Cours de Topologie et Calcul Différentiel 2

Table des matières

Première partie
Exercices de révision

I.1 Énoncés des exercices

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f ne s'annule jamais ;
4. f est croissante ;
5. f est strictement décroissante ;
6. f n'est pas la fonction nulle ;
7. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
8. f est inférieure à g ;

Correction →

Exercice 2. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Pour toute partie $A \subset X$, rappeler la définition de l'image de A par f, notée $f(A)$.
2. Pour toute partie $B \subset Y$, rappeler la définition de l'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$.
3. Pour $A \subset X$, comparer les ensembles A et $f^{-1}(f(A))$.
4. Pour $B \subset Y$, comparer les ensembles B et $f(f^{-1}(B))$.

Correction →

Exercice 3. 1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de $\sup A$.

2. Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$.
   Vrai ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$.

Correction →

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Écrire la définition de :

1. "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente".
2. "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$".
3. "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$".
4. "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente".

Correction →

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soient x_0 et l deux nombres réels. Écrire la définition de

1. “f tend vers l en x_0”.
2. “f tend vers $+\infty$ en x_0”.
3. “f tend vers l en $-\infty$”.
4. “f tend vers $-\infty$ en $+\infty$”.
5. Écrire en termes mathématiques la propriété “f ne tend pas vers l en x_0”.
6. Écrire en termes mathématiques la propriété “f ne tend pas vers $+\infty$ en x_0”.

Correction $\rightarrow$

Exercice 6. En revenant à la définition, démontrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto 3x + 2 \in \mathbb{R}$ est continue.

Correction $\rightarrow$

Exercice 7. On considère la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$ trouver η tel que $\forall x \in [0; +\infty[, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon)$,

1. pour $x_0 = 1$
2. pour $x_0 = 0$
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Correction $\rightarrow$

Exercice 8. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0.

Correction $\rightarrow$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k > 0$ telle que pour $x, y \in \mathbb{R}$, f vérifie $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction $\rightarrow$

I.2 Correction des exercices

. Exercice 1

1. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
2. $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
7. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = n$.
8. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 2

1) $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A, f(x) = y\}$, ou bien de façon équivalente : $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$,

2) $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

3) Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. En appliquant la définition de $f^{-1}(B)$ à $B = f(A)$, on obtient $x \in f^{-1}(f(A))$. Ceci démontre l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Considérons l'application constante nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et posons $A = \{0\}$.
Alors $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$. Donc l'inclusion réciproque est fausse en générale. (En fait, on peut démontrer que l'égalité est vraie si et seulement si f est injective.)

4) Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Mais $x \in f^{-1}(B)$ signifie $f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$. Ceci démontre l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Considérons à nouveau l'application constante nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et posons $B = \mathbb{R}$. Alors $f(f^{-1}(B)) = \{0\}$. Donc l'inclusion réciproque est fausse en générale. (En fait, on peut démontrer que l'égalité est vraie si et seulement si f est surjective.)

Retour texte → $\square$

. Exercice 3

1) Par définition, $\sup A$ est l'unique réel vérifiant les deux conditions suivantes :

— Pour tout $a \in A, a \leq \sup A$ (i.e., $\sup A$ est un majorant de A) ;

— pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \epsilon < a$ (i.e., $\sup A$ le plus petit majorant de A).

(Écrivez vous-même la définition de $\inf A$ (le plus petit des minorants de A).

2)

1. Vrai car si $A \subset B$, alors tout majorant de B est un majorant de A.
2. Faux. $A = [1, 2]$ et $B = [0, 2]$ est un contre-exemple.
   (En revanche, $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$ est vraie car si $A \subset B$, alors tout minorant de B est un minorant de A.)
3. Vrai. En effet, puisque $A \subset A \cup B$ alors d'après la question (1), $\sup A \leq \sup(A \cup B)$. De même, $\sup B \leq \sup(A \cup B)$, donc $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$.
   Par symétrie des rôles, on peut supposer par exemple $\sup A \leq \sup B$, c'est-à-dire $\max(\sup A, \sup B) = \sup B$. Alors puisque $\sup A$ est un majorant de A, $\sup B$ est aussi un majorant de A. Donc $\sup B$ est un majorant de $A \cup B$, ce qui montre $\sup(A \cup B) \leq \sup B = \max(\sup A, \sup B)$.
   Finalement, on obtient bien $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
4. Faux. Rappelons que $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Prenons $A = B = \{0\}$. Alors $\sup A = \sup B = \sup(A + B) = 0$. (En revanche, l'inégalité large est vraie).
5. Vrai, car si M est un majorant de $-A = \{-x : x \in A\}$, alors $-M$ est un minorant de A.

Retour texte → $\square$

. Exercice 4

1) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - a| < \epsilon$.

2) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > M$.

3) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < M$.

4) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - a| \geq \epsilon$.

Retour texte → $\square$

. Exercice 5

1) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$.

2) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > M)$.

3) $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, (x < M \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$.

4) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A > 0, (x > A \Rightarrow f(x) < M)$.

5) $\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x) - l| \geq \epsilon)$.

6) $\exists M > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, f(x) \leq M)$.

Retour texte → □

. Exercice 6

Rappelons que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x_0)| = |3x + 2 - 3x_0 - 2| = 3|x - x_0|$. Donc pour $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{3}$ pour obtenir la continuité en x_0. Donc f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$, i.e., f est continue sur $\mathbb{R}$.

Retour texte → □

. Exercice 7

1) $|f(x) - f(1)| = |\sqrt{x} - 1| = |\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}| \leq |x - 1|$. Donc il suffit de prendre $\eta = \epsilon = 10^{-2}$.

2) $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}|$. Donc il suffit de prendre $\eta = \epsilon^2 = 10^{-4}$.

3) Nous avons déjà montré la continuité en 0. Pour montrer la continuité en $x_0 \neq 0$, on procède comme en 1) :

$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\frac{x - x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0|$. Donc il suffit de prendre $\eta = \sqrt{x_0}\epsilon$.

Retour texte → □

. Exercice 8

Pour montrer que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ qui tend vers 0 et telle que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{R}}$ ne tende pas vers $f(0) = 0$. Il suffit de prendre $x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$.

Retour texte → □

. Exercice 9

Rappelons que f est dite uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

Ici, nous avons $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Donc il suffit de prendre $\eta = \epsilon/k$.

Retour texte → □

Deuxième partie

Espaces métriques - espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre nous introduisons les notions de bases de topologie des espaces métriques, avec comme exemple phare les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés où le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la dernière section de ce chapitre, on introduit, à titre culturel, la notion d'espace topologique, qui n'est pas au programme, et qui généralise celle d'espace métrique. Dans les chapitres ultérieurs, tous les espaces considérés seront des espaces métriques, ou lorsque ce sera précisé, des espaces vectoriels normés. Nous verrons qu'il existe des différences profondes suivant que l'espace vectoriel considéré est de dimension finie ou non. Les exemples d'espaces de dimension infinie que nous étudierons sont pour la plupart parmi les espaces de fonctions.

II.1 Espaces métriques

Définition II.1.1. *Soit X un ensemble. Une **distance** sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant*

(d1) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(d est **symétrique**)*

(d2) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$

(d3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(**inégalité triangulaire**)*

*On dit alors que (X, d) est un **espace métrique**.*

Exercice 10. Les expressions suivantes définissent-elles des distances ?

1. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ sur $\mathbb{R}$.
2. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ sur $\mathbb{R}$.
3. $d(x,y) = |e^x - e^y|$ sur $\mathbb{R}$.
4. $d(x,y) = |x^{-1} - y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$.

Correction →

Définition II.1.2. *Deux distances d et d' sur un ensemble X sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x, y \in X,\ \alpha\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta\, d(x,y).$$

Exercice 11. Les distances $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ et $d'(x,y) = |e^x - e^y|$ sur $\mathbb{R}$ sont-elles équivalentes ?

Correction →

II.2 Espaces vectoriels normés

Une famille très importante d'espaces métriques est constituée des espaces vectoriels normés :

Définition II.2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* ***norme*** *sur E une application $N\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:*

(N1) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité) ;*

(N2) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ *;*

(N3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire) ;*

Un ***espace vectoriel normé*** *est un couple (E, N) où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N une norme sur E.*

La notation habituelle pour une norme est $\|.\|$, c'est-à-dire que l'on écrit $\|x\|$ pour la norme $N(x)$ de x.

Les deux définitions précédentes donnent immédiatement la proposition suivante :

Proposition II.2.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $d\colon E\times E \to \mathbb{R}$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.*

Donc un espace vectoriel normé (E, N) est en particulier un espace métrique lorsqu'on le munit de la distance sous-jacente $d(x, y) = N(x - y)$. On dit que la distance d ***dérive*** *de la norme $\|.\|$ ou est la distance* ***sous-jacente*** *à la norme $\|.\|$.*

Par exemple, la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ sur $\mathbb{R}$ dérive de la norme $\|x\| = |x|$ de la valeur absolue. En revanche, aucune des distances des questions 2), 3) et 4) de l'exercice 10 ne dérive d'une norme car l'homogénéité n'est pas réalisée.

Exemple II.2.3. *Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$, les fonctions suivantes définissent des normes. On note $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Pour tout $p \geq 1$ entier,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|\colon i = 1, \dots, n\}.$$

Exemple II.2.4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On note $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Rappelons que la somme $f + g$ de deux fonctions f et g de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est définie par :*

$$\forall x \in [a, b], (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la multiplication scalaire λf est définie par :

$$\forall x \in [a, b], (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Pour tout entier $p \geq 1$, la quantité suivante définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \; dx \right)^{1/p}.$$

La quantité suivante définit une norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ appelée ***norme de la convergence uniforme*** *:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Exercice 12. Démontrer que les fonctions $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ de l'exemple précédent sont bien des normes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Correction →

Exemple II.2.5. *On note $l^\infty(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites de $\mathbb{K}$ bornées. Rappelons que la somme de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

et la multiplication scalaire par $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On définit une norme sur $l^\infty(\mathbb{K})$ en posant :

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Pour tout entier $p \geq 1$, on note $l^p(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites (x_n) de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$. On définit une norme sur $l^p(\mathbb{K})$ en posant :

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Définition II.2.6. *Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites **équivalentes** si les distances sou-jacentes sont équivalentes (Définition II.1.2), ce qui équivaut à dire qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|.$$

Définition II.2.7. *Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont dites **équivalentes** s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|.$$

Exemple II.2.8. *Les normes $\|.\|_p, p \geq 1$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas deux à deux équivalentes (cf Exercice 12).*

Proposition II.2.9. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

La démonstration de cette proposition sera donnée dans le chapitre sur la compacité.

II.3 Boules, sphères, parties bornées

Définition II.3.1. *Soit (X,d) un espace métrique. Soit $x \in X$ et soit $r \geq 0$ un réel. L'ensemble $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ s'appelle la **boule ouverte** de centre x et de rayon r (si $r = 0$, $B(x,r) = \emptyset$). L'ensemble $B_f(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ s'appelle la **boule fermée** de centre x et de rayon r. L'ensemble $S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$ s'appelle la **sphère** de centre x et de rayon r.*

*Un sous-ensemble A d'un espace métrique est dit **borné** s'il est contenu dans une boule.*

Exemple II.3.2. *Dans* $(\mathbb{R}, |.|)$*,* $B(x, r)$ *est l'intervalle ouvert* $]x-r, x+r[$ *et* $B_f(x, r)$ *est l'intervalle fermé* $[x-r, x+r]$.

Exercice 13.

1. Décrire la boule de centre 0 et de rayon 1 pour la distance $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ sur $\mathbb{R}$.
2. Décrire la boule de centre 0 et de rayon 1 pour la distance $d(x, y) = |e^x - e^y|$ sur $\mathbb{R}$.
3. Décrire la boule de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$ pour la distance $d(x, y) = |x^{-1} - y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$.

Correction →

Exercice 14. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les trois normes usuelles

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et } \|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

1. Montrer que ces trois fonctions sont bien des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner pour chacune d'entre elles la boule unité.
3. Décrire pour chacune d'entre elles la boule de centre 0 et de rayon r.
4. Montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Correction →

Exercice 15. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel non trivial d'un espace vectoriel normé n'est jamais borné.

Correction →

Exercice 16. *(Diamètre d'un sous-ensemble)*
Soit (X, d) un espace métrique. Si A est une partie non vide de X, on définit son **diamètre**, noté diam(A), par :

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y),\ (x, y) \in A \times A\}.$$

1. Dans cette question, $X = (\mathbb{R}, |.|)$ où $|.|$ désigne la valeur absolue. Calculer le diamètre de A dans les cas suivants : $A = [a, b]$, $A = [a, b[$ et $A = [a, +\infty[$.
2. Dans cette question, $X = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$. Calculer le diamètre du disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$.
3. Démontrer que A est bornée si et seulement si diam(A) $< +\infty$.

Correction →

II.4 Suites dans un espace métrique

Rappelons qu'une **suite** $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un ensemble X est une application $x\colon \mathbb{N} \to X$ ou plus généralement $x\colon \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0\} \to X$ où $n_0 \in \mathbb{N}$. On note usuellement x_n pour l'image $x(n)$ de n, et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $x = (x_n)_{n\geq n_0}$ ou simplement ou $x = (x_n)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble d'indices. Une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Définition II.4.1. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) de X* ***converge vers*** *$l \in X$ si : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, l) < \epsilon$. On écrit alors $\lim x_n = l$. Ceci équivaut à dire que pour toute boule $B(l,\epsilon)$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes x_n de la suite d'indices $n \geq N$ sont dans $B(l,\epsilon)$.*

Si une suite (x_n) de X ne converge vers aucune limite, on dit qu'elle est ***divergente****.*

Remarque II.4.2. $\lim x_n = l$ *dans X équivaut à dire que la suite $(d(x_n,l))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0 *dans* $(\mathbb{R}, |.|)$.

Proposition II.4.3. *Une suite convergente admet une unique limite.*

Démonstration. Supposons qu'une suite (x_n) admette deux limites l_1 et l_2. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(l_1,l_2) \leq d(l_1,x_n) + d(x_n,l_2)$. Or $\lim d(l_1,x_n) = 0$ et $\lim d(x_n,l_2) = 0$. Donc par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $d(l_1,l_2) = 0$. Donc $l_1 = l_2$ par la propriété (d2) des distances (Définition II.1.1).

$\square$

Proposition II.4.4. *Une suite (x_n) converge vers une limite l si et seulement si toute suite extraite de (x_n) converge vers la même limite.*

Démonstration. Supposons que (x_n) converge vers l. Soit $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, d(x_n,l) < \epsilon$. Puisque ϕ est strictement croissante, pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n$, donc $d(x_{\phi(n)}, l) < \epsilon$. Finalement, on a montré que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_{\phi(n)}, l) < \epsilon$, c'est-à-dire que $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers l.

La réciproque est immédiate puisque (x_n) est une suite extraite d'elle-même ($\phi = id_{\mathbb{N}}$). $\square$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace métrique (X,d).

1. On suppose que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle nécessairement convergente ?
2. On suppose que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction →

Définition II.4.5. *Soit (X,d) un espace métrique et soit (x_n) une suite de X. Un élément α de X est* ***valeur d'adhérence*** *de (x_n) s'il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers α.*

Exercice 18. Démontrer qu'une suite convergente à pour unique valeur d'adhérence sa limite.

Correction →

Remarque II.4.6. *Une suite dans un espace métrique peut avoir une unique valeur d'adhérence sans converger. Par exemple, considérer la suite (x_n) de $(\mathbb{R}, |.|)$ définie par $x_{2n} = 0$ et $x_{2n+1} = n$.*

Proposition II.4.7. *Soit X un ensemble et soient d et d' deux distances équivalentes sur X. Si une suite de X est convergente pour d alors elle est convergente pour d' et les limites sont égales.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente pour d. Soit l sa limite. Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tous $x, y \in X$, $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, d(u_n, l) < \epsilon$.

