^0(X, L^n)$ (l fois). Notons $\widetilde{\Omega}_{l,n}$ (resp. $\widetilde{m}_{l,n}$) la mesure de probabilité invariante naturelle sur $\mathbb{P}_{k,l}^X$ (resp. sur $\mathbb{RP}_{l,n}^X$) (*voir* appendice pour les détails) et $\widetilde{\Omega}_l$ (resp. $\widetilde{m}_l$) la mesure de probabilité sur $\mathbb{P}_l^X$, produit des $\widetilde{\Omega}_{l,n}$ (resp. des $\widetilde{m}_{l,n}$). L'invariance des mesures considérées implique que $\overline{\Pi}_{l,n}^*(\widetilde{\Omega}_{l,n}) = \Omega_{l,n}$ et $\overline{\Pi}_{l,n}^*(\widetilde{m}_{l,n}) = m_{l,n}$.

Soient $\widetilde{\mu}_{l,n} = \widetilde{\Omega}_{l,n}$ ou $\widetilde{m}_{l,n}$ et $\widetilde{\mu}_l = \widetilde{\Omega}_l$ ou $\widetilde{m}_l$. Il suffit de montrer que pour $\widetilde{\mu}$-presque tout $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots) \in \mathbb{P}_l^X$ on a $n^{-l}[\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}] \to \omega^l$ et

$$\widetilde{\mu}_{l,n}\big(\mathbf{s} \in \mathbb{P}_l^X,\ |\langle n^{-l}[\mathbf{Z}_{\mathbf{s}_n}] - \omega^l, \psi\rangle| \geq \epsilon\big) \leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^2} n^{mk} \exp(-\alpha\epsilon n).$$

Cela résulte du théorème 7.3 et la remarque 7.4. Les estimations sur $\mathrm{R}_{1,n}$, $\mathrm{R}_{3,n}$ et Δ_n sont fournies par la proposition A.11. La dimension de $\mathbb{P}_{l,n}^X$ est de l'ordre n^k.

□

Remarques 7.6 Soit (c_n) une suite de nombre réels positifs vérifiant $c_n = \mathrm{o}(n/\log n)$. On peut montrer que $c_n(n^{-l}[\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}] - \omega^l)$ tend vers 0 pour μ_l-presque tout $\check{\mathbf{s}}$ (*voir* aussi remarques 4.7). Ceci montre que $n^{-l}[\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}}] - \omega^l$ tend vers 0 à vitesse $\simeq \log n/n$. Obsevons que la multiplication par c_n revient à diviser ϵ par c_n.

Dans le cas où $l = 1$, Shiffman et Zelditch [25] ont démontré le résultat de convergence $n^{-1}[\mathbf{Z}_{s_n}] \to \omega$ pour Ω_1-presque toute suite $s = (s_n)$, $s_n \in \mathbb{PH}^0(X, L^n)$. Il ont prouvé une vitesse de convergence majorée par $1/\sqrt{n}$.

Corollaire 7.7 *Soit U un ouvert de X dont le bord ∂U est de mesure nulle. Alors pour Ω_l-presque tout (resp. m_l-presque tout) $\check{\mathbf{s}} = (\check{\mathbf{s}}_n) \in \mathrm{G}_l^X$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-l}\mathrm{vol}_{2k-2l}(\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}_n} \cap U) = \frac{k!}{(k-l)!}\mathrm{vol}_{2k}(U).$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque 7.8 Soit (c_n) une suite de nombre réels positifs vérifiant $c_n = \mathrm{o}(n/\log n)$. On peut montrer (*voir* remarques 7.6 et 4.7) que

$$\lim_{n\to\infty} c_n\Big[n^{-l}\mathrm{vol}_{2k-2l}(\mathbf{Z}_{\check{\mathbf{s}}_n} \cap U) - \frac{k!}{(k-l)!}\mathrm{vol}_{2k}(U)\Big] = 0.$$

A Appendice: estimations des constantes

A.1. *Ensembles pluripolaires, capacités, mesures modérées.*

Un sous-ensemble E de X est *pluripolaire* si $E \subset (\varphi = -\infty)$ où φ est une fonction q.p.s.h. On peut supposer $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$. Observons qu'une réunion dénombrable d'ensembles pluripolaires est pluripolaire. On dit que E est *localement pluripolaire* si pour tout $a \in X$ il existe un voisinage U de a tel que $E \cap U$ soit pluripolaire dans U. Nous renvoyons à Demailly [6] pour les propriétés des fonctions q.p.s.h.

Josefson [13] a montré qu'un sous-ensemble localement pluripolaire dans $\mathbb{C}^k$ est pluripolaire. Alexander a étendu ce résultat à $\mathbb{P}^k$ [1]. Il en résulte que pour toute variété projective X de dimension k, un ensemble E localement pluripolaire l'est globalement: il suffit d'utiliser une application holomorphe surjective $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^k$. Si φ est associée à $\pi(E)$, $\pi^*\varphi$ est associée à E. Il serait utile de montrer ce résultat pour toute variété complexe compacte. On utilise à plusieurs reprises le résultat suivant.

Proposition A.1 *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension k. Tout sous-ensemble analytique propre $Y \subset X$ est pluripolaire.*

Démonstration. On peut supposer que Y est irréductible. Si Y est une hypersurface de X, il existe une fonction q.p.s.h. φ telle que $\mathrm{dd^c}\varphi = [Y] - \alpha$ où α est une $(1, 1)$-forme lisse cohomologue à $[Y]$. Il est clair que $Y = (\varphi = -\infty)$. La fonction φ est lisse sur $X \setminus Y$.