Soit $\epsilon' > 0$. Posons $\epsilon = \epsilon'/\beta$ et soit N associé à ϵ dans la relation précédente. Alors pour tout $n \geq N$,

$$d'(u_n, l) \leq \beta d(u_n, l) < \beta\epsilon = \epsilon'.$$

Donc $\forall \epsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d'(u_n, l) < \epsilon'$, ce qui signifie que (u_n) converge vers l pour d'. □

Exercice 19. *Comparaison de normes.*

Sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, on considère les trois normes

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\, dx\right)^{1/2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

1. Démontrer que $\|.\|_1$ n'est pas équivalente à $\|.\|_2$.
2. Démontrer que $\|.\|_2$ n'est pas équivalente à $\|.\|_\infty$.

Correction →

II.5 Ouverts, fermés, voisinages

Définition II.5.1. *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie U de X est un* ***ouvert*** *de X si pour tout point x de U il existe un rayon $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ soit incluse dans U.*

L'ensemble des ouverts de X s'appelle la ***topologie*** *de (X, d).*

Exemple II.5.2.
1. *Toute boule ouverte est un ouvert. En effet, soit $B(y, R)$ une boule ouverte et soit $x \in B(y, R)$. Posons $r = R - d(x, y)$. Pour tout $z \in B(x, r)$, $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$. Donc $d(y, z) < d(y, x) + r = R$, ce qui montre $B(x, r) \subset B(y, R)$.*
2. *Par suite, toute réunion de boules ouvertes est un ouvert.*

Remarque II.5.3. *Puisque tout ouvert est par définition une réunion de boules ouvertes, on obtient donc que les ouverts de E sont exactement les réunions de boules ouvertes.*

Proposition II.5.4. *Soit Soit (X, d) un espace métrique. Alors*

1. *$\emptyset$ et X sont des ouverts de X ;*
2. *Toute réunion d'ouverts est un ouvert ;*
3. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration. (1) et (2) découlent de la définition d'ouvert.

(3) Soient $O_i, i = 1, \ldots, n$ des ouverts de X. Montrons que $O = \bigcap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert de X. Soit $x \in O$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $x \in O_i$, donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Posons $r = \min\{r_i : i = 1, \ldots, n\}$. Alors pour tout i, $B(x, r) \subset O_i$. Donc $B(x, r) \subset O$. □

Exercice 20. Soient X un espace métrique. Démontrer que deux distances équivalentes sur X définissent les mêmes topologies sur X.

Correction →

Définition II.5.5. *Soit X un espace métrique. Un* ***fermé*** *de X est une partie F de X dont le complémentaire $F^c = X \setminus F$ est un ouvert.*

Proposition II.5.6. *Les fermés de X satisfont les propriétés de stabilité suivantes :*

1. *$\emptyset$ et X sont des fermés ;*
2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé ;*
3. *Une union finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. Ces trois propriétés sont duales, par passage au complémentaire, des trois propriétés satisfaites par les ouverts énoncées dans la Proposition II.5.4 □

Remarque II.5.7.

1. *Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert. Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |.|)$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$, qui n'est pas un ouvert. De même, une union quelconque de fermés peut ne pas être un fermé.*
2. *L'intervalle $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, |.|)$.*

Proposition II.5.8. *(Caractérisation séquentielle des fermés) Une partie A d'un espace métrique (X, d) est un fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) de A qui converge dans X, la limite est dans A.*

Démonstration. Par contraposée dans les deux directions.

Supposons qu'il existe une suite (x_n) de A qui converge vers une limite $l \in X \setminus A$. Alors pour tout $r > 0$, il existe un rang $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, $x_n \in B(l, r)$. Donc $B(l, r) \cap A \neq \emptyset$ et ce pour tout $r > 0$. Ceci montre que $X \setminus A$ n'est pas un ouvert, et donc que A n'est pas un fermé.

Supposons maintenant que A ne soit pas un fermé. Alors $X \setminus A$ n'est pas un ouvert. Donc il existe $x \in X \setminus A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons un élément x_n de $B(x, 1/n) \cap A$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de A qui converge vers x. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, x) < 1/n$. Donc $\lim d(x_n, x) = 0$. Finalement, on a trouvé une suite (x_n) de A qui converge vers une limite $x \notin A$. □

Exercice 21. Les parties suivantes de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. Un intervalle ouvert $]a, b[$.
2. Un intervalle fermé $[a, b]$.
3. Un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ ou $[a, b[$.
4. Un intervalle semi-fermé infini $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.
5. Un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.
6. $\mathbb{Z}$.
7. L'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
8. L'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$, où $(u_n)_{n\in N}$ est une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Correction →

Définition II.5.9. *Soit (X, d) un espace métrique et soit a un point de X. On appelle* ***voisinage*** *de a toute partie V de X qui contient un ouvert U qui lui-même contient a.*

Notons $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Un ***système fondamental de voisinages*** *de a est un sous-ensemble $\mathcal{W}(a)$ de $\mathcal{V}(a)$ tel que tout élément de $\mathcal{V}(a)$ contient un élément de $\mathcal{W}(a)$.*

Remarque II.5.10. *Une partie A de X est voisinage d'un point $x \in X$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset A$.*

Exemple II.5.11. *Dans un espace métrique, les boules ouvertes forment un système fondamental de voisinages.*

La proposition suivante découle de la définition de voisinage :

Proposition II.5.12. *Pour qu'une partie A d'un espace métrique soit un ouvert, il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points.*

II.6 Distance induite, sous-espace

Définition II.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un sous-ensemble de X. On définit sur Y une distance d_Y appelée **distance induite** par d de la façon suivante :*

$$\forall y, y' \in Y, d_Y(y, y') = d(y, y').$$

Les trois axiomes des distances pour d_Y découlent directement de ceux pour d.

*On dit que Y, muni de la distance induite d_Y, est un **sous-espace métrique** ou simplement **sous-espace** de (X, d). On dit aussi que Y est muni de la **topologie induite** par celle de (X, d) (voir la Section 3 ci-dessous pour une explication de ce vocabulaire).*

Exercice 22. Soit Y un sous-espace d'un espace métrique (X, d).

1) Démontrer qu'un sous-ensemble O de Y est un ouvert de Y si et seulement si il existe un ouvert U de X tel que $O = U \cap Y$.

2) Démontrer qu'un sous-ensemble F de Y est un fermé de Y si et seulement si il existe un fermé $\mathcal{F}$ de X tel que $F = \mathcal{F} \cap Y$.

Correction →

La notion de topologie induite a des subtilités (faciles à comprendre), comme le montre l'exemple suivant :

Exemple II.6.2. *Considérons $\mathbb{R}$ muni de la distance définie par la valeur absolue et posons $A =]0, 2]$. Le sous-ensemble $]0, 1]$ de $]0, 2]$ est un fermé de $]0, 2]$ puisqu'il est égal à l'intersection $[0, 1] \cap]0, 2]$ et $[0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Mais $]0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.*

II.7 Intérieur, adhérence, frontière

Définition II.7.1. *Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X. Un point x de A est dit **intérieur** à A si A est voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **l'intérieur** de A et se note $\mathring{A}$*

Proposition II.7.2. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A.*

Démonstration. On doit montrer que 1) $\mathring{A}$ est un ouvert et 2) Tout ouvert de X contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$.

1) Soit $x \in \mathring{A}$. Puisque A est voisinage de x, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais alors pour tout $y \in B(x, r)$, A est aussi un voisinage de y puisque $y \in B(x, r) \subset A$. Donc $y \in \mathring{A}$ et on a donc $B(x, r) \subset \mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est voisinage de x. Puisque ceci est valable pour tout point x de $\mathring{A}$, nous avons montré que $\mathring{A}$ voisinage de chacun de ses points, et donc est un ouvert de X.

2) Soit O un ouvert de X contenu dans A. Soit $x \in O$. Puisque O est un ouvert tel que $x \in O \subset A$, alors A est un voisinage de x, donc $x \in \mathring{A}$.

□

Comme conséquence directe de la Proposition II.7.2, nous avons :

Corollaire II.7.3. *Une partie A de X est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.*

Définition II.7.4. *Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X. Un point x de X est dit* ***adhérent*** *à A si tout voisinage V de x rencontre A (i.e. $V \cap A$ est non vide). L'ensemble des points adhérents à A s'appelle* ***l'adhérence*** *ou* ***la fermeture*** *de A et se note $\overline{A}$.*

Proposition II.7.5. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé (pour l'inclusion) contenant A.*

Démonstration. On doit montrer que 1) $\overline{A}$ est un fermé et 2) Tout fermé de X contenant A contient $\overline{A}$.

1) Montrons que le complémentaire de $\overline{A}$ est un ouvert. Soit $x \in X \setminus \overline{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Mais alors, pour tout $y \in B(x, r)$, la boule $B(x, r)$ est un voisinage de y qui ne rencontre pas A, donc $y \in X \setminus \overline{A}$. Ceci montre que $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert, et donc que $\overline{A}$ est un fermé.

2) Soit F un fermé de X contenant A. Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$, donc puisque $A \subset F$, $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$. Supposons $x \in X \setminus F$. Puisque F est fermé, $X \setminus F$ est un ouvert, donc il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \subset X \setminus F$, mais alors $B(x, r_0) \cap F = \emptyset$. Contradiction. Donc $x \in F$. Nous avons montré $\overline{A} \subset F$.

□

Comme conséquence directe de la Proposition II.7.5, nous avons :

Corollaire II.7.6. *Une partie A de X est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Proposition II.7.7. *(Caractérisation séquentielle de l'adhérence) $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites de A.*

Démonstration. Puisque $\overline{A}$ est un fermé, toute suite convergente de $\overline{A}$ converge dans $\overline{A}$. Donc puisque $A \subset \overline{A}$, toute limite de suite de A est dans $\overline{A}$. Soit maintenant $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$, donc on peut choisir un élément de $B(x, 1/n) \cap A$. Alors la suite (x_n) est une suite de A qui converge vers x. Donc tout élément de $\overline{A}$ est bien limite d'une suite de A. □

Définition II.7.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est dite dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Proposition II.7.9. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. On doit montrer que tout réel $a \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite de $\mathbb{Q}$.

Commençons par montrer que tout intervalle ouvert non vide $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient (au moins) un rationnel. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q > \frac{1}{b-a}$ et posons $p = E(aq) + 1$ où E désigne la partie entière. Alors $p - 1 \leq aq < p$, donc $a < \frac{p}{q}$. D'autre part $\frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a$ donc $\frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < a + b - a = b$. Donc $\frac{p}{q} \in]a, b[$.

En conséquence, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite (y_n) de $\mathbb{Q}$ qui converge vers a ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de prendre $y_n \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $]a, a + 1/n[$. Ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Remarque II.7.10. *En utilisant des arguments similaires, on démontre aussi que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tous réels a, b tels que $a < b$, il existe un $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x \in]a, b[$. En effet, on sait qu'il existe un rationnel $r \in]a, b[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = (1 + \frac{\sqrt{2}}{n})r$. Alors la suite (x_n) est une suite de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge vers r, donc à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$.*

En conséquence, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une suite (y_n) de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge vers a ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de prendre $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $]a, a + 1/n[$. Ceci montre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23.

1. $\mathbb{Q}$ est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? Un fermé de $\mathbb{R}$? Décrire l'adhérence, l'intérieur et la frontière de $\mathbb{Q}$.
2. Mêmes questions pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Correction →

Définition II.7.11. *Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X. Un point x de X est dit* ***point frontière*** *de A s'il est adhérent à la fois à A et à son complémentaire dans X. L'ensemble des points frontières de A s'appelle la* ***frontière*** *de A et se note $Fr(A)$.*

Exercice 24. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $]0,1]$; $]1,+\infty[$; $[0,1] \cup \{2\}$; $\mathbb{Z}$; $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.

Correction →

Exercice 25. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (X, d). Montrer les propriétés suivantes :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
2. Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. On n'a pas en général $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Correction →

Exercice 26. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (X, d). Montrer les propriétés suivantes :

1. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.
2. Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. Que pensez-vous de l'analogue des questions 3. et 4. de l'exercice précédent en remplaçant les adhérences par des intérieurs ?

Correction →

Exercice 27. 1. Démontrer qu'une sphère d'un espace vectoriel normé n'a aucun point intérieur.

2. Démontrer qu'un sous-espace F d'un espace vectoriel normé E possède un point intérieur si et seulement si $F = E$.

Correction →

Exercice 28. Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}^2$, $S(a, r)$, $[0,1] \times \{0\}$.

Correction →

Exercice 29. Soit O un ouvert d'un espace métrique (X, d). Montrer que pour toute partie $A \subset E$, on a l'équivalence :

$$A \cap O = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap O = \emptyset\ .$$

Correction →

Exercice 30. (distance à une partie)

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X, d). Pour tout $x \in X$, on pose :

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}$$

1. Soit $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.
2. Montrer que la distance à une partie A coïncide avec la distance à l'adhérence $\overline{A}$ de A.
3. Pour $\varepsilon > 0$ on pose :
$$V_\varepsilon(A) = \{\ x \in X | d(x, A) < \varepsilon\}.$$
Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$.
4. Étant données deux parties non vides A et B de X, montrer que $d_A = d_B \iff \overline{A} = \overline{B}$.

Correction →

II.8 Espace topologique

Comme déjà indiqué dans l'introduction de cette partie, la notion d'espace topologique n'est pas au programme. Néanmoins, il s'agit d'une notion importante des mathématiques et il est utile d'en voir dès à présent une idée.

La définition d'espace topologique généralise celle d'espace métrique en se basant sur les trois propriétés des ouverts de la Proposition II.5.4 :

Définition II.8.1. *Soit E un ensemble et soit $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{T}$ est une* ***topologie*** *sur E si*

(T1) *$\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{T}$*

(T2) *Toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$*

(T3) *Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$*

On dit alors que le couple $(E, \mathcal{T})$ est un ***espace topologique****. Un élément de $\mathcal{T}$ s'appelle un* ***ouvert*** *de la topologie.*

Exemple II.8.2. *Si (X, d) est un espace métrique, ses ouverts (selon la définition II.5.1) forment une topologie sur E.*

Définition II.8.3. *Si $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique et si F est un sous-ensemble de E, alors on peut définir sur F la* ***topologie induite*** *par $\mathcal{T}$: ses ouverts sont les intersections de F avec les ouverts de $\mathcal{T}$. On dit alors que F est un* ***sous-espace topologique*** *de E.*

Exemple II.8.4. *Si X est un ensemble quelconque, on peut le munir de :*

— *la* ***topologie grossière*** *$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$*

— *la* ***topologie discrète*** *$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X.*

Exercice 31. Vérifier que la topologie discrète et la topologie grossière sont bien des topologies sur X.

Correction →

II.9 Correction des exercices

. Exercice 10

$d(x,y) = |x^2 - y^2|$ ne définit pas une distance sur $\mathbb{R}$, car $d(1,-1) = 0$ alors que $1 \neq -1$.

Les trois expressions des questions 2,3 et 4 définissent des distances. Pour les trois, la symétrie et l'ingalité triangulaire sont immédiates. L'axiome (d2) vient de ce que les trois fonctions $x \mapsto x^3$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont injectives sur leur ensemble de définition.

Retour texte → □

. Exercice 11 Non, les distances $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ et $d'(x,y) = |e^x - e^y|$ sur $\mathbb{R}$ ne sont pas équivalentes. En effet, supposons le contraire. Alors il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}, d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$. En particulier, pour $y = 0$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|e^x - 1| \leq \beta |x^3|$. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{|e^x-1|}{|x^3|} = +\infty$. Contradiction.

Retour texte → □

. Exercice 12

Montrons que $\|.\|_\infty$ est une norme.

(N1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty .$$

(N2) $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$ implique que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle.

(N3) Soient $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{[0,1]} |f(x)| + \sup_{[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

Donc $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $|f(x)+g(x)|$ sur $[0,1]$. Puisque sup est le plus petit des majorants on obtient donc

$$\sup_{[0,1]} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty ,$$

c'est-à-dire $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Montrons que $\|.\|_1$ est une norme.

(N1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Alors

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |(\lambda f)(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)| dx = |\lambda| \, \|f\|_1$$

(N2) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Supposons que $\|f\|_1 = 0$, i.e. $\int_0^1 |f(x)|dx = 0$. Par continuité de f sur $[0,1]$, ceci implique $f = 0$ sur $[0,1]$. En effet, supposons le contraire, i.e., il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) \neq 0$. Posons $m = \frac{|f(a)|}{2}$. Alors $m > 0$, et par continuité de f sur $[0,1]$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1] \cap [a-\eta, a+\eta], |f(x)| \geq m$. De plus, si l'on prend η suffisamment petit, alors l'un au moins de $a+\eta$ ou $a-\eta$ est dans $[0,1]$ (les deux si $a \notin \{0,1\}$. Mais alors, $\|f\|_1 \geq \eta m \neq 0$. Contradiction.

(N3) Soient $f, g, h \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Par intégration sur $[0,1]$ des deux membres de cette inégalité, on obtient $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Montrons que $\|.\|_2$ est une norme.

Les démonstrations des propriétés (N_1) et (N_2) reprennent les arguments utilisés pour $\|.\|_1$.
(N3) Il s'agit de démontrer l'inégalité triangulaire,

$$\sqrt{\int_0^1 (f(x)+g(x))^2dx} \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx} + \sqrt{\int_0^1 g(x)^2dx}$$

c'est-à-dire, en élevant au carré les deux membres de l'inégalité,

$$\int_0^1 (f(x)+g(x))^2dx \leq \int_0^1 f(x)^2dx + \int_0^1 g(x)^2dx + 2\sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx}\sqrt{\int_0^1 g(x)^2dx}$$

En développant et éliminant des termes, on obtient que cette inégalité est équivalente à :

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx}\sqrt{\int_0^1 g(x)^2dx}.$$

Cette dernière inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Donc (N3) est vérifiée.

Retour texte → □

. Exercice 13

1) Pour la distance $d(x,y)=|x^3-y^3|$ sur $\mathbb{R}$, on a : $B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\colon |x^3|<1\}=]-1,1[$.

2) Pour la distance $d(x,y)=|e^x-e^y|$ sur $\mathbb{R}$, on a : $B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}\colon |e^x-1|<1\}=]-\infty,\ln(2)[$.

3) Pour la distance $d(x,y)=|x^{-1}-y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$, $x\in B(1,\frac{1}{2})$ équivaut à $|\frac{1}{x}-1|<\frac{1}{2}$, i.e., $-\frac{1}{2}<\frac{1}{x}-1<\frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{x}<\frac{3}{2}$$

Donc $B(1,\frac{1}{2})=]\frac{2}{3},2[$.

Retour texte → □

. Exercice 14

1) La vérification des propriétés (N1), (N2) et (N3) de la définition est très facile, sauf pour l'inégalité triangulaire (N3) de la norme $\|.\|_2$.

Pour cette dernière, on reprend la démonstration de l'exercice 12 : on doit démontrer que pour tous $x,y\in\mathbb{R}^2$, on a $(\|x+y\|_2)^2 \leq (\|x\|_2+\|y\|_2)^2$. En développant et en éliminant des termes, on montre que ceci est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ pour le produit scalaire usuel $\langle x,y\rangle$ dans $\mathbb{R}^2$.

2) Voir Figure 1.

3) Voir Figure 2.

4) D'après la question 3), on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^2$. En effet, fixons x et posons $r=\|x\|_1$. Alors puisque $x\in B_1(0,r)\subset B_2(0,r)$, on a donc $x\in B_2(0,r)$ et donc

$$\|x\|_2 \leq r = \|x\|_1\,.$$

On procède de même pour l'inégalité $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ en utilisant $B_2(0,r)\subset B_\infty(0,r)$.

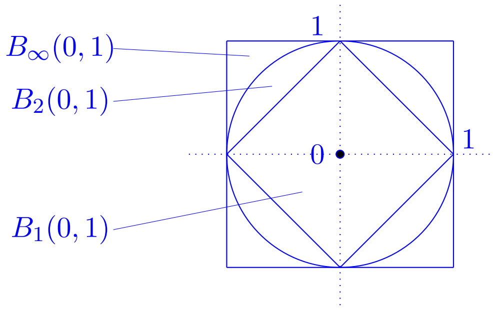


FIGURE 1 – Les boules unités

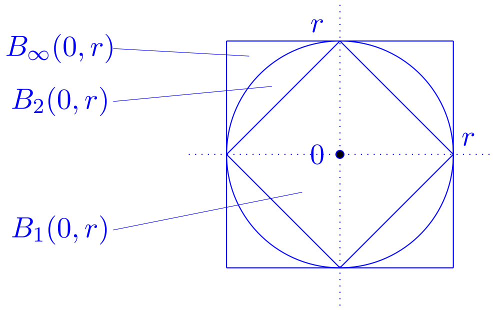


FIGURE 2 – Les boules $B(0,r)$

De plus, pour tout r, $B_\infty(0,r) \subset B_1(0,2r)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $\|x\|_1 \leq 2\,\|x\|_\infty$. Finalement, on obtient :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 2\,\|x\|_\infty\,,$$

ce qui montre que les trois normes sont équivalentes.

Retour texte → □

. Exercice 15

Soit F un sous-espace non trivial (c'est-à-dire $F \neq \{0\}$) d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. Soit $x \in E$ et soit $r > 0$. Montrons que $F \not\subset B(x,r)$.

Soit $a \in F$ tel que $a \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|na\| \leq \|na - x\| + \|x\|$, donc $n\,\|a\| - \|x\| \leq \|na - x\|$. Puisque $a \neq 0$, $\lim n\,\|a\| = +\infty$, donc puisque $\|x\|$ est une constante, $\lim(n\,\|a\| - \|x\|) = +\infty$. L'inégalité précédente implique alors $\lim \|na - x\| = +\infty$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|n_0 a - x\| > r$, ce qui implique que F n'est pas contenu dans la boule $B(x,r)$. Puisque ceci est valable pour tout $x \in E$ et $r > 0$, on en déduit que F n'est contenu dans aucune boule, donc n'est pas borné.

Retour texte → □

. Exercice 16

1) $\operatorname{diam}([a,b]) = b - a$. En effet, pour tous $x, y \in [a,b]$, on a $|x - y| \leq b - a$. De plus, les suites $a_n = a + \frac{b-a}{n}$ et $b_n = b - \frac{b-a}{n}$ sont deux suites de $[a,b]$ vérifiant $\lim |b_n - a_n| = b - a$.

Le même raisonnement conduit à $\operatorname{diam}([a,b[) = b - a$. (et aussi à $\operatorname{diam}(]a,b[) = b - a$).

On a $\operatorname{diam}([a,+\infty[) = +\infty$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a + n$ est dans $[a,+\infty[$ et $\lim |a_n - a| = +\infty$.

2) Le disque en question est $B_f(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Pour tous $(x_1,y_1) \in B_f(0,R)$ et $(x_2,y_2) \in B_f(0,R)$, on a :

$$\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\| \leq R + R = 2R.$$

D'autre part, $(-R,0)$ et $(R,0)$ sont des points de $B_f(0,R)$ tels que $\|(-R,0)-(R,0)\| = 2R$. Donc $\operatorname{diam}(B_f(0,R)) = 2R$.

3) Supposons A borné. Alors il existe $x \in E$ et $r > 0$ tel que $A \subset B_f(x,r)$. Donc pour tous $y, y' \in A$, on a $\|y-y'\| \leq \|y-x\| + \|x-y'\| < 2r$. Donc $\{\|y-y'\|, : y, y' \in A\}$ est un ensemble non vide (car $A \neq \emptyset$) et borné de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, autrement dit, $\operatorname{diam} A < +\infty$.

Réciproquement, supposons $\operatorname{diam} A < +\infty$ et posons $r = \operatorname{diam} A$. Choisissons un point x_0 dans A. Alors pour tout $x \in A$, $\|x-x_0\| \leq r$, donc $x \in B_f(x_0,r)$. Donc A est borné.

Retour texte → □

. Exercice 17

1) Non : la suite (u_n) de $\mathbb{R}$ définie par $u_n = (-1)^n$ est un contre-exemple.

2) Soit $\epsilon > 0$.

Puisque (u_{2n}) converge vers l, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|u_{2n} - l\| < \epsilon.$ (1)

Puisque (u_{2n+1}) converge vers l, $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, \|u_{2n+1} - l\| < \epsilon$ (2)

Posons $N = 2\max(N_1,N_2)+1$. Soit $k \geq N$. Ou bien k est pair, alors $k = 2n$ où $n \geq N_1$. On a donc $\|u_k - l\| < \epsilon$ en utilisant (1). Ou bien k est impair, alors $k = 2n+1$ où $n \geq N_2$. On a donc $\|u_k - l\| < \epsilon$ en utilisant (2).

Finalement, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \|u_k - l\| < \epsilon$, donc (u_n) converge vers l.

3) On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent respectivement vers l_1, l_2 et l_3. La suite (u_{6n}) est une suite extraite de (u_{2n}), donc elle converge vers l_1, et c'est aussi une suite extraite de (u_{3n}), donc elle converge vers l_3. Par unicité de la limite, on obtient $l_1 = l_3$.

La suite (u_{6n+3}) est une suite extraite de (u_{2n+1}), donc elle converge vers l_2, et c'est aussi une suite extraite de (u_{3n}), donc elle converge vers l_3. Par unicité de la limite, on obtient $l_2 = l_3$.

On obtient donc $l_1 = l_2$, et on conclut en appliquant le résultat de la question 2).

Retour texte → □

. Exercice 18

Dans un espace métrique, soit (u_n) une suite qui converge vers l. Soit α une valeur d'adhérence de (u_n). Alors il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers α. D'après la Proposition II.4.4, $(u_{\phi(n)})$ converge vers l, donc par unicité de la limite, $\alpha = l$.

Retour texte → □

. Exercice 19

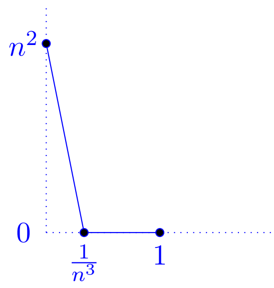
1) D'après la Proposition II.4.7, il suffit de montrer qu'il existe une suite (f_n) qui converge vers une limite $l \in E$ pour l'une des normes mais qui ne converge pas vers l pour l'autre norme.

Considérons, par exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par : f_n est affine entre $x = 0$ et $x = \frac{1}{n^3}$ avec $f_n(0) = n^2$ et $f_n(\frac{1}{n^3}) = 0$, et $f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [\frac{1}{n}, 1]$. Le graphe de f_n est représenté sur la figure suivante :

$\|f_n\|_1$ est égale à l'aire du triangle limité par les deux axes et le graphe de f_n. Donc $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$. La suite $(f_n)_n$ converge donc pour la norme $\|.\|_1$ vers la fonction nulle.

Pour tout $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = -n^5x + n^2$. Donc $f_n(x)^2 = n^{10}x^2 + n^4 - 2n^7x$.

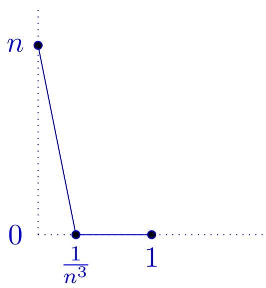
$$\|f_n\|_2 = \Big(\int_0^{1/n} (n^{10}x^2 + n^4 - 2n^7x)\,dx\Big)^{1/2} = \sqrt{\frac{n}{3}}.$$



Cette quantité tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite $(f_n)_n$ est divergente pour la norme $\|.\|_2$.

D'après la proposition II.4.7, les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

2) Considérons la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par : g_n est affine entre $x = 0$ et $x = \frac{1}{n^3}$ avec $g_n(0) = n$ et $g_n(\frac{1}{n^3}) = 0$, et $g_n(x) = 0$ pour tout $x \in [\frac{1}{n^3}, 1]$. Le graphe de g_n est représenté sur la figure suivante :



Alors $\|g_n\|_\infty = n$, donc la suite $(g_n)_n$ diverge pour la norme $\|.\|_\infty$.

D'autre part, pour tout $x \in [0, \frac{1}{n^2}]$, $g_n(x) = -n^4x + n$. Donc

$$\|g_n\|_2 = \left(\int_0^{1/n^3} (-n^4x + n)^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite $(g_n)_n$ converge vers la fonction constante nulle pour la norme $\|.\|_2$.

D'après la proposition II.4.7, les deux normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 20

Soient d et d' deux distances équivalentes sur un espace métrique X. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $x, y \in X$, $\alpha\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta\, d(x, y)$.

Soit O un ouvert pour la distance d. Montrons que O est aussi un ouvert pour la distance d'. Soit $x \in O$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$, où $B(x, r)$ désigne la boule pour la distance d. Posons $r' = r\alpha$. Alors on a $B'(x, r') \subset O$, où $B'(x, r')$ désigne la boule pour la norme d'. En effet, pour tout $y \in B'(x, r')$, on a $d(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} d'(x, y) < \frac{r'}{\alpha} = r$.

Finalement, pour tout $x \in O$, il existe $r' > 0$ tel que $B'(x, r') \subset O$, ce qui montre que O est un ouvert pour la distance d'

Par symétrie des rôles, on a aussi que tout ouvert pour la distance d' est un ouvert pour la distance d. Donc les deux distances définissent la même topologie sur X.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 21

1. Soit $x \in]a,b[$. Posons $r = \min(x-a, b-x)$. Alors $B(x,r) =]x-r, x+r[\subset]a,b[$. Ceci étant valable pour tout $x \in]a,b[$, on en déduit que $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq \frac{1}{b-a}$. Alors la suite $(a+\frac{1}{n})_{n \geq n_0}$ est une suite de $]a,b[$ qui converge vers a, mais $a \notin]a,b[$. Donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $]a,b[$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Il n'existe pas $r > 0$ tel que l'intervalle $]b-r, b+r[$ soit contenu dans $[a,b]$. Donc $[a,b]$ n'est pas un ouvert.
   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Posons $r = \min(|b-x|, |a-x|)$. Alors l'intervalle $]x-r, x+r[$ est contenu dans $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, on en déduit que $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ est un ouvert.
3. $[a,b[$ n'est pas un ouvert car il n'existe pas $r > 0$ tel que l'intervalle $]b-r, b+r[$ soit contenu dans $[a,b]$.
   $[a,b[$ n'est pas un fermé pour la même raison que $]a,b[$.
4. $[a,\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont des fermés mais ne sont pas des ouverts par les mêmes arguments que précédemment.
5. Considérons un ensemble fini de réels $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Aucun intervalle $]x_1 - r, x_1 + r[$ n'est contenu dans A. Donc A n'est pas un ouvert.
   Toute suite convergente de A est constante égale à l'un des x_i à partir d'un certain rang, donc converge vers l'un des x_i. Donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés, A est un fermé de $\mathbb{R}$.
6. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Aucun intervalle $B(n,r) =]n-r, n+r[$ n'est contenu dans $\mathbb{Z}$. Donc $\mathbb{Z}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. En revanche, $\mathbb{Z}$ est un fermé car son complémentaire est $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ qui est une union de boules ouvertes, donc un ouvert.
7. Posons $A = \{1/n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$. Ce n'est pas un ouvert car $1 \in A$ et aucun intervalle ouvert centré en 1 n'est contenu dans A. Ce n'est pas un fermé car la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de A qui converge vers 0, qui n'appartient pas à A.
8. Posons $B = \{l\} \cup \{u_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.
   B est dénombrable, alors que tout intervalle $]l-r, l+r[$ est infini non dénombrable. Donc il n'existe pas de rayon $r > 0$ tel que $]l-r, l+r[\subset B$. Donc B n'est pas un ouvert.
   Montrons que B est un fermé. Nous allons montrer que son complémentaire est un ouvert. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus B$. Soit $\epsilon < |x-l|$. Alors $x \notin]l-\epsilon, l+\epsilon[$. Puisque (u_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$. Posons $r = \min\big(\{|x-l|-\epsilon\} \cup \{|x-u_i| \colon i = 0, \ldots, N-1\}\big)$. Alors pour tout $y \in B, y \notin]x-r, x+r[$, c'est-à-dire $]x-r, x+r[\subset \mathbb{R} \setminus B$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus B$, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset \mathbb{R} \setminus B$. Ceci montre que $\mathbb{R} \setminus B$ est un ouvert, et donc que B est fermé.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 22

1) Soit O un ouvert de Y. Alors pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_Y(x, r_x) \subset Y$, où $B_Y(x, r_x)$ désigne la boule de Y centrée en x et de rayon r_x. On a donc

$$O = \bigcup_{x \in O} B_Y(x, r_x)$$

Par définition de la distance d_Y, on a pour tout $a \in Y$ et $r > 0$,

$$B_Y(a,r) = \{y \in Y d_Y(a,y) < r\} = \{y \in Y d(a,y) < r\} = B(a,r) \cap Y,$$

où $B(a,r)$ désigne la boule de X. donc

$$O=\bigcup_{x\in Y}B_Y(x,r_x)=\bigcup_{x\in Y}B(x,r_x)\cap Y=Y\cap\left(\bigcup_{x\in Y}B(x,r_x)\right)=Y\cap U,$$

où $U=\bigcup_{x\in Y}B(x,r_x)$, est bien un ouvert de X puisque réunion de boules ouvertes.