Si $\dim Y < k - 1$, on construit une variété lisse $\widehat{X}$ par des éclatements successifs le long Y et le long des singularités de Y. Notons π la projection de $\widehat{X}$ sur X. L'ensemble $\pi^{-1}(Y)$ est alors une hypersurface de $\widehat{X}$. D'après Blanchard [2] $\widehat{X}$ est kählérienne.

Soit ψ une fonction q.p.s.h. sur $\widehat{X}$, lisse sur $\widehat{X} \setminus \pi^{-1}(Y)$ telle que $\pi^{-1}(Y) = (\psi = -\infty)$. Puisque $\mathrm{dd^c}\psi$ s'écrit comme différence de deux courants positifs fermés, lisses sur $\widehat{X} \setminus \pi^{-1}(Y)$, on a $\pi_*\psi = u_1 - u_2$ dans $\mathrm{L}^1(X)$ avec u_i q.p.s.h. lisses sur $X \setminus Y$. On en déduit que $u_1 - u_2 = \pi_*(\psi)$ sur $X \setminus Y$. Puisque $\pi_*\psi(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers Y, on a $Y \subset (u_1 = -\infty)$ car u_2 est bornée supérieurement.

$\square$

Bien que ce ne soit pas indispensable, introduisons une capacité dont les ensembles de capacité nulle sont les ensembles pluripolaires. Cela a été fait par Alexander pour $\mathbb{P}^k$. Notons $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^k$ la projection canonique. Soient $\mathcal{S}^{2k+1}$ la sphère unité de $\mathbb{C}^{k+1}$ et σ_{2k+1} la mesure de probabilité invariante sur $\mathcal{S}^{2k+1}$. Alexander a posé pour un compact K de $\mathbb{P}^k$:

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}'(K) \quad := \quad \inf_f \Big\{ & \sup_{\pi^{-1}(K)\cap\mathcal{S}^{2k+1}} |f|^{1/n},\ f \text{ polynôme homogène de degré } n \\ & \text{de } \mathbb{C}^{k+1},\ \int_{\mathcal{S}^{2k+1}} \big(\log|f|^{1/n} - \log|z_1|\big)\mathrm{d}\sigma_{2k+1} = 0\Big\} \quad \text{(A.2)}\end{aligned}$$

Etant donné un compact K dans une variété kählérienne compacte (X,ω) nous définissons *la capacité de* K par

$$\mathrm{cap}(K) := \inf_\varphi \left\{ \exp\Big(\sup_K \varphi\Big),\ \varphi \text{ q.p.s.h., } \mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega, \max_X \varphi = 0 \right\}.$$

Dans $\mathbb{P}^k$ toute fonction q.p.s.h. φ, vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$, est limite de fonctions sur $\mathbb{P}^k$ de la forme $\log|f|^{1/n} - \log\|z\|$ où f est homogène de degré n. En utilisant la proposition A.5 ci-dessous on peut montrer que

$$\mathrm{cap}'(K) \leq \mathrm{cap}(K) \leq \sqrt{k\mathrm{e}}\ \mathrm{cap}'(K).$$

Dans la suite nous utilisons plutôt la capacité cap qui a un sens pour toute variété kählérienne compacte. Elle peut être définie pour toute variété complexe compacte hermitienne, en remplaçant ω par une forme hermitienne positive. Avec notre normalisation, on a toujours $\mathrm{cap}(X) = 1$.

Proposition A.2 *On a* $\mathrm{cap}(K) = 0$ *si et seulement si* K *est pluripolaire.*

Démonstration. Il est clair que si K est pluripolaire on a $\mathrm{cap}(K) = 0$. Si $\mathrm{cap}(K) = 0$, il existe φ_n q.p.s.h., $\mathrm{dd^c}\varphi_n \geq -\omega$, $\max_K \varphi_n \leq -n^3$, $\max_X \varphi_n = 0$. D'après la proposition 2.1, la série $\sum n^{-2}\varphi_n$ converge ponctuellement vers une fonction φ q.p.s.h. On a $K \subset (\varphi = -\infty)$.

□

Proposition A.3 *Soit* (X,ω) *une variété kählérienne compacte de dimension* k. *Soit* σ *la mesure associée à la forme volume* ω^k. *Alors, il existe des constantes* $c > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que la mesure* σ *soit* (c,α)*-modérée. Plus précisément,* $\int_X \exp(-\alpha\varphi)\omega^k \leq c$ *pour toute fonction* φ *q.p.s.h. vérifiant* $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$ *et* $\max_X \varphi = 0$. *En particulier, on a* $\Delta(X,\omega,\sigma,t) \leq c\exp(-\alpha r^{-1}t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *où* $r := r(X,\omega)$.

Démonstration. Notons $\mathrm{B}(a,r)$ (resp. B_r) la boule de $\mathbb{C}^k$ de rayon r centrée en a (resp. centrée en 0). Posons $\omega_0 := \mathrm{dd^c}\|z\|^2$ la forme euclidienne sur $\mathbb{C}^k$ et $\sigma_0 := \omega_0^k$. Soit $\Psi_n : \mathrm{B}_4 \longrightarrow X$ une famille finie d'applications holomorphes injectives telles que les ouverts $\Psi_n(\mathrm{B}_1)$ recouvrent X. Soit $A_1 > 0$, une constante, telle que pour tout n, $\Psi_n^*(\omega) \leq A_1\omega_0$ et $\Psi_n^*(\sigma) \leq A_1\sigma_0$ sur B_3.