Réciproquement, soit U un ouvert de X. Montrons que $O=U\cap Y$ est un ouvert de Y. Soit $x\in O$. Alors $x\in U$ et puisque U est un ouvert de X, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset U$. Donc $B_Y(x,r)=B(x,r)\cap Y\subset U\cap Y=O$. Finalement, pour tout point x de O, il existe $r>0$ tel que $B_Y(x,r)\subset O$. Donc O est un ouvert de Y.

2) F est un un fermé de Y si et seulement si son complémentaire O dans Y est un ouvert de Y c'est-à-dire d'après 1) s'il existe un ouvert U de X tel que $U\cap Y=O$, ce qui équivaut à dire que le complémentaire $\mathcal{F}$ de U dans X est un fermé de X qui vérifie $\mathcal{F}\cap Y=F$.

Retour texte → □

. Exercice 23

1) $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé puisque $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\neq\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir la RemarqueII.7.10). Donc pour tout $x\in\mathbb{Q}$, il existe une suite de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ qui converge vers x. Puisque $x\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ceci implique que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé, et donc que $\mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert.

2) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé car $\mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert. Ce n'est pas non plus un ouvert puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé.

Retour texte → □

. Exercice 24

On rappelle que la frontière $Fr(A)$ de A d'une partie d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ est définie par $Fr(A)=\overline{A}\cap\overline{E\setminus A}$.

Ensemble	$]0,1[$	$[1,+\infty[$	$\{1\}$
$]0,1]$	$]1,+\infty[$	$[0,1]\cup\{2\}$	$\{0,1,2\}$
$]1,+\infty[$	$]0,1[$	$\mathbb{Z}$	
$[0,1]\cup\{2\}$	$\emptyset$		$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[$	$[0,1]$	
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[$	Adhérence	Frontière	
Intérieur	$[0,1]$	$\{0,1\}$	F

où $F=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$.

Retour texte → □

. Exercice 25

1. $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ car $\overline{A}$ est un fermé. (Corollaire II.7.6).
2. Supposons $A\subset B$. Alors $A\subset\overline{B}$. Or $\overline{B}$ est un fermé et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Donc $\overline{A}\subset\overline{B}$.
3. $A\subset(A\cup B)$, donc $A\subset\overline{A\cup B}$. D'où $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$ puisque $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. De même, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. Donc $(\overline{A}\cup\overline{B})\subset\overline{A\cup B}$.
   D'autre part, $A\subset\overline{A}\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$ et $B\subset\overline{B}\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$. Donc $(A\cup B)\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$, qui est un fermé. Donc $\overline{A\cup B}\subset(\overline{A}\cup\overline{B})$.

4. Prenons $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$. Alors $A \cap B = \emptyset$, donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Mais $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = [1,2]$, donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\} \neq \overline{A \cap B}$.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 26

1. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ car $\mathring{A}$ est un ouvert et $\mathring{\mathring{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $\mathring{A}$, donc c'est $\mathring{A}$ lui-même.
2. Supposons $A \subset B$. On a $\mathring{A} \subset A$, donc $\mathring{A} \subset B$. Or $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert contenu dans B. Donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
3. Par des arguments similaires à ceux de l'exercice précédent, on montre $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

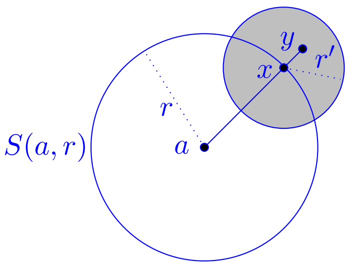
   On n'a pas en général $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. En effet, Prenons $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$. Alors $\mathring{A} =]0,1[$ et $\mathring{B} =]1,2[$, donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[$, alors que $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]1,2[$.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 27

1) Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel et soit $S(a,r)$ une sphère dans E. Soit $x \in S(a,r)$. Fixons $r' > 0$ et montrons que $B(x,r') \not\subset S(a,r)$.

Posons $y = a + (1 + \frac{r'}{2\|x-a\|})(x-a)$ (voir figure ci-dessous).



On a $\|y - x\| = \left\| \frac{r'}{2\|x-a\|}(x-a) \right\| = \frac{r'}{2} < r'$. Donc $y \in B(x,r)$. D'autre part, $y \notin S(a,r)$. En effet, $\|y-a\| = \|x-a\| + \frac{r'}{2} = r + \frac{r'}{2} \neq r$. D'où $B(x,r') \not\subset S(a,r)$. Comme ceci est valable pour tout $r' > 0$, on en déduit que x n'est pas un point intérieur à $S(a,r)$. Donc l'intérieur de $S(a,r)$ est vide.

2) Démontrer qu'un sous-espace F d'un espace vectoriel normé E possède un point intérieur si et seulement si $F = E$.

Supposons que F admette un point intérieur a. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, alors pour tout $x \in B(a,r)$, on a $x - a \in F$. Donc $\{x - a \colon x \in B(a,r)\} \subset F$. Or $x \in B(a,r)$ équivaut à $x - a \in B(0,r)$. Donc $B(0,r) \subset F$.

Soit $y \in E \setminus \{0\}$. Alors $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} \in B(0,r)$, et donc $z \in F$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $y = \frac{2\|y\|}{r} z \in F$. On en déduit $F = E$.

Réciproquement, si $E = F$, alors E est un ouvert, donc l'intérieur de F est F lui-même, donc 0 est un point intérieur à F.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 28

Ensemble	Intérieur	Adhérence	Frontière
$\mathbb{Z}^2$	$\emptyset$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
$\mathbb{Q}^2$	$\emptyset$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$
$S(a,r)$	$\emptyset$	$S(a,r)$	$S(a,r)$
$[0,1]\times\{0\}$	$\emptyset$	$[0,1]\times\{0\}$	$[0,1]\times\{0\}$

Donnons l'explication pour les deux derniers ensembles (les deux premiers découlant d'arguments similaires à ceux de l'exercice sur $\mathbb{Q}$ traité précédemment).

Pour $S(a,r)$ on soit déjà que $S(a,r)$ est d'intérieur vide par l'exercice précédent Montrons que $\overline{S(a,r)} = S(a,r)$. Pour cela, il suffit de montrer que le complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$ est un ouvert. Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$. On a donc $\|x-a\| \neq r$ et choisissons $r' > 0$ tel que $r' < |\,\|x-a\|-r|$. Alors un calcul simple montre que $B(x,r') \subset \mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$. Comme ceci est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$, on en déduit que $\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$ est un ouvert, et donc que $S(a,r)$ est fermé. Donc $\overline{S(a,r)} = S(a,r)$.

Soit $x \in S(a,r)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = a + (1+\frac{1}{n})(x-a)$. Alors (x_n) est une suite de points de $\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)$ qui converge vers x. Donc $x \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)}$, et comme ceci est valable pour tout $x \in S(a,r)$, on en déduit $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)} = \mathbb{R}^2$.

On obtient donc : $Fr(S(a,r)) = \overline{S(a,r)} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus S(a,r)} = S(a,r)$.

Montrons que $[0,1]\times\{0\}$ est d'intérieur vide. Soit $(x,0) \in [0,1]\times\{0\}$ (donc $x \in [0,1]$). Pour tout $r > 0$, le point $(x,\frac{r}{2})$ est dans la boule $B(x,r)$ mais n'est pas dans $[0,1]\times\{0\}$, donc on n'a pas $B(x,r) \subset [0,1]\times\{0\}$. Donc x n'est pas un point intérieur à $[0,1]\times\{0\}$.

Montrons que $[0,1]\times\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$.

Ou bien $x \notin [0,1]$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $]x-\eta, x+\eta[\cap [0,1] = \emptyset$, et on a alors $B((x,y),\eta) \subset \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$.

Sinon, $y \neq 0$. Posons $\eta = |y|$. Alors $B((x,y),\eta) \subset \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$.

Finalement pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$, il existe $\eta > 0$ tel que $B((x,y),\eta) \subset \mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$. Donc $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e., son complémentaire $[0,1]\times\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Finalement, on obtient $\overline{[0,1]\times\{0\}} = [0,1]\times\{0\}$.

Par des arguments déjà utilisés dans cet exercice, on montre que $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})} = \mathbb{R}^2$. On obtient donc $Fr([0,1]\times\{0\}) = \overline{[0,1]\times\{0\}} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus ([0,1]\times\{0\})} = [0,1]\times\{0\}$

Retour texte → □

. Exercice 29

Par contraposée. Supposons $\overline{A} \cap O \neq \emptyset$. Soit $x \in \overline{A} \cap O$. Puisque O est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset 0$. Par ailleurs, x est adhérent à A, donc $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$, et donc $A \cap O \neq \emptyset$.

Réciproquement, supposons $A \cap O \neq \emptyset$. Puisque $A \subset \overline{A}$, cela implique $\overline{A} \cap O \neq \emptyset$.

Retour texte → □

. Exercice 30

Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X,d).

1. Si $x \in \overline{A}$ alors il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui tend vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leq d(x,A) = \inf\{d(x,y),\ y \in A\} \leq d(x,x_n)$$
et $d(x,x_n) \to 0$ donc $d(x,A) = 0$.

Si $d(x,A)=\inf\{d(x,y),\ y\in A\}=0$ alors par définition

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists y\in A,\ 0\leq d(x,y)\leq\varepsilon.$$

En appliquant cette définition avec $\varepsilon=1/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on obtient l'existence d'une suite (y_n) d'éléments de A telle que $0\leq d(x,y_n)\leq 1/n$. Ainsi (y_n) tend vers x ce qui établit que $x\in\overline{A}$.
Par conséquent $x\in\overline{A}\iff d(x,A)=0$.

2. On a $A\subset\overline{A}$ donc

$$d(x,\overline{A})=\inf\{d(x,y),\ y\in\overline{A}\}\leq\inf\{d(x,y),\ y\in A\}=d(x,A).$$

Pour tous $y\in A$ et $z\in\overline{A}$ on a par l'inégalité triangulaire

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$$

donc

$$d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)\leq d(x,z)+\inf_{y\in A}d(z,y)=d(x,z)+d(z,A),$$

mais comme $z\in\overline{A}$, on a $d(z,A)=0$, d'où $d(x,A)\leq d(x,z)$ et finalement

$$d(x,A)\leq\inf_{z\in\overline{A}}d(x,z)=d(x,\overline{A}).$$

Par conséquent $d(x,A)=d(x,\overline{A})$.

3. D'après la première question on a $\overline{A}=\{x\in X,\ d(x,A)=0\}$, mais

$$d(x,A)=0\iff\forall\varepsilon>0,\ d(a,A)<\varepsilon\iff\forall\varepsilon>0,\ x\in V_\varepsilon(A)$$

donc

$$\overline{A}=\bigcap_{\varepsilon>0}V_\varepsilon(A)=\bigcap_{\varepsilon>0}\{\ x\in X,\ d(x,A)<\varepsilon\}.$$

4. Si $\overline{A}=\overline{B}$ alors d'après la deuxième question, $d_{\overline{A}}=d_{\overline{B}}$. Comme $d_A=d_{\overline{A}}$ et $d_B=d_{\overline{B}}$ on obtient $d_A=d_B$.
Par contraposition, si $\overline{A}\neq\overline{B}$ alors $D=(\overline{A}\cup\overline{B})\smallsetminus(\overline{A}\cap\overline{B})\neq\emptyset$ donc il existe $x\in D$.
Comme $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$, d'après la première question on a ($x\in\overline{A}$ ou $x\in\overline{B}$), c'est-à-dire ($d(x,A)=0$ ou $d(x,B)=0$), mais comme $x\notin\overline{A}\cap\overline{B}$, on n'a pas ($x\in\overline{A}$ et $x\in\overline{B}$), c'est-à-dire ($d(x,A)=0$ et $d(x,B)=0$).
Par conséquent $d(x,A)\neq d(x,B)$ et $d_A\neq d_B$.

Retour texte → □

. Exercice 31 C'est immédiat car les trois axiomes sont trivialement vérifiés

Retour texte →

□

Troisième partie

Applications continues

III.1 Continuité

Définition III.1.1. *Soient* (X,d) *et* (Y,δ) *deux espaces métriques et soit* $a \in X$*. Une application* $f\colon X \to Y$ *est* ***continue*** *en* a *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, (d(x,a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \epsilon).$$

Ceci signifie que pour x *proche de* a*, l'image* $f(x)$ *est proche de* $f(a)$*, ou encore, que l'image réciproque de toute boule centrée en* $f(a)$ *contient une boule centrée en* a*.*

Lemme III.1.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *L'application* $f\colon X \to Y$ *est continue en* a *si et seulement si pour toute suite* (x_n) *de* X *qui converge vers* a*, la suite* $(f(x_n))$ *de* Y *converge vers* $f(a)$*.*

Démonstration. Supposons f continue en a. Soit $\epsilon > 0$, et soit η associé à ϵ comme dans la définition III.1.1. Soit (x_n) une suite de X qui converge vers a. Alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, a) \leq \eta$. On a donc $\delta(f(x_n), f(a)) < \epsilon$. Ceci montre que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Pour la réciproque, démontrons la contraposée. Supposons que f ne soit pas continue en a. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in X$ tel que $d(x,a) < \eta$ et $\delta(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. Fixons un tel ϵ. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe x_n tel que $d(x_n, a) < 1/n$ et $\delta(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. On obtient ainsi une suite (x_n) de X qui converge vers a alors que la suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. □

Exercice 32. *Continuité de la composée.* Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ deux applications entre espaces métriques telles que f est continue en $a \in X$ et g est continue en $f(a)$. Montrer que la composée $g \circ f$ est continue en a.

Correction →

Définition III.1.3. *Soit* $A \subset X$ *une partie de* X*. On dit que* $f\colon X \to Y$ *est* ***continue sur*** A *si* f *est continue en tout point de* A*. Si* $A = X$*, on dit simplement que* f *est continue.*

Exercice 33. Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application continue surjective et A une partie dense de X. Montrer que $f(A)$ est dense dans Y.

Correction →

Proposition III.1.4. *Soient* (X,d) *et* (Y,δ) *deux espaces métriques. et* $f\colon X \to Y$ *une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue ;*
2. *L'image réciproque* $f^{-1}(U)$ *de tout ouvert* U *de* Y *est un ouvert de* X *;*
3. *L'image réciproque* $f^{-1}(V)$ *de tout fermé* V *de* Y *est un fermé de* X *;*

Remarque III.1.5. *L'image directe $f(U)$ d'un ouvert U de X par une application continue $f\colon X \to Y$ n'est pas nécessairement un ouvert de Y. Considérer par exemple une application constante $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'image de l'ouvert $U = \mathbb{R}$ est un singleton de $\mathbb{R}$, qui n'est pas un ouvert.*

De même, l'image directe $f(V)$ d'un fermé V de X n'est pas nécessairement un fermé de Y. Considérer par exemple l'application arctangente : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour laquelle l'image du fermé $V = \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Voir aussi l'exercice 46.

Démonstration. Montrons l'équivalence entre (1) et (2).

Supposons f continue et soit U un ouvert de Y. Soit $a \in f^{-1}(U)$. Puisque U est un ouvert, et $f(a) \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(f(a), \epsilon) \subset U$. Puisque f est continue, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \epsilon)$. Mais alors $B(a, \eta) \subset f^{-1}(U)$. Finalement, pour tout $a \in f^{-1}(U)$, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset f^{-1}(U)$, ce qui signifie que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Supposons la condition (2) satisfaite. Soit $a \in X$ et soit $\epsilon > 0$. En appliquant la condition (2) à l'ouvert $U = B(f(a), \epsilon)$, on obtient que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X. Puisque $a \in f^{-1}(U)$, il existe donc $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset f^{-1}(U)$. D'où $f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \epsilon)$. Ceci étant valable pour tout $\epsilon > 0$, on a donc démontré que f est continue.

L'équivalence entre (2) et (3) vient de ce qu'une partie d'un espace métrique est un ouvert si et seulement son complémentaire est un fermé, et du fait que pour toute application $f\colon X \to Y$ entre deux ensembles et pour toute partie A de Y, on a l'égalité $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$. □

Exercice 34. Soit $f\colon X \to \mathbb{R}$ une application d'un espace métrique (X, d) à valeurs réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est continue, alors les ensembles $\{x \in X\colon f(x) > \alpha\}$ et $\{x \in X\colon f(x) < \alpha\}$ sont des ouverts de X.
2. Démontrer que si f est continue, alors les ensembles $\{x \in X\colon f(x) \geq \alpha\}$ et $\{x \in X\colon f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in X\colon f(x) = \alpha\}$ sont des fermés de X.
3. Démontrer la réciproque de la question 1 : si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in X\colon f(x) > \alpha\}$ et $\{x \in X\colon f(x) < \alpha\}$ sont des ouverts de X, alors f est continue.
4. Montrer que si f est continue, alors pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est une réunion dénombrable de fermés (NB : une réunion dénombrable de fermés s'appelle un **$\mathbf{F}_\sigma$-ouvert**).

Correction →

Exercice 35. Soit $f\colon X \to Y$ une application entre espaces métriques.

1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?
2. Une application de X dans Y est dite **ouverte** si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; **fermée** si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.
   Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
   Montrer que f est ouverte si et seulement si $f\left(\mathring{A}\right) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}$.

Correction →

III.2 Suites uniformément convergentes et continuité

Définition III.2.1. *Soient (X,d) et (Y,δ) des espaces métriques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans Y et soit $f\colon X\to Y$ une application.*

*On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ **converge simplement** vers f si*

$$\forall x\in X,\forall\epsilon>0,\exists N_{x,\epsilon}\in\mathbb{N},\forall n\geq N_{x,\epsilon},\delta(f_n(x),f(x))<\epsilon.$$

*On dit que la suite d'applications $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f si*

$$\forall\epsilon>0,\exists N_\epsilon\in\mathbb{N},\forall n\geq N_\epsilon,\forall x\in E,\delta(f_n(x),f(x))<\epsilon.$$

L'exercice suivant montre que la continuité ne se conserve pas par convergence simple.

Exercice 36. Considérons la suite (f_n) de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par $f_n(x)=x^n$. Démontrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f qui n'est pas continue.

Correction →

En revanche, la continuité se conserve par convergence uniforme :

Théorème III.2.2. *Soit $(f_n\colon X\to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues en $a\in X$ qui converge uniformément vers une fonction $f\colon X\to Y$. Alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $\epsilon>0$. Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$ et pour tout $x\in X,\delta(f_n(x),f(x))<\epsilon$. Puisque l'application f_N est continue en a, il existe $\eta>0$ tel que $(d(x,a)<\eta\Rightarrow\delta(f_N(x),f_N(a))<\epsilon)$. On obtient donc pour tout $x\in X$ tel que $d(x,a)<\eta$,

$$\delta(f(x),f(a))\leq\delta(f(x),f_N(x))+\delta(f_N(x),f_N(a))+\delta(f_N(a),f(a))<3\epsilon.$$

□

III.3 Homéomorphismes

Définition III.3.1. *Soient (X,d) (Y,δ) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f\colon X\to Y$ est un **homéomorphisme** si les trois conditions suivantes sont réalisées :*

1. *$f\colon X\to Y$ est une bijection ;*
2. *f est continue sur X ;*
3. *la bijection réciproque $f^{-1}\colon Y\to X$ est continue sur Y.*

Exemple III.3.2. *Si $f\colon I\to\mathbb{R}$ est une fonction continue sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ strictement monotone sur cet intervalle, alors f réalise un homéomorphisme de X sur son image $Y=f(X)$. Par exemple, la fonction logarithme népérien de base e est un homéomorphisme de $]0,+\infty[$sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 37. Démontrer que dans un espace vectoriel normé, deux boules ouvertes sont toujours homéomorphes.

Correction →

Exercice 38. On considère un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$. Vérifier que $x\mapsto\dfrac{x}{1+\|x\|}$ réalise un homéomorphisme de E sur la boule unité ouverte de E. Expliciter l'homéomorphisme réciproque.

Correction →

III.4 Applications lipschitziennes et continuité uniforme

Définition III.4.1. *Soit $k > 0$ un réel. Une application $f\colon X \to Y$ entre espaces métriques est dite* **k-*lipschitzienne*** *si pour tous $x, x' \in X$,*

$$\delta(f(x'), f(x)) \leq kd(x, x').$$

Définition III.4.2. *Une application $f\colon X \to Y$ entre espaces métriques est dite **uniformément continue** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in X, (d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon).$$

Proposition III.4.3. *Une application k-lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Prendre $\eta = \frac{\epsilon}{k}$. □

Exercice 39. 1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces vectoriels normés et soit $f : X \to Y$ une application. Démontrer que f est uniformément continue sur X si et seulement si pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $d(u_n, v_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on a $\delta(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2. Démontrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction →

Exercice 40. Soit $C = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues réelles sur $[0, 1]$. On considère les deux normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ et $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ sur C.

1. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne pour les deux normes.
2. Soit c l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, muni de la norme $\|(x_n)\| = \sup_n |x_n|$. Si on désigne par $\ell(x)$ la limite de la suite $x = (x_n)$, montrer que ℓ est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. En déduire que le sous ensemble c_0 de c constitué des suites convergentes vers 0 est fermé dans c.

Correction →

III.5 Produit d'espaces vectoriels normés

Soient $(E_1, \|.\|_{E_1})$, $(E_2, \|.\|_{E_2})$, …, $(E_n, \|.\|_{E_n})$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On considère le produit cartésien

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in E_i, i = 1, \ldots, n\},$$

muni de la structure d'espace vectoriel induite par celles des E_i : la somme $x + y$ de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est définie par $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, où $x_i + y_i$ désigne la somme dans E_i et la multiplication scalaire par $\lambda \in \mathbb{K}$ est définie par $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Définition III.5.1. *La **norme produit** sur $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est définie par :*

$$\|x\|_E = \max\{\|x_i\|_{E_i} : i = 1, \ldots, n\},$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 41.

1. Montrer que $\|.\|_E$ est bien une norme sur l'espace vectoriel $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.
2. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ et soit $r > 0$. Décrire la boule ouverte $B(a, r)$.
3. Démontrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'application $p_i : x = (x_1, \ldots x_n) \in E \mapsto x_i \in E_i$ est continue.
4. Soit $(u_k)_{k \in N}$ une suite à valeurs dans E. Pour tout k, on écrit $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^n)$. Soit $l = (l_1, \ldots l_n) \in E$. Démontrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans E si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, n$, la suite $(u_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i dans E_i.
5. Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $f : y \in F \mapsto f(y) = (f_1(y), \ldots f_n(y)) \in E$ une application. Démontrer que f est continue si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'application $f_i : F \to E_i$ est continue.

Correction →

Proposition III.5.2. *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On munit $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ de la norme produit, où la norme sur $\mathbb{K}$ est la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou le module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). La somme $S\colon E \times E \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication scalaire $M\colon \mathbb{K} \times E \to E$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ sont des applications continues.*

Démonstration. Pour tous (x, y) et (x', y') dans $E \times E$, on a :

$$\|S(x', y') - S(x, y)\| = \|(x' + y') - (x + y)\| \leq \|x' - x\| + \|y' - y\| \leq 2\,\|(x', y') - (x, y)\|_{E\times E}\,.$$

On en déduit que S est uniformément continue sur $E \times E$.

Fixons $x_0 \in E$ et $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Soit $\epsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\| < \eta$ implique $\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < \epsilon$.

Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, on a :

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda x + \lambda x_0 - \lambda x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda|\,\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\,\|x_0\|\,.$$

Si $\|(\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)\|) < \eta$, alors $\|x - x_0\| < \eta$ et $|\lambda| \leq |\lambda_0| + \eta$, donc

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| < (|\lambda_0| + \eta)\eta + \eta\,\|x_0\|\,.$$

Ce majorant tend vers 0 quand η tend vers 0. Donc il suffit de choisir $\eta > 0$ tel que $(|\lambda_0| + \eta)\eta + \eta\,\|x_0\| \leq \epsilon$. □

Exercice 42.

1. Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soient $f, g\colon E \to \mathbb{K}$ deux applications continues en $a \in E$. Démontrer que la somme $f + g\colon E \to \mathbb{K}$ et le produit $fg\colon E \to \mathbb{K}$ sont continues en a.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme et notons encore $P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ l'application polynomiale associée. Montrer que P est continue.

Correction →

Exercice 43.

1. Montrer que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

3. Plus généralement montrer que l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ (avec $0 \leq r \leq n$) est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ (considérer la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto \det(M + tI_n)$ pour $M \in M_n(\mathbb{R})$).

Correction →

Exercice 44. (Graphe d'une application continue I.)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que le graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = f(x)\}$ de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que la réciproque est vraie ? (considérer la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$)

Correction →

Exercice 45. (Graphe d'une application continue II.)
Soit $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ continue.
1) Montrer que le graphe de f est fermé dans $E \times E$ et homéomorphe à E.
2) Soit $g : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ également continue. Montrer que $\{x \in E \colon f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.

Correction →

Exercice 46. Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. Rappelons qu'une application de X dans Y est dite ouverte si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; fermée si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$ d'équation $xy = 1$).

Correction →

III.6 Applications linéaires continues

En calcul différentiel, les applications linéaires continues sont particulièrement importantes, car le calcul différentiel consiste essentiellement à approximer des applications par des applications linéaires continues.

Proposition III.6.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue sur E

(ii) f est continue en 0

(iii) f est bornée sur la boule fermée unité $B_f(0, 1)$

(iv) il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \ \|x\|$

(v) f est uniformément continue sur E

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons f continue sur E. En particulier, f est continue en 0, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq \eta$ implique $\|f(x)\| \leq 1$.

Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. Alors $\left\| \frac{\eta}{\|x\|} x \right\| \leq \eta$. Donc

$$\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{\eta} \left\| f\left(\frac{\eta}{\|x\|} x \right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\eta} \leq \frac{1}{\eta}.$$

Donc f est bornée par $\frac{1}{\eta}$ sur la boule unité.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons que f soit bornée par M sur la boule fermée unité $B_f(0,1)$. Alors pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq M \|x\|.$$

(iv) $\Rightarrow$ (v) Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \ \|x\|$. Alors pour tous $x, y \in E$,

$$\|f(y) - f(x)\| = \|f(y-x)\| \leq M \|y - x\|,$$

ce qui signifie que f est lipschitzienne, donc uniformément continue (Proposition III.4.3).

Enfin, (v) $\Rightarrow$ (i) est évident. □

Proposition III.6.2. *La quantité*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

définit une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

De plus, on a :

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

En particulier

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E.$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ cet espace vectoriel normé.

Démonstration. L'homogénéité est immédiate.

$\|f\| = 0$ équivaut à $\|f(x)\|_F = 0$ pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$. Donc $f(x) = 0$ pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$. Soit $y \in E \setminus \{0\}$; par linéarité de f, on a $f(y) = \|y\| f(\frac{y}{\|y\|}) = 0$ puisque $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 1$.

Enfin, montrons l'inégalité triangulaire. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$,

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| + \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

$\|f\| + \|g\|$ est donc un majorant de $\{\|f(x) + g(x)\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$. En passant au sup sur $\|x\| \leq 1$ à gauche, on obtient $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Ceci montre que $\|f\|$ définit bien une norme.

De plus, pour tout y tel que $\|y\|_E \leq 1$, on a

$$\|f(y)\|_F = \|y\|_E \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|_E} \right) \right\|_F \leq \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|_E} \right) \right\|_F.$$

Donc
$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$
De plus, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,
$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|,$$
donc
$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$
□

Proposition III.6.3. *Soient E, F et G trois e.v.n. et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$, et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \ \|f\|$.*

Démonstration. $g \circ f$ est linéaire et continue comme composée d'applications linéaires et continues. Donc on a bien $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors
$$\|(g \circ f)(x)\|_G = \|g(f(x))\|_G \leq \|g\| \, \|f(x)\|_F \leq \|g\| \, \|f\| \, \|x\|_E .$$
En divisant par $\|x\|_E$, on obtient $\|g \circ f\| \leq \|g\| \ \|f\|$. □

Remarque III.6.4. *Il existe des applications linéaires non continues. Par exemple, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Fixons x_0 dans l'intervalle $[0,1]$, et considérons l'application*
$$L : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
définie par :
$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \quad L(f) = f(x_0)$$
Alors l'application L n'est pas continue si l'on munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_1$ (Démonstration : voir DCC1).

En revanche, lorsque l'espace de départ est de dimension finie, linéaire implique continue :

Proposition III.6.5. *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel normé quelconque est continue.*

Démonstration. Soit $f\colon E \to F$ linéaire. On suppose que E est de dimension finie n. Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que f est continue en 0.

Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où $x_i \in \mathbb{K}$. Munissons E de la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (rappelons que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes). On a donc :
$$\|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|f(e_i)\|_F \leq M \sum_{i=1}^n |x_i|,$$
où $M = \max_i \|f(e_i)\|_F$.

Donc $\|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$, qui implique la continuité de f en 0. □

Exercice 47. Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E \ .$$

Montrer que f est linéaire continue.

Correction →

Exercice 48. Soient $E_1, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés et soit $\phi : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire. Démontrer l'équivalence des assertions suivantes.

(i) ϕ est continue sur le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$

(ii) ϕ est continue en 0

(iii) ϕ est bornée sur le produit des boules unité des E_i

(iv) il existe $C \geq 0$ tel que $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\|\phi(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C \, \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$$

Correction →

Exercice 49.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$.
   Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ représentée dans la base canonique par la matrice $(a \ b)$. Déterminer $||\phi||$.
2. Même question pour la norme $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.

Correction →

III.7 Correction des exercices

. Exercice 32

Soit (x_n) une suite de X qui converge vers a. On veut montrer que la suite $((g \circ f)(x_n))$ converge vers $g(f(a))$.

Puisque f est continue en a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Posons $y_n = f(x_n)$. Puisque la suite (y_n) converge vers $f(a)$ et puisque g est continue en $f(a)$, alors la suite $(g(y_n))$ converge vers $g(f(a))$. Or $g(y_n) = g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n)$. Donc nous avons bien démontré que la suite $((g \circ f)(x_n))$ converge vers $g(f(a))$.

Retour texte → □

. Exercice 33

Soit $b \in Y$. Puisque f est surjective, il existe $a \in X$ tel que $b = f(a)$. Puisque A est dense dans X, il existe une suite (a_n) de A qui converge vers a. Puisque f est continue, la suite $(f(a_n))$ est une suite de $f(A)$ qui converge vers $f(a) = b$. Ceci montre que $f(A)$ est dense dans Y.

Retour texte → □

. Exercice 34

1) $\{x \in X\colon f(x) > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$. Or $]\alpha, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f est continue, donc $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est un ouvert de X.

De même, $\{x \in X\colon f(x) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ est un ouvert de X car f est continue et $]-\infty, \alpha[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) $\{x \in X\colon f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, +\infty[)$. Or $[\alpha, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et f est continue, donc $f^{-1}([\alpha, +\infty[)$ est un fermé de X.

De même, $\{x \in X\colon f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ est un fermé de X car f est continue et $]-\infty, \alpha]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

3) Tout d'abord, tout intervalle ouvert $]a, b[$, $(a < b)$ peut s'écrire

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[.$$

Donc

$$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]-\infty, b[) \cap f^{-1}(]a, +\infty[)$$

est une intersection de deux ouverts donc un ouvert de X. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, alors O peut s'écrire comme l'union dénombrables d'intervalles ouverts :

$$O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[.$$

Donc

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(]a_i, b_i[)$$

est une union d'ouverts donc un ouvert de X .