Pour φ comme dans la proposition, posons $\varphi_n := \varphi \circ \Psi_n$. Il suffit de montrer que $\int_{\mathrm{B}_1} \exp(-\alpha'\varphi_n)\omega_0^k \leq c'$ pour $c' > 0$, $\alpha' > 0$ indépendants de φ. D'après la proposition 2.1, il existe une constante $A_2 > 0$ indépendante de φ telle que $\int |\varphi| d\sigma \leq A_2$. On en déduit que $\sigma(\varphi < -M) \leq A_2 M^{-1}$ pour tout $M > 0$. Fixons un $M > 0$ assez grand tel que $A_2 M^{-1} < \sigma(\Psi_n(\mathrm{B}_1))$ pour tout n. La dernière relation implique que $(\varphi < -M)$ ne peut contenir $\Psi_n(\mathrm{B}_1)$. On peut donc choisir un point $a_n \in \mathrm{B}_1$ tel que $\varphi_n(a_n) = \varphi(\Phi_n(a_n)) \geq -M$.

Posons $\psi_n := \varphi_n + A_1(\|z\|^2 - 16)$. C'est une fonction p.s.h. dans B_3 vérifiant $\psi_n \leq \varphi_n$. Montrons que $\int_{\mathrm{B}(a_n,2)} \exp(-\alpha'\psi_n)\omega_0^k \leq c'$ avec $c' > 0$ et $\alpha' > 0$ indépendants de φ. On a $dd^c\psi_n \geq 0$, $\psi_n(a_n) \geq -M - 16A_1$ et $\psi_n \leq A_2$ sur $\mathrm{B}(a_n, 2) \subset \mathrm{B}_4$. Il suffit d'appliquer un théorème de Hörmander [16, p.97] qui affirme que $\int_{\mathrm{B}_1} \exp(-\phi)\omega_0^k \leq c'$ pour toute fonction p.s.h. ϕ sur B_2 avec $\phi(0) = 0$ et $\phi \leq 1$. On peut prendre donc $\alpha' = (A_2 + 16A_1 + M)^{-1}$. □

Remarque A.4 Les estimations peuvent être raffinées en utilisant les résultats de Skoda [28].

A.2. *Estimation des constantes pour $\mathbb{P}^k$.*

Notons $\mathcal{S}^k$ (resp. $\mathcal{S}^{2k+1}$) la sphère unité de $\mathbb{R}^{k+1}$ (resp. de $\mathbb{C}^{k+1}$) et σ_k (resp. σ_{2k+1}) la mesure invariante de masse 1 sur $\mathcal{S}^k$ (resp. $\mathcal{S}^{2k+1}$). Soit $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^k$ la projection canonique. Notons $z = (z_0, \ldots, z_k)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^{k+1}$. On dira qu'une fonction Φ sur $\mathbb{C}^{k+1}$ est log-*homogène* si on a $\Phi(\lambda z) = \log|\lambda| + \Phi(z)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. La fonction $\log\|z\|$ étant p.s.h. log-homogène, il existe une $(1,1)$-forme positive fermée ω_{FS} sur $\mathbb{P}^k$ telle que $\pi^*(\omega_{\mathrm{FS}}) = dd^c \log\|z\|$. C'est *la forme de Fubini-Study*, elle est invariante par le groupe unitaire.

Notons Ω_{FS} la mesure sur $\mathbb{P}^k$ associée à la forme volume ω_{FS}^k. C'est *la mesure invariante de masse* 1 sur $\mathbb{P}^k$. Soit φ une fonction q.p.s.h. sur $\mathbb{P}^k$ vérifiant $dd^c\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$. Posons $\Phi := \varphi \circ \pi + \log\|z\|$ et $\Phi(0) := -\infty$. C'est une fonction p.s.h. log-homogène sur $\mathbb{C}^{k+1}$ vérifiant $\max_{\mathcal{S}^{2k+1}} \Phi = \max_{\mathbb{P}^k} \varphi$ et $\int_{\mathcal{S}^{2k+1}} \Phi d\sigma_{2k+1} = \int_{\mathbb{P}^k} \varphi\omega_{\mathrm{FS}}^k$.

Notons $\mathbb{RP}^k$ l'image de $\mathbb{R}^{k+1}$ par π. C'est un sous-espace projectif réel de dimension k de $\mathbb{P}^k$. Posons $m_{\mathrm{FS}} := \pi_*(\sigma_k)$ où σ_k est la mesure de probabilité sur $\mathcal{S}^k$ invariante par le groupe orthogonal. On a aussi $\max_{\mathcal{S}^k}\Phi = \max_{\mathbb{RP}^k}\varphi$ et $\int_{\mathcal{S}^k}\Phi d\sigma_k = \int \varphi dm_{\rm FS}$.