4) Nous le faisons d'abord pour un intervalle ouvert $]a, b[$.

$$]a, b[= \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}\right].$$

Donc

$$f^{-1}(]a, b[) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}\left(\left[a + \frac{1}{j}, b - \frac{1}{j}\right]\right),$$

est une union dénombrable de fermés. Maintenant, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ s'écrit $O = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$, avec I dénombrable. Donc on peut écrire

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} f^{-1}\left(\left[a_i + \frac{1}{j}, b_i - \frac{1}{j}\right]\right),$$

qui est une union dénombrable de fermés (mais c'est un ouvert !).

Retour texte → □

. Exercice 35

1) $\Rightarrow$. Supposons que f soit continue. Soit $A \subset X$ et soit $y \in f(\bar{A})$. Il existe $x \in \bar{A}$ tel que $y = f(x)$. Soit (x_n) une suite de A qui converge vers x. Alors $y_n = f(x_n) \in f(A)$. Comme f est continue alors (y_n) converge vers $f(x) = y$. Donc y est adhérent à $f(A)$. Conclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$. Supposons que pour toute partie A de X, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Soit F un fermé de Y. Nous allons montrer que $f^{-1}(F)$ est un fermé de X. Notons $A = f^{-1}(F)$. Alors $f(A) \subset F$ donc l'inclusion $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ implique $f(\bar{A}) \subset \bar{F} = F$ (puisque F est fermé). Donc $\bar{A} \subset f^{-1}(F) = A$.

Donc $\bar{A} \subset A$, d'où $\bar{A} = A$. Donc $A = f^{-1}(F)$ est fermé. Finalement, l'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X, ce qui est équivalent à la continuité de f par la proposition III.1.4.

Application : si A est dense, alors $\bar{A} = X$, et sous les hypothèses précédentes alors $f(A)$ est dense dans l'image de X par f : en effet $\overline{f(A)}$ contient $f(\bar{A}) = f(X)$. On retrouve ainsi le résultat d'un l'exercice précédent.

2) $\Rightarrow$. Supposons f fermé et soit $A \subset X$. Alors $A \subset \bar{A}$ donc $f(A) \subset f(\bar{A})$, donc comme $\bar{A}$ est un fermé et f est fermée alors $f(\bar{A})$ est un fermé contenant $f(A)$. Mais comme $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ alors $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

$\Leftarrow$. Réciproquement, supposons $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ pour toute partie A de X. Cette inclusion pour un fermé $A = F$ de X donne $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$. Donc $\overline{f(F)} = f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. Donc l'application f est fermée.

Le raisonnement pour f ouverte est similaire et laissé aux soins de la lectrice ou du lecteur.

Retour texte → □

. Exercice 36

Fixons $x \in [0,1[$. La suite (x^n) converge vers 0. D'autre part, la suite (1^n) est constante égale à 1, donc sa limite est 1. Donc la suite (f_n) converge simplement vers fa fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et par $f(1) = 1$. Cette limite f n'est pas continue en 1.

Retour texte → □

. Exercice 37

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectorial normé. Considérons deux boules $B(a,r)$ et $B(b,r')$ dans E

Pour tout $x_0 \in E$, la translation $T_{x_0} \colon E \to E$ définie par $T_{x_0}(x) = x + x_0$ est un homéomorphisme d'inverse T_{-x_0}. En effet, on a pour tout $x \in E$, $(T_{x_0} \circ T_{-x_0})(x) = x - x_0 + x_0 = x$, donc $T_{x_0} \circ T_{-x_0} = Id_E$, et de même, $T_{-x_0} \circ T_{x_0} = Id_E$. Donc T_{x_0} est bijective. De plus, pour tout $x, y \in E$,

$$\|T_{x_0}(x) - T_{x_0}(y)\| = \|x + x_0 - y - x_0\| = \|x - y\|.$$

Donc T_{x_0} est continue sur E (et même, uniformément continue).

De plus, T_{x_0} envoie la boule $B(0,r)$ sur $B(x_0,r)$. Donc T_{-a} est un homéomophisme de $B(a,r)$ sur $B(0,r)$ et T_b est un homéomoprhisme de $B(0,r')$ sur $B(b,r')$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie $H_k \colon E \to E$ de rapport k définie par $H_k(x) = kx$ est un homéomorphisme d'inverse $H_{\frac{1}{k}}$. L'inverse est évident. La continuité vient de ce que pour tout $x, y \in E$,

$$\|H_k(x) - H_k(y)\| = \|kx - ky\| = |k| \, \|x - y\|.$$

De plus, H_k envoie la boule $B(0,r)$ sur la boule $B(0,kr)$. Posons $k = \frac{r'}{r}$. Alors H_k est un homéomorphisme de la boule $B(0,r)$ sur la boule $B(0,r')$.

Donc finalement $f = T_b \circ H_{\frac{r'}{r}} \circ T_{-a}$ est un homéomorphisme de E sur lui-même qui envoie $B(a,r)$ sur $B(b,r')$.

Retour texte → □

. Exercice 38

Notons f l'application $x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

L'application f est continue comme composée d'applications continues. De plus, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$, et de plus, $f(0) = 0$. Donc f est à valeurs dans la boule ouverte unité $B(0,1)$ de E.

Soit $y \in B(0,1)$ tel que $y = f(x)$, c'est-à-dire $y = \frac{x}{1+\|x\|}$. Puisque x et $y = f(x)$ sont colinéaires avec facteur $\frac{1}{1+\|x\|}$ positif, alors il existe $k \geq 0$ tel que $y = kx$. On a $\|y\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}$, qui équivaut à $\|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|}$. On en déduit k est unique et donné par $k = \frac{1}{1-\|y\|}$. Donc f est bijective de bijection réciproque $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$. Cette application est continue comme composée de fonctions continues. Donc f est un homéeomorphisme d'inverse f^{-1}.

Retour texte → □

. Exercice 39

1) $\Rightarrow$. Supposons que f soit uniformément continue sur X. Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X vérifiant $d(u_n, v_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur X, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d(x, x') < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Puisque $d(u_n, v_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, d(u_n, v_n) < \eta$. Mais alors d'après l'implication précédente, $\forall n \geq N, \delta(f(u_n), f(v_n)) < \epsilon$.

Finalement, on a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \delta(f(u_n), f(v_n)) < \epsilon$, c'est-à-dire que $\delta(f(u_n), f(v_n)) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$\Leftarrow$. On va démontrer la contraposée. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur X. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, x' \in E$ tels que $d(x, x') < \eta$ et $\delta(f(x), f(x')) \geq \epsilon$. Fixons un tel ϵ. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir deux éléments u_n et v_n de X tels que $d(u_n, v_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon$. On obtient ainsi deux suites (u_n) et (v_n) de X telles que $d(u_n, v_n) \to 0$ alors que $\delta(f(u_n), f(v_n))$ ne converge pas vers 0.

2) Montrons que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Posons $u_n = n$ et $v_n = n+\frac{1}{n}$. Alors $|u_n - v_n| = \frac{1}{n}$ converge vers 0, mais $|f(u_n) - f(v_n)| = |(n+\frac{1}{n})^2 - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2$. Donc $x \ \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 1).

Retour texte → □

. Exercice 40

1) Soit F l'application définie par $F(f) = \int_0^1 |f|$. Alors

$$\begin{aligned}|F(f) - F(g)| = \left|\int_0^1 (|f(x)| - |g(x)|)\, dx\right| &\leq \int_0^1 ||f(x)| - |g(x)||\, dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \|f - g\|_1 \leq \|f - g\|_\infty .\end{aligned}$$

Donc pour les deux normes, F est lipschitzienne de rapport 1.

2) Soit $\epsilon > 0$ et soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux suites de c telles que $\|x - y\| \leq \epsilon$. Alors pour tout n, on a $|x_n - y_n| \leq \epsilon$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $|l(x) - l(y)| \leq \epsilon$. On a donc prouvé que si $\|x - y\| < \epsilon$ alors $|\ell(x) - \ell(y)| \leq \epsilon$. Donc ℓ est uniformément continue.

Donc $c_0 = \ell^{-1}(\{0\})$ est un fermé, car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ℓ.

Retour texte → □

. Exercice 41

1) Montrons l'inégalité triangulaire. Les autres axiomes sont immédiats. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $E_1 \times \cdots \times E_n$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$\|x_i + y_i\|_{E_i} \leq \|x_i\|_{E_i} + \|y_i\|_{E_i}.$$

Donc

$$\|x_i + y_i\|_{E_i} \leq \max_i \|x_i\|_{E_i} + \max_i \|y_i\|_{E_i}.$$

En passant au maximum dans le membre de gauche, on obtient donc

$$\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E.$$

2) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(a, r)$ équivaut à $\forall i = 1, \ldots, n, \|x_i - a_i\|_{E_i} \leq r$. Donc

$$B(a, r) = B_{E_1}(a_1, r) \times B_{E_2}(a_2, r) \times \ldots \times B_{E_n}(a_n, r)$$

.

3) Fixons $i = 1, \ldots, n$. Soit (x_k) une suite de E qui converge vers a dans E, où pour tout k, $x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$. On a $\|p_i(x_k) - p_i(a)\|_{E_i} = \|x_k^i - a_i\|_{E_i} \leq \|x_k - a\|_E \to 0$. Donc la suite $(p_i(x_k))_k$ converge vers $p_i(a)$, ce qui montre que l'application $p_i : x = (x_1, \ldots x_n) \in E \mapsto x_i \in E_i$ est continue en a, et ce pour tout $a \in E$.

4) Soit $(u_k)_{k \in N}$ une suite à valeurs dans E. Pour tout k, on écrit $u_k = (u_k^1, \ldots, u_k^n)$. Soit $l = (l_1, \ldots l_n) \in E$.

Supposons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans E. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\|u_k^i - l_i\|_{E_i} \leq \|u_k - l\|_E \to 0$. Donc la suite $(u_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i dans E_i.

Réciproquement, supposons que pour tout $i = 1, \ldots, n$, la suite $(u_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l_i dans E_i. Fixons $\epsilon > 0$. Alors pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_i$, $\|(u_k^i) - l_i\|_{E_i} \leq \epsilon$. Posons $N = \max_i N_i$. Alors pour tout $k \geq N$,

$$\|u_k - l\|_E = \max_i \left\|u_k^i - l_i\right\|_{E_i} \leq \epsilon.$$

Ceci montre que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l dans E.

5) Si f est continue, alors pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f_i = p_i \circ f$ est continue puisque p_i est continue d'après la question 2.

Réciproquement, supposons que pour tout $i = 1, \ldots, n$, f_i soit continue. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l dans F. Alors pour tout i, la suite $(f_i(u_k))_k$ converge vers $f_i(l)$ dans E_i. Donc d'après la question 4, ceci équivaut à dire que la suite $(f(u_k))$ converge vers $f(l) = (f_1(l), \ldots, f_n(l))$ dans E. Donc f est continue en l et ce pour tout $l \in F$.

Retour texte → □

. Exercice 42

1) Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers a. Puisque f et g sont continues en a, alors $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$ et $(g(x_n))_n$ tend vers $g(a)$.

Donc $\|(f + g)(x_n) - (f + g)(a)\| \leq \|f(x_n) - f(a)\| + \|g(x_n) - g(a)\| \to 0$. Donc la suite $((f + g)(x_n))_n$ converge vers $(f + g)(a)$. Donc $f + g$ est continue en a.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|(fg)(x_n) - (fg)(a)\| &= \|f(x_n)g(x_n) - f(x_n)g(a) + f(x_n)g(a) - f(a)g(a)\| \\ &\leq |f(x_n)| \|g(x_n) - g(a)\| + |g(a)| \|f(x_n) - f(a)\|,\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

2) Il suffit de le montrer pour un monôme. On conclut alors pour un polynôme en utilisant la continuité de $f+g$ et une récurrence finie.

D'après la question précédente, le produit de deux fonctions continues est continu. Donc par une récurrence finie, on montre aisément qu'un produit fini de fonction continues est lui-même continu. Posons $P(x_1,\dots,x_n)=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. On a $P(x_1,\dots,x_n)=ap_1(x)^{k_1}\dots p_n(x)^{k_n}$ où les p_i désignent les projections introduites à l'exercice 41. Or l'application constante $x\mapsto a$ et est continue ainsi que les applications projections p_i. Donc P est continu (cf exercice 41).

Retour texte → □

. Exercice 43

1) Identifions $M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{n^2}$. Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice. Donc d'après l'exercice 42, l'application det est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.

2) $GL_n(\mathbb{K})=\det^{-1}(\mathbb{K}\smallsetminus\{0\})$. Or $\mathbb{K}\smallsetminus\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ et det est continue, donc $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

3) Une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est de rang $\geq r$ si et seulement l'une des sous-matrices de M de taille $r\times r$ a un déterminant non nul. Soient A et B deux sous-ensembles de cardinal r de $\{1,\dots,n\}$. Notons $\det_{AB}\colon M_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ l'application qui à M associe le déterminant de la sous-matrice de M constituée des lignes d'indice A et des colonnes d'indice B. L'application $\det_{AB}$ est une fonction continue par les mêmes arguments qu'à la question 1). Alors une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ est de rang $\geq r$ si et seulement si M appartient à la réunion des $\det_{AB}^{-1}(\mathbb{K}\smallsetminus\{0\})$, qui sont tous des ouverts puisque les $\det_{AB}$ sont continues et puisque $\mathbb{K}\smallsetminus\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{K}$. Donc l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

4) $\det(M+tI_n)=0$ si et seulement si $-t$ est une valeur propre de M. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ les valeurs propres non nulles de M et posons $\eta=\min\{|\lambda_i|\colon i=1,\dots,s\}$. Alors pour tout $t\in\mathbb{R}$ tel que $0<|t|<\eta$, on a $\det(M+tI_n)\neq 0$. Soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N}<\eta$. Alors la suite $(M+\frac{1}{k}I_n)_{k\geq N}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M. Ceci montre que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Retour texte → □

. Exercice 44

1) Soit $(x_n,f(x_n))_n$ une suite de $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y=f(x)\}$ qui converge dans $\mathbb{R}^2$ et soit (x,y) sa limite. Puisque f est continue, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite, on obtient $y=f(x)$ et donc $(x,y)=(x,f(x))$ appartient à Γ_f. Ceci montre que Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2) La fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ n'est pas continue en $\{0\}$. Nous allons démontrer que Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $((x_n,\frac{1}{x_n}))_n$ une suite de Γ_f qui converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (x,y).

Si $x\neq 0$, posons $\eta=|x|$. Alors $I=]x-\eta,x+\eta[$ est un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ et f est continue sur I. Donc $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. Par unicité de la limite, $y=f(x)$ et $(x,y)=(x,f(x))\in\Gamma_f$.

Si $x=0$, alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0, x_n=0$. En effet, supposons le contraire, alors $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ dans $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$. Puisque $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers 0 alors $y_{\phi(n)}=\frac{1}{x_{\phi(n)}}$ diverge, ce qui contredit le fait que $(y_n)_n$ converge vers y. Pour tout $n\geq n_0$, on a donc $y_n=f(x_n)=f(0)=0$. Donc la limite de $(y_n)_n$ est $y=0$. Finalement $(x,y)=(0,0)\in\Gamma_f$.

Ceci montre que Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Retour texte → □

. Exercice 45

Soit $f:(E,\|.\|_E)\to(F,\|.\|_F)$ continue.

1) Le graphe Γ_f de f est fermé dans $E\times E$ par les mêmes arguments que dans l'exercice précédent.

Montrons que Γ_f est homéomorphe à E. Considérons la projection $p_1\colon E\times E\to E$ définie par $(x,y)=x$. Notons $\phi=p_1|_{|\Gamma_f}$ la restriction de p_1 à Γ_f. Puisque p_1 est continue (voir l'exercice 41), la restriction ϕ est continue. On a $\phi(\Gamma_f)=E$ et ϕ est injective par définition de Γ_f. Donc ϕ est bijective. La bijection réciproque $\phi^{-1}\colon E\to\Gamma_f$ est définie par $\phi^{-1}(x)=(x,f(x))$. Puisque les deux composantes $x\mapsto x$ et $x\mapsto f(x)$ sont continues, alors ϕ^{-1} est continue d'après la question 5 de l'exercice 41.