Proposition A.5 *On a*

$$\mathrm{R}_1^*(\mathbb{P}^k,\omega_{\rm FS}) \leq \frac{1}{2}(1+\log k) \quad \textit{et} \quad \mathrm{R}_2^*(\mathbb{P}^k,\omega_{\rm FS},1) \leq 1+\log k.$$

Démonstration. Rappelons que $r(\mathbb{P}^k,\omega_{\rm FS}) = 1$. Soit φ une fonction q.p.s.h. vérifiant $dd^c\varphi \geq -\omega_{\rm FS}$. La fonction $\Phi := \varphi\circ\pi + \log\|z\|$ est p.s.h., log-homogène. Elle vérifie $\int \Phi d\sigma_{2k+1} = \int \varphi\omega_{\rm FS}^k$ et $\max_{\mathcal{S}^{2k+1}}\Phi = \max_{\mathbb{P}^k}\varphi$. Soit $m := \max_{\mathbb{P}^k}\varphi$. D'après Alexander [1, Theorem 2.2], on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}^{2k+1}}\Phi d\sigma_{2k+1} &\geq m + \int_{\mathcal{S}^{2k+1}}\log|z_1| d\sigma_{2k+1}\\ &= m - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \geq m - \frac{1}{2}(1+\log k).\end{aligned}$$

On en déduit que $m \leq \frac{1}{2}(1+\log k)$ si $\int_{\mathbb{P}^k}\varphi\omega_{\rm FS}^k = 0$. Par définition (2.2), on a $\mathrm{R}_1^*(\mathbb{P}^k,\omega_{\rm FS}) \leq \frac{1}{2}(1+\log k)$. D'après la proposition 2.5, on a $\mathrm{R}_2^*(\mathbb{P}^k,\omega_{\rm FS},1) \leq 1+\log k$.

□

La proposition suivante permet d'estimer les intégrales sur $\mathcal{S}^k$ et $\mathcal{S}^{2k+1}$ en fonction d'intégrales sur des sous-espaces linéaires.

Proposition A.6 *Soit h une fonction mesurable positive sur la sphère unité $\mathcal{S}^k$ de $\mathbb{R}^{k+1}$ (resp. $\mathcal{S}^{2k+1}$ de $\mathbb{C}^{k+1}$). Soit F un sous-espace réel (resp. complexe) de dimension m de $\mathbb{R}^{k+1}$ (resp. de $\mathbb{C}^{k+1}$), $1\leq m\leq k$. Supposons que pour tout sous-espace réel (resp. complexe) E de dimension $m+1$ contenant F on ait $\int_{\mathcal{S}^k\cap E} h d\sigma_m \leq A$ (resp. $\int_{\mathcal{S}^{2k+1}\cap E} h d\sigma_{2m+1} \leq A$) où $A>0$ est une constante. Alors il existe une constante $c>0$ indépendante de k, A et h telle que $\int_{\mathcal{S}^k} h d\sigma_k \leq cAk^{m/2}$ (resp. $\int_{\mathcal{S}^{2k+1}} h d\sigma_{2k+1} \leq cAk^m$).*

Démonstration. Considérons d'abord le cas réel. Soit $(x_1,\ldots,x_{k+1})$ le système de coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{k+1}$. Notons $\mathrm{O}x_i$ les axes de coordonnées et $\mathrm{O}x$ la demi-droite issue de 0 passant par x. On peut supposer que F est le sous-espaces engendré par les m derniers axes $\mathrm{O}x_{k-m+2}$, ..., $\mathrm{O}x_{k+1}$.

Utilisons les coordonnées polaires de $\mathcal{S}^k$. Soit θ_n l'angle entre $\mathrm{O}x_{n+1}$ et la demi-droite issue de 0 passant par le point $(x_1,\ldots,x_{n+1},0\ldots,0)$, $1\leq$

$n \leq k$. Les angles θ_n vérifient $0 \leq \theta_n < 2\pi$. Pour tout $x \in \mathcal{S}^k$, on a $x_n = \cos\theta_{n-1}\sin\theta_n \ldots \sin\theta_{k-1}$ où on a posé $\theta_0 := 0$. L'élément d'aire de $\mathcal{S}^k$ en métrique euclidienne est égal à

$$|(\sin\theta_2)(\sin\theta_3)^2 \ldots (\sin\theta_k)^{k-1}|\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_k.$$

Puisque $\sigma_k(\mathcal{S}^k) = 1$, l'élément d'aire de σ_k est égal à

$$c_k|(\sin\theta_2)(\sin\theta_3)^2 \ldots (\sin\theta_k)^{k-1}|\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_k$$

où c_k^{-1} est l'aire de $\mathcal{S}^k$ en métrique euclidienne. On a donc [10, 3.2.13]

$$c_k = 2^{-1}\pi^{-(k+1)/2}\Gamma((k+1)/2).$$

Evaluons l'intégrale de h

$$\int_{\mathcal{S}^k} h\mathrm{d}\sigma_k(K) = c_k \int h|(\sin\theta_2)(\sin\theta_3)^2 \ldots (\sin\theta_k)^{k-1}|\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_k.$$

Posons $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ et $\theta' := (\theta_1, \ldots, \theta_{k-m})$. Soit π la projection de $[0, 2\pi[^k$ dans $[0, 2\pi[^{k-m}$ avec $\pi(\theta) := \theta'$. Par hypothèse, on a

$$\int_{\mathcal{S}^k\cap\pi^{-1}(\theta')} h\mathrm{d}\sigma_m \leq A \quad \text{pour tout } \theta' \in [0, 2\pi[^{k-m}.$$

Or cette intégrale est égale à

$$c_m \int_{\mathcal{S}^k\cap\pi^{-1}(\theta')} h|(\sin\theta_{k-m+2}) \ldots (\sin\theta_k)^m|\mathrm{d}\theta_{k-m+1} \ldots \mathrm{d}\theta_k.$$

Utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}^k} h\mathrm{d}\sigma_k &\leq c_k c_m^{-1} A \int_{[0,2\pi[^{k-m}} |(\sin\theta_2) \ldots (\sin\theta_{k-m+1})^{k-m}|\mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{k-m} \\ &= A c_m^{-1} c_k c_{k-m}^{-1}.\end{aligned}$$

Il suffit d'observer que

$$c_m^{-1} c_k c_{k-m}^{-1} = 2\pi^{1/2}\Gamma((m+1)/2)^{-1}\Gamma((k+1)/2)\Gamma((k-m+1)/2)^{-1} \leq ck^{m/2}$$

où $c > 0$ est une constante.

La preuve du cas complexe est identique à celle du cas réel. Il suffit d'utiliser les coordonnées polaires suivantes pour $z = (z_1, \ldots, z_{k+1}) \in \mathcal{S}^{2k+1}$:

$$z_n = \cos\theta_{n-1}\sin\theta_n \ldots \sin\theta_{k-1}\exp(i\alpha_n)$$

avec $0 \leq \theta_n < 2\pi$ pour $1 \leq n \leq k$, $\theta_0 = 0$ et $0 \leq \alpha_n < 2\pi$ pour $1 \leq n \leq k+1$. $\square$

Proposition A.7 *Il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ indépendantes de k, telles que $\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-\alpha\varphi)\omega_{\mathrm{FS}}^k \leq ck$ pour toute fonction q.p.s.h. φ vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ et $\max_{\mathbb{P}^k} \varphi = 0$. En particulier, on a $\Delta(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, \Omega_{\mathrm{FS}}, t) \leq ck \exp(-\alpha t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit φ une fonction comme dans la proposition. Soit $a \in \mathbb{P}^k$ tel que $\varphi(a) = 0$. Posons $\Phi := \varphi \circ \pi$ et $\Phi(0) = -\infty$. Soit $\mathbb{P}^1_\xi$ une droite projective passant par a, $F := \pi^{-1}(a) \cup \{0\}$ et $E_\xi := \pi^{-1}(\mathbb{P}^1_\xi) \cup \{0\}$. Le plan complexe E_ξ contient la droite F. Soient c_1 et α les constantes vérifiant la proposition A.7 pour la droite projective $(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathrm{FS}})$ (*c.-à-d.* que pour $k = 1$).

On a pour tout $\mathbb{P}^1_\xi$

$$\int_{\mathcal{S}^{2k+1} \cap E_\xi} \exp(-\alpha\Phi) \mathrm{d}\sigma_3 \leq c_1.$$

D'après la proposition A.6, on a

$$\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-\alpha\varphi)\omega_{\mathrm{FS}}^k = \int_{\mathcal{S}^{2k+1}} \exp(-\alpha\Phi) \mathrm{d}\sigma_{2k+1} \leq ck$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de k.

On a montré que la mesure $\Omega_{\mathrm{FS}} = \omega_{\mathrm{FS}}^k$ est (ck, α)-modérée. Puisque $r(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}) = 1$, d'après la proposition 2.5, on a

$$\Delta(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, \Omega_{\mathrm{FS}}, t) \leq ck \exp(-\alpha t).$$

□

La proposition suivante explique pourquoi les estimations pour $\mathbb{RP}^k$ et $\mathbb{P}^k$ sont essentiellement les mêmes. Rappelons que dans $\mathbb{P}^k$ on a $\mathrm{cap}(\mathbb{P}^k) = 1$.

Proposition A.8 *Soit $\mathrm{cap}(\mathbb{RP}^k)$ la capacité de $\mathbb{RP}^k$ dans $\mathbb{P}^k$. Alors pour tout $k \geq 2$ et toute fonction φ q.p.s.h. sur $\mathbb{P}^k$ vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ et $\max_{\mathbb{P}^k} \varphi = 0$, on a $\max_{\mathbb{RP}^k} \varphi \geq \log \mathrm{cap}(\mathbb{RP}^2)$. En particulier, $\mathrm{cap}(\mathbb{RP}^k) = \mathrm{cap}(\mathbb{RP}^2)$ pour tout $k \geq 2$.*

Démonstration. Soit φ comme ci-dessus. Soient $a \in \mathbb{P}^k$ et $b \in \mathbb{RP}^k$ tels que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = \max_{\mathbb{RP}^k} \varphi$. Observons que $\mathbb{C}^k$ est réunion des sous-espaces complexes F de dimension 2 vérifiant $\dim_{\mathbb{R}}(F \cap \mathbb{R}^k) = 2$. De même $\mathbb{C}^{k+1}$ est réunion des sous-espaces complexes E de dimension 3 contenant une droite réelle fixe de $\mathbb{R}^{k+1}$ et vérifiant $\dim_{\mathbb{R}}(E \cap \mathbb{R}^{k+1}) = 3$. Donc $\mathbb{P}^k$ est réunion des plans projectifs P de $\mathbb{P}^k$ passant par b et vérifiant $\dim_{\mathbb{R}}(P \cap \mathbb{RP}^k) = 2$. Soit P un tel plan contenant a. Par définition de la capacité sur $P \simeq \mathbb{P}^2$ pour $P \cap \mathbb{RP}^k \simeq \mathbb{RP}^2$, on a $\varphi(b) \geq \log \operatorname{cap}(\mathbb{RP}^2)$. Donc $\operatorname{cap}(\mathbb{RP}^k) \geq \operatorname{cap}(\mathbb{RP}^2)$. On obtient l'autre inégalité en observant que toute fonction q.p.s.h. φ sur $\mathbb{P}^2$ avec $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ se prolonge en fonction q.p.s.h. $\widetilde{\varphi}$ sur $\mathbb{P}^k$ avec $\mathrm{dd^c}\widetilde{\varphi} \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ et $\max_{\mathbb{P}^k} \widetilde{\varphi} = \max_{\mathbb{P}^2} \varphi$ (ceci se voit aisément sur le relevé de $\widetilde{\varphi}$ à $\mathbb{C}^{k+1}$).