2) Soit $g:(E,\|.\|_E)\to(F,\|.\|_F)$ continue. Montrons que $A=\{x\in E\colon f(x)=g(x)\}$ est fermé dans E. Soit $(x_n)_n$ une suite de A qui converge vers x. Puisque f et g sont continues, $(f(x_n))_n$ et $(g(x_n))_n$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$. Puisque pour tout n, $f(x_n)=g(x_n)$, alors par unicité de la limite, $f(x)=g(x)$. Donc $x\in A$. Ceci montre que A est un fermé de E.

Retour texte → □

. Exercice 46

1) Soit P un polynôme, et soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $P(F)$. Notons $y\in\mathbb{R}$ sa limite. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, existe $x_n\in F$ tel que $y_n=P(x_n)$. Comme (y_n) est bornée (car convergente) alors (x_n) aussi est bornée ; en effet un polynôme n'a une limite infinie qu'en $\pm\infty$. Comme (x_n) est une suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ de limite x. Comme F est fermé, $x\in F$. Comme P est continue (c'est un polynôme) alors $y_{\phi(n)}=P(x_{\phi(n)})\to P(x)$, mais $(y_{\phi(n)})$ converge aussi vers y. Par unicité de la limite $y=P(x)\in P(F)$. Donc $P(F)$ est fermé.

2) Notons $p_1\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la projection $p_1(x,y)=x$. L'hyperbole $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy=1)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (par les mêmes argument que dans l'exercice 45, mais $p_1(H)=\mathbb{R}^*$ n'est pas un fermé de $X=\mathbb{R}$.

Retour texte → □

. Exercice 47

Si f est linéaire et bornée sur la boule unité alors elle est continue.

Il reste donc à montrer que f est linéaire : on a déjà $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tout x,y reste donc à prouver $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in E$.

Pour $\lambda\in\mathbb{Z}$, c'est une récurrence, $f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x)$. Puis $f(3x)=f(2x+x)=f(2x)+f(x)=2f(x)+f(x)=3f(x)$ etc. Donc $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{N}$. De plus $0=f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$ donc $f(-x)=-f(x)$. Ensuite on a $f(-nx)=-nf(x)$ pour $n\in\mathcal{N}$. Bilan : pour tout $\lambda\in\mathbb{Z}$ on a $f(\lambda x)=\lambda f(x)$.

Pour $\lambda\in\mathbb{Q}$, soit $\lambda=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$.

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=p\,f\left(\frac{1}{q}x\right)=\frac{p}{q}q\,f\left(\frac{x}{q}\right)=\frac{p}{q}\,f\left(q\frac{x}{q}\right)=\frac{p}{q}\,f(x).$$

Nous avons utilisé intensivement le premier point.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ alors il existe une suite (λ_n) d'élément de $\mathbb{Q}$ qui converge vers λ. Fixons $x\in E$.

$$\begin{aligned}f(\lambda x)-\lambda f(x)&=f(\lambda x)-f(\lambda_n x)+f(\lambda_n x)-\lambda f(x)\\&=f(\lambda x)+f(-\lambda_n x)+f(\lambda_n x)-\lambda f(x)=f((\lambda-\lambda_n)x)+(\lambda_n-\lambda)f(x).\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le second point. Soit $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Pour n assez grand on a $\|(\lambda - \lambda_n)x\| < \epsilon$. Donc $\frac{1}{\epsilon}(\lambda - \lambda_n)x \in B(0,1)$ or f est bornée sur la boule unité donc il existe $M > 0$ tel que $f(\frac{1}{\epsilon}(\lambda - \lambda_n)x) \leq M$ (quelque soit n). Donc $f(\lambda - \lambda_n)x) \leq M\epsilon$ (ϵ est rationnel donc on peut le "sortir"). De même pour n assez grand on a $(\lambda_n - \lambda)f(x) < \epsilon$. Maintenant

$$\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\| \leq \|f((\lambda - \lambda_n)x)\| + \|(\lambda_n - \lambda)f(x)\| < M\epsilon + \epsilon.$$

Donc pour x, λ fixés, $\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|$ est aussi petit que l'on veut, donc est nul ! D'où $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Retour texte → □

. Exercice 48

On pose $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons que ϕ soit continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in E$, $\|y\| \leq \eta \Rightarrow \|\phi(y)\| \leq 1$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tel que $\|x\| = \max_i \|x_i\|_{E_i} \leq 1$. Posons $y = (\eta x_1, \ldots, \eta x_n)$. Alors $\|y\| \leq \eta$ et puisque ϕ est n-linéaire on a $\phi(y) = \eta^n \phi(x)$ et on obtient :

$$\|\phi(x)\| = \frac{1}{\eta^n} \|\phi(y)\| \leq \frac{1}{\eta^n}.$$

Donc ϕ est bornée par $\frac{1}{\eta^n}$ sur la boule unité.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons que ϕ soit bornée par M sur la boule unité, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, on ait $\|\phi(x)\| \leq M$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Si $\|x_1\| \cdots \|x_n\| = 0$ on vérifie que $\phi(x) = 0$ et sinon, puisque ϕ est n-linéaire,

$$\phi(x) = \phi\left(\|x_1\| \frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \|x_n\| \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \|x_1\| \ldots \|x_n\| \phi(y),$$

où $y = (\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x_n\|})$. Puisque $\|y\| = 1$, on a $\|\phi(y)\| \leq M$ et on obtient donc

$$\|\phi(x)\| \leq \|x_1\| \ldots \|x_n\| M.$$

Donc $M = C$ convient.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\|\phi(x)\| \leq C \|x_1\| \ldots \|x_n\|$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Montrons que ϕ est continue en a.

Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E$ on a

$$\begin{aligned}\|\phi(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - \phi(a_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n)\| &= \|\phi(h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n)\| \\ &\leq C \|h_1\| \|a_2 + h_2\| \cdots \|a_n + h_n\| \leq C \|h\| \|a + h\|^{n-1} \leq C \|h\| (\|a\| + \|h\|)^{n-1}\end{aligned}$$

En itérant et en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned}\|\phi(a + h) - \phi(a)\| &= \|\phi(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - \phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)\| \\ &\leq C \|h\| \sum_{i=1}^{n} \|a\|^{i-1} (\|a\| + \|h\|)^{n-i}.\end{aligned}$$

Comme a et n sont fixés, le membre de droite tend vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0.

Retour texte → □

. Exercice 49

1) Pour la norme $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$. Posons $M = \max\{|a|, |b|\} = |a|$.
On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{|\phi(x,y)|}{||(x,y)||_1} = \frac{|ax+by|}{|x|+|y|} \leq \frac{|ax|+|by|}{|x|+|y|} \leq M.$$

De plus, cette borne supérieure M est atteinte. Si $M = |a|$, on prend $(x,y) = (1,0)$, et on a $\frac{|\phi(1,0)|}{||(1,0)||_1} = |a|$. Si $M = |b|$ on prend $(x,y) = (0,1)$.
Donc

$$\|\phi\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \frac{|\phi(x,y)|}{||(x,y)||_1} = \max\{|a|, |b|\}.$$

2) Pour la norme $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{|\phi(x,y)|}{||(x,y)||_\infty} = \frac{|ax+by|}{\max\{|x|,|y|\}} \leq |a| + |b|.$$

De plus, cette borne supérieure $|a| + |b|$ est atteinte pour $(x,y) = (1,1)$. On en déduit :

$$\|\phi\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \frac{|\phi(x,y)|}{||(x,y)||_\infty} = |a| + |b|.$$

Retour texte → $\square$

Quatrième partie

Espaces compacts

Dans ce chapitre, les espaces considérés sont des espaces métriques. Nous allons introduire une des notions les plus fondamentales en topologie. Tout le calcul différentiel (formules de Taylor, développements limités, relations entre les variations de la fonction et le signe de sa dérivée, etc) est basée sur la compacité.

Tout d'abord, pour bien comprendre la notion de compacité, soulignons qu'il est important de bien maîtriser la notion de distance induite et de topologie induite. Nous renvoyons le lecteur au chapitre précédent pour ces notions. Dans la suite, toute partie $Y \subset X$ d'un espace métrique (X, d) sera vue systématiquement comme un sous-espace de X, c'est-à-dire comme espace métrique muni de la métrique induite.

IV.1 Première définition : la propriété de Borel-Lebesgue

Définition IV.1.1. *On appelle* ***recouvrement ouvert*** *de X toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X dont X est la réunion : $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si I est un ensemble fini, on dit que le recouvrement est* ***fini****.*

Définition IV.1.2. *Soit X un espace métrique. On dit que X est* ***compact*** *s'il vérifie la propriété suivante, dite* ***propriété de Borel-Lebesgue*** *:*

De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit, de toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X dont X est la réunion, on peut extraire une famille finie $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ dont la réunion est encore X.

Exemple IV.1.3. *Un espace métrique ayant un nombre fini déléments est compact. Par exemple, $\mathbb{Z} \cap [-2019, 2019]$ est un sous-espace compact de $(\mathbb{R}, |.|)$.*

Proposition IV.1.4. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La propriété de Borel-Lebesgue ;*
2. *De toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X dont l'intersection est vide, on peut extraire une famille finie $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ dont l'intersection est vide.*

Démonstration. L'équivalence s'obtient directement par passage au complémentaire, un fermé étant par définition le complémentaire d'un ouvert. □

Corollaire IV.1.5. *Soit X un espace métrique compact. Toute suite de fermés $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ non vides décroissante pour l'inclusion, i.e., telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$, admet une intersection non vide ;*

Démonstration. Supposons que $(F_i)_{i\in I}$ soit une suite de fermés non vides, décroissante pour l'inclusion. Si l'intersection des F_i est vide, alors d'après la proposition IV.1.4, on peut extraire une famille finie $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ dont l'intersection est vide. Comme la suite est décroissante, cela signifie que F_{i_n} est vide, ce qui contredit l'hypothèse. □

À titre de premier exemple, voici un résultat important :

Théorème IV.1.6 (Théorème de Borel-Lebesgue)**.** *Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$. Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\ |)$, l'intervalle $[a, b]$ est compact.*

Démonstration. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $[a,b]$. Alors pour tout $i \in I$, il existe un ouvert U_i de $\mathbb{R}$ tel que $O_i = U_i \cap [a,b]$ (topologie induite). Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points x de $[a,b]$ tels que l'intervalle $[a,x]$ soit recouvrable par un nombre fini de U_i.

La partie $\mathcal{C}$ n'est pas vide car elle contient a. En effet, l'intervalle $[a,a]$ est égal au singleton $\{a\}$ qui est recouvert par n'importe quel ouvert U_i qui contient a (il en existe au moins 1). De plus, la partie $\mathcal{C}$ est majorée par définition. Donc $\mathcal{C}$ admet une borne supérieure. Appelons-la c. Par définition c est un point de $[a,b]$. Il existe donc un indice $j(c)$ tel que l'ouvert $U_{j(c)}$ contienne c. Comme $U_{j(c)}$ est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(c,\epsilon)$ soit incluse dans $U_{j(c)}$. Par ailleurs, c est la borne supérieure de $\mathcal{C}$, donc il existe un point d de $\mathcal{C}$ dans $]c-\epsilon, c]$. Par définition, l'intervalle $[a,d]$ est recouvrable par un nombre fini de U_i, et par construction $]d, c+\epsilon[$ est inclus dans $U_{j(c)}$. Donc $c = b$ sinon on obtiendrait une contradiction sur le fait que c est la borne supérieure de $\mathcal{C}$. □

Exercice 50. Soit E un ensemble muni de la métrique discrète : $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.

1) Quelles sont ses parties compactes (c'est-à-dire ses sous-espaces compacts) ?
2) Quelles sont ses parties fermées et bornées ?

Correction →

IV.2 Propriétés élémentaires des espaces compacts

Une partie A d'un espace métrique (X,d) est **bornée** s'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que A soit contenue dans la boule $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.

Proposition IV.2.1. *Un compact $K \subset X$ est fermé et borné.*

Démonstration. Les boules $B(x,1)$ où $x \in K$ forment un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, on peut en extraire un recouvrement fini. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les centres de ces boules. K est inclus dans la boule de centre x_1 et de rayon $\max\{d(x_1,x_i) + 2 : i = 2, \ldots, n\}$. Donc K est borné.

Pour montrer que K est fermé, on montre que $X \setminus K$ est ouvert. Soit x dans $X \setminus K$. Pour chaque y dans K, $d(x,y) > 0$. Choisissons $r_y > 0$ tel que $r_y < d(x,y)$. Alors $x \notin B(y,r_y)$. Les intersections $B(y,r_y) \cap K$ où $y \in K$ forment un recouvrement ouvert de K (pour la métrique induite, c.f. Exercice 22). On en extrait un sous-recouvrement fini $K \cap B(y_1, r_{y_1}), \ldots, B(y_n, r_{y_n})$. Posons $\epsilon = \min(d(x,y_i) - r_{y_i})$. Alors la boule $B(x,\epsilon)$ a une intersection vide avec chacune des boules $B(y_i, r_{y_i})$, donc a fortiori ne rencontre pas K. Cela montre que $B(x,\epsilon)$ est dans $X \setminus K$. Donc $X \setminus K$ est bien un ouvert de X. □

Proposition IV.2.2. *Un fermé dans un compact est compact.*

Démonstration. Soit F un fermé inclus dans un compact K. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de F d'intersection vide. Chaque F_i s'écrit donc $F_i = \mathcal{F}_i \cap F$ où $\mathcal{F}_i$ est un fermé de K (c.f. Exercice 22). $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est donc une famille de fermés de K d'intersection vide. On peut en extraire une sous-famille finie d'intersection vide dans K (cf Proposition IV.1.4). En intersectant avec F, on obtient une sous famille de $(F_i)_{i\in I}$ d'intersection vide. □

Proposition IV.2.3. *Les compacts de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les fermés bornés.*

Démonstration. Un compact est fermé et borné (Proposition IV.2.1). Réciproquement, un fermé borné est un fermé contenu dans un intervalle $[-M,M]$. Or $[-M,M]$ est compact (Théorème IV.1.6). Donc K est un fermé dans un compact, donc K est compact (Proposition IV.2.2). □

Remarque IV.2.4. *Nous verrons plus loin que cette proposition s'étend aux espaces vectoriels normés de dimension finie, mais est fausse en général en dimension infinie.*

Proposition IV.2.5. *Une intersection (quelconque) de compacts est encore un compact.*

Démonstration. C'est une intersection de fermés, donc elle est fermée, dans un compact, donc compacte. □

IV.3 Deuxième définition : la propriété de Bolzano–Weirstrass

Le résultat suivant donne une autre définition de la notion d'espace compact :

Théorème IV.3.1. *Soit X un espace métrique.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *X est compact*
2. *Toute suite de points de X possède une valeur d'adhérence dans X. (**Propriété de Bolzano-Weirstrass**)*

Démonstration. Supposons que X soit compact et prenons une suite (x_n) de X. L'espace X est la réunion de toutes ses boules ouvertes de rayon 1. Puisque X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $y_1, \ldots, y_k$ dans X tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B(y_k, 1).$$

Au moins l'une des boules $B(y_i, 1)$, par exemple $B(y_1, 1)$ contient une infinité de termes de la suite. Notons K_1 l'adhérence de $B(y_1, 1)$, c'est-à-dire la boule fermée $B_f(y_1, 1)$. Par définition elle contient une infinité de termes de la suite. Notons que K_1 est un compact, comme fermé dans un compact. On réitère le processus avec K_1 au lieu de X et des boules de rayon inférieur à $\frac{1}{2}$ centrées en les points de K_1. On choisit alors une boule fermée K_2 de rayon $\frac{1}{2}$ de K_1 qui contient une infinité de termes de la suite.

On recommence sur K_2 en prenant des boules de rayons $< \frac{1}{4}$ dans K_2.

On obtient ainsi une suite de compacts non vides (donc de fermés) emboités $\ldots K_{i+1} \subset K_i \subset \ldots \subset K_2 \subset K_1 \subset K$. L'intersection de ces fermés est non vide d'après la Proposition , et cette intersection contient au plus un point car les K_i sont inclus dans des boules de rayon 2^{-i+1} de X. Notons x ce point. Pour $\epsilon > 0$, la boule $B(x, \epsilon)$ contient tous les K_i dont l'indice i est tel que $2^{-i+2} < \epsilon$. Elle contient donc une infinité de termes de la suite, donc x est une valeur d'adhérence de la suite.