□

Proposition A.9 *Il existe des constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ indépendantes de k telles qu'on ait $\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-\alpha\varphi)\mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} \leq c\sqrt{k}$, $\mathrm{R}_i(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, m_{\mathrm{FS}}) \leq c(1+\log k)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\Delta(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, m_{\mathrm{FS}}, t) \leq c\sqrt{k}\exp(-\alpha t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On peut reprendre la démonstration de Hörmander [16, p.98] pour les fonctions ψ sous-harmoniques sur le disque unité de $\mathbb{C}$ qui vérifient $\psi(0) = 0$ et $\psi \leq 1$. On remplace la mesure de Lebesgue par la mesure m sur le cercle $|z| = 1/2$. On trouve $\int \exp(-\psi/2)\mathrm{d}m \leq c_1$ où $c_1 > 0$ est une constante indépendante de ψ. Un argument semblable à celui de la proposition A.3 permet de montrer qu'il existe $c' > 0$ et $\alpha > 0$ telle que dans $\mathbb{P}^1$ on a $\int \exp(-\alpha'\varphi)\mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} \leq c'$ pour toute fonction φ q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ et $\max_{\mathbb{P}^1} \varphi = 0$. Le passage à $\mathbb{P}^k$ avec l'estimation $\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-\alpha\varphi)\mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} \leq c\sqrt{k}$ est une simple application de la proposition A.6 comme dans la proposition A.7. On en déduit que $\Delta(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, m_{\mathrm{FS}}, t) \leq c\sqrt{k}\exp(-\alpha t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\mathrm{R}_1(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, m_k) \leq c(1+\log k)$. Soit φ une fonction q.p.s.h. vérifiant $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega_{\mathrm{FS}}$ et $\max_{\mathbb{P}^k} \varphi = 0$. D'après (2.4), il suffit de vérifier que $-\int \varphi \mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} \leq c(1 + \log k)$ pour un $c > 0$ indépendant de k et de φ. On peut supposer que $k \geq 2$.

D'après l'estimation $\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-\alpha\varphi)\mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} \leq c\sqrt{k}$ ci-dessus, on a pour tout $t_0 \geq 0$

$$\begin{aligned} -\int \varphi \mathrm{d}m_{\mathrm{FS}} &\leq t_0 + \int_{t_0}^{+\infty} m_{\mathrm{FS}}(\varphi < -t)\mathrm{d}t \leq t_0 + \int_{t_0}^{+\infty} c\sqrt{k}\exp(-\alpha t)\mathrm{d}t \\ &= t_0 + c\sqrt{k}\alpha^{-1}\exp(-\alpha t_0). \end{aligned}$$

Pour $t_0 = 2^{-1}\alpha^{-1}\log k$, on obtient l'inégalité voulue.

D'après la proposition 2.5 et la proposition A.5, on a $\mathrm{R}_i(\mathbb{P}^k, \omega_{\mathrm{FS}}, m_{\mathrm{FS}}) \leq c(1 + \log k)$ pour $i = 2, 3$ et pour une constante $c > 0$ indépendante de k.

□

A.3. *Espaces produits et espaces multiprojectifs.*

On associe à la variété $X := X_1 \times X_2$ la forme de Kähler

$$\omega := c_{12}(\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2)$$

où π_1, π_2 sont les projections canoniques de X sur X_1 et X_2 et où $c_{12} > 0$ est telle que $\int_X \omega^{k_1+k_2} = 1$. La constante c_{12} est calculée par la formule

$$c_{12}^{-k_1-k_2} = \binom{k_1+k_2}{k_1}.$$

Considérons deux mesures de probabilité μ_1 sur X_1 et μ_2 sur X_2. Notons μ le produit de μ_1 et μ_2. C'est une mesure de probabilité sur X. Posons $r := r(X, \omega)$.

Proposition A.10 *Soient X, ω, Ω, r et μ comme ci-dessus. Soit* R *une constante vérifiant* $\mathrm{R} \geq \mathrm{R}_1(X_i, \omega_i, \mu_i)$ *pour* $i = 1, 2$. *Supposons qu'il existe* $c > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que* $\Delta(X_i, \omega_i, \mu_i, t) \leq c\exp(-\alpha t)$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $i = 1, 2$. *Alors on a*

$$\mathrm{R}_1(X, \omega, \mu) \leq 2r\mathrm{R} + 2r\alpha^{-1}\log c + 4\alpha^{-1}r$$

et

$$\Delta(X, \omega, \mu, t) \leq 2c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Fixons une fonction ψ sur $X = X_1 \times X_2$ telle que $\max_X \psi = 0$ et $\mathrm{dd^c}\psi \geq -r\omega$. Soit $(a_1, a_2) \in X$ un point tel que $\psi(a_1, a_2) = 0$. On veut estimer la μ mesure de l'ensemble $E := (\psi < -t)$ pour $t \geq 0$. Posons

$$F := \{x_2 \in X_2,\ \psi(a_1, x_2) < -t/2\}$$

et

$$E_{x_2} := \{x_1 \in X_1,\ \psi(x_1, x_2) < -t\}.$$

Définissons

$$E' := \bigcup_{x_2 \in X_2 \setminus F} (E_{x_2} \times \{x_2\}).$$

On a $E \subset \pi_2^{-1}(F) \cup E'$.

Estimons la mesure de $\pi_2^{-1}(F)$. Si $\psi_1(x_2) := \psi(a_1, x_2)$, on a $\max_{X_2} \psi_1 = \psi_1(a_2) = 0$. Posons $\psi_2 := \psi_1 - \int \psi_1 \mathrm{d}\mu_2$. On a $\int \psi_2 \mathrm{d}\mu_2 = 0$, $\psi_2 \geq \psi_1$ et $\mathrm{dd^c}\psi_2 \geq -r\omega_2$. Par définition de $\mathrm{R}_1(X_2, \omega_2, \mu_2)$, puisque $r(X_2, \omega_2) \geq 1$, on a

$$-\int \psi_1 \mathrm{d}\mu_2 = \max_{X_2} \psi_2 \leq r\mathrm{R}_1(X_2, \omega_2, \mu_2) \leq r\mathrm{R}.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \mu_2(F) & \leq & \mu_2(\psi_2 \leq r\mathrm{R} - t/2) = \mu_2(r^{-1}\psi_2 \leq \mathrm{R} - r^{-1}t/2) \\ & \leq & \Delta(X_2, \omega_2, \mu_2, \mathrm{R} - r^{-1}t/2) \leq c\exp(\alpha\mathrm{R} - \alpha r^{-1}t/2) \\ & = & c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2). \end{array}$$

Donc $\mu(\pi_2^{-1}(F)) \leq c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2)$.

Estimons la mesure de E'. Pour $x_2 \in X_2 \setminus F$, posons $\psi_3(x_1) := \psi(x_1, x_2)$. On a $\psi_3 \leq 0$, $\max_{X_1} \psi_3 \geq \psi(a_1, x_2) \geq -t/2$ et $\mathrm{dd^c}\psi_3 \geq -r\omega_1$. Posons $\psi_4 := \psi_3 - \int_{X_1} \psi_3 \mathrm{d}\mu_1$. On a

$$-\int \psi_3 \mathrm{d}\mu_1 \leq \max_{X_2} \psi_4 + t/2 \leq r\mathrm{R}_1(X_2, \omega_2, \mu_2) + t/2 \leq r\mathrm{R} + t/2.$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mu_1(E_{x_2}) & \leq & \mu_1(\psi_4 \leq r\mathrm{R} - t/2) \leq c\exp(\alpha\mathrm{R} - \alpha r^{-1}t/2) \\ & = & c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2). \end{array}$$

D'après le théorème de Fubini, on a $\mu(E') \leq c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2)$.

On déduit des estimations précédentes que pour tout $t \geq 0$

$$\mu(\psi < -t) \leq 2c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2).$$

C'est aussi vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$ car $\psi \leq 0$. Si φ une fonction q.p.s.h. sur X telle que $\mathrm{dd^c}\varphi \geq -\omega$ et $\int \varphi \mathrm{d}\mu = 0$, on peut appliquer l'estimation précédente à la fonction $\psi := \varphi - \max_X \varphi$. Cette dernière fonction est plus petite que φ et elle vérifie $\max_X \psi = 0$. On en déduit que pour tout $t \geq 0$

$$\mu(\psi < -t) \leq 2c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2).$$

Donc $\Delta(X, \omega, t) \leq 2c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2)$.

Estimons $\mathrm{R}_1(X,\omega,\mu)$. Soit ψ comme ci-dessus, il faut montrer que

$$-\int \psi \mathrm{d}\mu \leq 2r\mathrm{R} + 2r\alpha^{-1}\log c + 4\alpha^{-1}r.$$

On a pour tout $t_0 \geq 0$

$$\begin{aligned}
-\int \psi \mathrm{d}\mu &= \int_0^{+\infty} \mu(\psi \leq -t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{t_0} \mu(\psi \leq -t)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} \mu(\psi \leq -t)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{t_0} \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} 2c\exp(\alpha\mathrm{R})\exp(-\alpha r^{-1}t/2)\mathrm{d}t \\
&= t_0 + 4c\exp(\alpha\mathrm{R})\alpha^{-1}r\exp(-\alpha r^{-1}t_0/2)
\end{aligned}$$

En prenant $t_0 = 2r\mathrm{R} + 2r\alpha^{-1}\log c$, on obtient

$$-\int \psi \mathrm{d}\mu \leq 2r\mathrm{R} + 2r\alpha^{-1}\log c + 4\alpha^{-1}r.$$

□

Considérons l'espace multi-projectif $\mathbb{P}^{k,l} := \mathbb{P}^k \times \cdots \times \mathbb{P}^k$ (l fois). Notons π_i la projection de $\mathbb{P}^{k,l}$ sur le i-ème facteur. Posons $\omega_{\mathrm{MP}} := c_{k,l}\sum \pi_i^*(\omega_{\mathrm{FS}})$ et soit Ω_{MP} la mesure associée à la forme volume $\omega_{\mathrm{MP}}^{kl}$. La constante $c_{k,l} > 0$ est choisie de sorte que Ω_{MP} soit une mesure de probabilité. On a

$$(c_{k,l})^{-kl} = \binom{kl}{k}\binom{kl-k}{k}\cdots\binom{2k}{k}. \tag{A.3}$$

Observons que $c_{k,l} \leq 1$ et que si l est fixé, $c_{k,l}$ est minorée par une constante positive indépendante de k. Pour cela, il suffit d'utiliser la formule d'équivalence de Stirling $n! \simeq \sqrt{2\pi n}n^n\exp(-n)$. Notons m_{MP} la mesure produit des m_{FS} sur $\mathbb{RP}^{k,l} := \mathbb{RP}^k \times \cdots \times \mathbb{RP}^k$ (l fois).

Proposition A.11 *Il existe des constantes $c > 0$, $\alpha > 0$ et $m > 0$, qui ne dépendent que de l, telles que pour tout $k \geq 1$ on ait $\mathrm{R}_i(\mathbb{P}^{k,l}, \omega_{\mathrm{MP}}, \mu) \leq c(1+\log k)$, $i = 1,2,3$, $\Delta(\mathbb{P}^{k,l}, \omega_{\mathrm{MP}}, \mu, t) \leq ck^m\exp(-\alpha t)$ pour tout $t > 0$ et pour $\mu = \Omega_{\mathrm{MP}}$ ou $\mu = m_{\mathrm{MP}}$.*

Démonstration. Observons que la constante $r(\mathbb{P}^{k,l}, \omega_{\mathrm{MP}})$ est majorée par $l/c_{k,l}$. Il suffit d'appliquer les propositions A.5, A.7, A.9 et A.10.

□

References

[1] *H. Alexander*, Projective capacity, *Ann. Math. Studies*, **100** (1981), 3-27.

[2] *A. Blanchard*, Sur les variétés analytiques complexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **73** (1956), 157–202.

[3] *J.Y. Briend et J. Duval*, Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, *IHES Publ. Math.*, **93** (2001), 145-159.

[4] *L. Clozel et E. Ullmo*, Correspondances modulaires et mesures invariantes, *prépublication*, (2002).

[5] *J.P. Demailly*, Monge-Ampère Operators, Lelong numbers and Intersection theory in Complex Analysis and Geometry, *Plemum Press* (1993), 115-193, *(V. Ancona and A. Silva editors).*

[6] *J.P. Demailly*, Regularization of closed positive currents and intersection theory, *J. Algebraic Geometry*, **1** (1992), 361-409.

[7] *T.C. Dinh*, Distribution des préimages et des points périodiques d'une correspondance polynomiale, *prépublication* (2003).

[8] *T.C. Dinh et N. Sibony*, Dynamique des applications d'allure polynomiale, à paraître dans *J.M.P.A.*

[9] *T.C. Dinh et N. Sibony*, Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle, *prépublication* (2003).

[10] *H. Federer*, Geometric Measure Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[11] *J.E. Fornæss, N. Sibony*, Complex dynamics in higher dimension, *in Complex potential theory*, (Montréal, PQ, 1993), Nato ASI series Math. and Phys. Sci., vol. **C439**, Kluwer (1994), 131-186.

[12] *H. Hironaka*, Desingularization of complex analytic varieties, *Act. Congr. Inter. Math. Nice*, 1972, Gauthier-Villars, vol. 2, 627-632.

[13] *B. Josefson*, On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on $\mathbb{C}^n$, *Arkiv for Math.*, **16** (1978), 109-115.

[14] *V. Guedj*, Ergodic properties of rational mappings with large topological degree, *prépublication* (2003).

[15] *L. Hörmander*, The analysis of Linear partial differential operators I, Springer-Verlag, 1983.

[16] *L. Hörmander*, An introduction to complex Analysis in Several Variables, Third Edition, North-Holland, 1990.

[17] *S. Kobayashi*, Hyperbolic spaces, Springer Verlag, 1998.

[18] *K. Kodaira and D.C. Spencer*, On deformation of complex analytic structures III, *Ann. Math. (2)*, **71** (1960), 43-76.

[19] *P. Lelong*, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Dunod Paris, 1968.

[20] *M. Ju. Lyubich*, Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere, *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, **3** (1983), 351-385.

[21] *M. Méo*, Image inverse d'un courant positif fermé par une application surjective, *C.R.A.S.*, **322** (1996), 1141-1144.

[22] *A. Russakovskii and M. Sodin*, Equidistribution for sequences of polynomial mappings, *Indiana Univ. math. J.*, **44** (1995), 851-882.

[23] *A. Russakovskii and B. Shiffman*, Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.*, **46** (1997).

[24] *I.R. Shafarevich*, Basic algebraic geometry 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[25] *B. Shiffman and S. Zelditch*, Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles, *Commun. Math. Phys.*, **200** (1999), 661-683.

[26] *N. Sibony*, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, *Panoramas et Synthèses*, (1999), 97-185.

[27] *H. Skoda*, Prolongement des courants positifs, fermés de masse finie, *Invent. Math.*, **66** (1982), 361-376.

[28] *H. Skoda*, Sous-ensemble analytique d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, *Bull. Soc. math. France*, **100** (1972), 353-408.

[29] *G. Tian*, On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds, *J. Diff. Geometry*, **32** (1990), 93-130.

[30] *C. Voisin*, Intrinsic pseudovolume forms and K-correspondences, *preprint*.

[31] *S. Zelditch*, Szegö kernels and a theorem of Tian, *Int. Math. Res. Notices*, **6** (1998), 317-331.

Tien-Cuong Dinh et Nessim Sibony,
Mathématique - Bât. 425, UMR 8628, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
E-mails: Tiencuong.Dinh@math.u-psud.fr et Nessim.Sibony@math.u-psud.fr.