Réciproquement, supposons que de toute suite on puisse extraire une valeur d'adhérence. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Montrons tout d'abord qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_{i(x)}$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour tout $r > 0$, il existe $y \in X$ tel que pour tout $i \in I, B(y, r) \not\subset U_i$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que pour tout $i \in I$, $B(x_n, 2^{-n}) \not\subset U_i$. Par hypothèse, la suite (x_n) admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge dans X. Soit x sa limite et soit $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. On a $\lim_{n \to \infty} d(x_{\phi(n)}, x) + 2^{-\phi(n)} = 0$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\phi(N)}, x) + 2^{-\phi(N)} \leq \epsilon$. Mais alors $B(x_{\phi(n)}, 2^{-\phi(n)}) \subset U_{i_0}$. Contradiction.

On peut donc fixer $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_{i(x)}$. Montrons maintenant qu'il existe un ensemble fini de points de X, $p_1, \ldots, p_m$ tel que $X = \bigcup_{j=1}^{m} B(p_j, r)$.

Supposons le contraire. Alors ceci implique l'existence d'une suite $(x_n)_n$ telle que pour tout $n \in N$ et pour tout $j \geq n$, $d(x_{n+1}, x_j) \geq r$. Donc la suite $(x_n)_n$ n'a aucune valeur d'adhérence, ce qui contredit l'hypothèse.

Fixons donc $p_1, \ldots, p_m$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^m B(p_j, r)$. Par définition de r, pour chaque p_j, il existe un ouvert U_{i_j} tel que $B(p_j, r) \subset U_{i_j}$, ce qui montre que $X = \bigcup_{j=1}^m U_{i_j}$

Donc X est compact. □

De ce théorème, on déduit deux résultats importants :

Corollaire IV.3.2. *Une suite à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration. Soit (x_n) soit une suite convergente. Alors sa limite est une valeur d'adhérence. De plus, cette valeur d'adhérence est unique. En effet, supposons le contraire, alors (x_n) possède une valeur d'adhérence y telle que $y \neq x$. Soit $r > 0$ tel que $r < d(x, y)$. Puisque (x_n) converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x, x_n) \leq r$. Mais alors, la boule $B(y, r')$ où $r' = d(x, y) - r$ ne contient aucun terme de la suite, donc y ne peut pas être une valeur d'adhérence de la suite. (Remarquons que l'on n'a pas utilisé l'hypothèse K compact dans cette partie).

Réciproquement, supposons que (x_n) admette une unique valeur d'adhérence x. Supposons que (x_n) ne converge pas vers x. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $d(x, x_n) \geq \epsilon$. Donc il existe une infinité de termes de la suite en dehors de la boule $B(x, \epsilon)$, qui forment un sous-suite de (x_n). La compacité de K permet alors d'extraire de cette sous-suite une suite $x_{\phi(n)}$ qui admet une valeur d'adhérence y. Celle-ci ne peut être égale à x puisque tous les termes de $x_{\phi(n)}$ sont en dehors de la boule $B(x, \epsilon)$. Donc la suite (x_n) admet deux valeurs d'adhérence distintes x et y, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi (x_n) converge vers x.

□

Exercice 51. Dans un espace métrique (X, d), montrer que l'ensemble formé des termes d'une suite convergente et de sa limite est un ensemble compact.

Correction →

Exercice 52.

1. Soit K une partie compacte incluse dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$: $K \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in K$ on ait $y \geq r$,
   a. en utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass,
   b. en considérant les parties $\{(x, y) \in K \ / \ y > t\}$.
2. La propriété reste-t-elle vraie si l'on suppose uniquement K fermé ?

Correction →

Exercice 53. Soit E un espace métrique et soient A et B deux parties de E. On définit

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \ /x \in A, y \in B\}.$$

1. Montrer que si A et B sont disjointes et compactes alors $d(A, B) > 0$.
2. Montrer que cela reste vrai si on suppose seulement que A est compacte et B fermée.
3. Montrer que cela est faux si on suppose seulement A et B fermées.

Correction →

Exercice 54. Soit X un espace métrique.

1. Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de X et soit (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \in F_n$ pour tout entier n. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\geq 0} F_n.$$
2. Donner un exemple d'une suite (F_n) décroissante de fermés non vides d'un espace métrique X telle que $\bigcap\limits_{n\geq 0} F_n = \emptyset$.
3. Soit (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Montrer que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide et que si Ω est un ouvert contenant K, il contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Correction →

Exercice 55. Soit E est un espace vectoriel normé. Si A et B sont deux parties de E on note $A + B$ l'ensemble $\{a + b \ / a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que si A est fermée et B est compacte alors $A + B$ est fermée.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}$ dont la somme n'est pas fermée.

Correction →

Exercice 56. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$. Notons
$$F = \{\lambda x \ / \ \lambda \in \mathbb{R}^+, x \in K\}.$$
Montrer que F est fermé.

Correction →

IV.4 Espaces compacts et applications continues

Théorème IV.4.1. *Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Soit $K \subset X$ un compact. Alors $f(K)$ est un compact.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite à valeurs dans $f(K)$. Pour chaque n il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque K est compact, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $x \in K$. Soit $(x_{\phi(n)})$ une suite extraite qui converge vers x. Par continuité de f, la suite $(y_{\phi(n)})$ converge vers $y = f(x) \in f(K)$. Ceci montre que $f(K)$ est compact. □

Remarque IV.4.2. *En revanche, l'image réciproque d'un compact par une application continue n'a pas de raison d'être un compact. Ainsi, si $X = Y = \mathbb{R}$ et si $f(x) = \sin(x)$, l'image réciproque du compact $[-1, 1]$ est $\mathbb{R}$ tout entier qui n'est pas compact puisque non borné.*

Ce théorème permet de montrer facilement qu'une bijection est un homéomorphisme :

Proposition IV.4.3. *Si $f\colon K \to Y$ est une bijection continue sur un compact K, alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que f^{-1} est continue. Cela signifie que l'image directe de tout fermé de K est un fermé de Y. Or un fermé de K est un compact donc son image est compacte donc fermée. □

Proposition IV.4.4. *Soit K un compact et soit $f\colon K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(K)$ est bornée et f atteint ses bornes.*

Démonstration. L'image $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc un fermé borné. Cela signifie que f est bornée. Si $a = \sup\{f(x), x \in K\}$, alors il existe une suite (y_n) de $f(K)$ qui converge vers a. Donc a est dans l'adhérence de $f(K)$ qui est un fermé. Donc $a \in f(K)$, et il existe $x \in K$ tel que $a = f(x)$. On procède de même pour la borne inférieure. □

Corollaire IV.4.5. *Si $f\colon K \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, alors il existe $\epsilon > 0$ telle que pour tout $x \in K$, $f(x) \geq \epsilon > 0$.*

Démonstration. f est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 dans K tel que $\forall x \in K, f(x) \geq f(x_0)$.

Comme $f(x_0) > 0$, on peut poser $\epsilon = f(x_0)$. Il satisfait la double inégalité voulue. □

Exercice 57. Soient K et F des parties (non vides) d'un espace métrique (X, d). On suppose que K est un compact et que F est un fermé de X. On suppose de plus que $F \cap K$ est vide. Démontrer qu'il existe $d > 0$ tel que pour tout x dans K et pour tout y dans F, $d(x, y) \geq d > 0$.

Correction →

Exercice 58. (Le lemme d'Urysohn)

Soit K un compact dans un espace métrique (X, d) et soit U un ouvert qui contient K. Alors il existe une application continue ϕ de X dans $[0, 1]$ qui vaut 0 sur $X \setminus U$ et 1 sur K.

Correction →

IV.5 Compacts et continuité uniforme

Définition IV.5.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) des espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est **uniformément continue** sur X si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \eta$, on ait $\delta(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Théorème IV.5.2 (Théorème de Heine)**.** *Soit $f\colon K \to Y$ une application continue d'un compact K vers un espace métrique Y. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La continuité permet de trouver pour chaque x de K un réel ρ_x tel que

$$y \in B(x, \rho_x) \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon/2.$$

Cela donne un recouvrement de K par les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{2}\rho_x)$. On en extrait un sous-recouvrement fini $B(x_1, \frac{1}{2}\rho_{x_1}), \ldots, ...B(x_n, \frac{1}{2}\rho_{x_n})$ et on pose

$$\rho = \frac{1}{2}\min\{\rho_{x_i}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Si x et y vérifient $d(x, y) < \rho$, alors x est dans une boule $B(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i})$ et donc y est aussi dans la boule $B(x_i, \rho_{x_i})$. Ainsi

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \delta(f(x), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(y)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

□

IV.6 Compacité dans les espaces vectoriels normés

IV.6.1 Compacité ou non compacité des boules unités

On considère un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$. Dans $\mathbb{R}$, nous avons vu que les compacts sont les fermés bornés. On se demande donc si la boule unité fermée de E est compacte.

Théorème IV.6.1. *Dans $\mathbb{R}^k$ la boule unité fermée pour la norme $\|.\|_\infty$ est compacte.*

Rappelons que la norme $\|.\|_\infty$ est définie par :

$$\|x_1, \dots, x_k\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Démonstration. Soit (x_n) une suite de la boule unité. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$ où le réel x_n^i est dans $[-1, +1]$. Puisque $[-1, +1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, la suite (x_n^1) admet une sous-suite $(x_{\phi_1(n)}^1)_n$ qui converge dans $[-1, 1]$ vers une limite x_1. Considérons la suite $(x_{\phi_1(n)})$. On peut alors en extraire une suite $(x_{\phi_2(n)})_n$ telle que la suite $(x_{\phi_2(n)}^2)_n$ converge dans $[-1, 1]$ vers une limite x_2. Par récurrence finie, on construit ainsi une suite $(x_{\phi(n)})_n$ extraite de (x_n) telle que pour tout $i = 1, \dots, k$, la suite $(x_{\phi(n)}^k)_n$ admet une limite $x_k \in [-1, 1]$. Ceci signifie que la suite $(x_{\phi(n)})_n$ converge vers $x = (x_1, \dots, x_k)$, qui appartient à la boule unité de $\mathbb{R}^k$ pour la norme $\|.\|_\infty$. □

Remarque IV.6.2. *En revanche, on peut démontrer que en dimension infinie la boule unité fermée n'est pas compacte.*

IV.6.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème IV.6.3. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Choisissons une base e_1,..., e_n de E et munissons E de la norme N_∞ définie par : pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, N_\infty(x) = \max_i |x_i|$. Alors on démontre sans peine que l'application $\theta\colon (E, N_\infty) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty$ définie par $\theta(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = (x_1, \dots, x_n))$ est un homéomorphisme.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes. Nous allons montrer qu'elles sont toutes équivalentes à la norme $\|.\|_1$.

On rappelle que $\|.\|_\infty \leq \|.\|_1 \leq n \|.\|_\infty$, ce qui signifie que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes. Comme la boule unité fermée est compacte pour $\|.\|_\infty$, elle l'est donc aussi pour $\|.\|_1$.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour montrer que les normes $\|.\|_1$ et N sont équivalentes, montrons que $Id : (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$ est un homéomorphisme. Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = \max_i N(e_i)$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a :

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq A. \|x\|_1$$

Ainsi l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$ est continue.

Montrons maintenant que $Id : (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ est continue. Puisque Id est linéaire, il suffit de montrer que $Id : (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ est bornée sur la boule unité.

On a $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq A \|x - y\|_1$. Ceci prouve que l'application N est continue de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Comme la sphère $S(0, 1)$ est fermée dans la boule fermée unité pour la norme $\|.\|_1$, elle est compacte (pour la topologie induite par $\|.\|_1$). L'application N est donc bornée sur $S(0,1)$ et atteint ses bornes. Il existe alors $a \geq 0$ tel que pour tout x dans $S(0,1)$, $N(x) \geq a$. On ne peut pas avoir $a = 0$. En effet, si tel était le cas, il existerait x dans $S(0,1)$ vérifiant $N(x) = a = 0$. Or, N est une norme, et $N(x) = 0$ entraine $x = 0 \notin S(0,1)$.

On a donc trouvé $a > 0$ tel que $x \in S(0,1)$ implique $N(x) \geq a$, c'est-à-dire par contraposée, $N(x) < a$ implique $\|x\|_1 < 1$. Et donc $N(x) < 1$ implique $\|x\|_1 < \frac{1}{a}$, donc $Id : (\mathbb{R}^n, N) \to (\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$ est bornée sur la boule unité.

Finalement, nous avons démontré que

$$Id : (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$$

est un homéomorphisme. □

On obtient donc un meilleur résultat que le Théorème IV.6.1 :

Corollaire IV.6.4. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute boule fermée est compacte.*

Démonstration. Puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, et puisque de la première partie de la démonstration précédente, on sait que (E, N_∞) est homéomorphe à $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$, il suffit de montrer le résultat pour $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$. Or on sait que la boule fermée unité est un compact, et que toute les boules sont deux à deux homéomorphes. Donc toute boule fermée est un compact. □

On obtient également le corollaire suivant :

Corollaire IV.6.5. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.*

Démonstration. On sait déjà que dans un espace métrique, tout compact est un fermé borné.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et soit F un fermé borné. Puisque F est borné, il est inclus dans une boule fermée $B_f(0,R)$, qui est compacte d'après le résultat précédent. Puisque F est fermé dans le compact $B_f(0,R)$, alors F est un compact. □

Exercice 59. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ M\,{}^tM = I_n\}$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$, où ${}^tM$ désigne la matrice transposée.

Correction →

IV.7 Correction des exercices

. Exercice 50

1) Remarquons tout d'abord que tout singleton est un ouvert. En effet, pour tout $x \in E$, $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset \{x\}$, donc $\{x\}$ est un ouvert. Soit K un compact de E. Alors l'ensemble des singletons $\{x\}$ où $x \in K$ forme un recouvrement par des ouverts de K. Puisque K est compact, on peut en extraire un recouvrement fini de K, ce qui implique que K est une partie finie de E.

Réciproquement, tout espace métrique fini est un compact.

Donc les parties compactes de E sont les parties finies.

2) E est borné puisqu'il est égal à sa boule $B(x,2)$, où $x \in E$ est un point quelconque. Donc toute partie de E est aussi bornée. Et de plus, puisque les singletons sont des ouverts, alors toute partie de E est un ouvert, car union de singletons (autrement dit la topologie de E est la

topologie discrète, cf Définition II.8.4). Par passage au complémentaire, on en déduit que toute partie de E est un fermé.

Donc les fermés bornés de E sont toutes les parties de E.

Retour texte → $\square$

. Exercice 51

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de (X,d) et soit l sa limite. On pose $A = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{l\}$. Montrons que A est compact. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A qui recouvre A. On doit montrer que l'on peut en extraire un recouvrement fini. Pour chaque $i \in I$, on a $O_i = U_i \cap A$ où U_i est un ouvert de X (topologie induite). Soit $i_0 \in I$ tel que $l \in O_{i_0}$. Puisque U_{i_0} est un ouvert de X, il existe $r > 0$ tel que $B(l,r) \subset U_{i_0}$. Puisque (x_n) converge vers l, il existe $N \in N$ tel que pour tout $n \geq N, d(x_n, l) < r$. Donc pour tout $n \geq N, x_n \in O_{i_0}$.

Pour chaque $k = 1, \ldots, N-1$, fixons $i_k \in I$ tel que $x_{i_k} \in O_{i_k}$. On obtient

$$A = O_{i_0} \cup \bigcup_{k=1}^{N-1} O_{i_k},$$

qui est un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i\in I}$.

Donc A est compact.

Retour texte → $\square$

. Exercice 52

1) Soit K une partie compacte incluse dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$: $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in K$ on ait $y \geq r$

i) En utilisant la propriété de Bolzano-Weierstrass.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'un tel r n'existe pas. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in K$ tel que $y_n < \frac{1}{n}$. Puisque (x_n, y_n) est un suite de K qui est compact, (x_n, y_n) admet un suite extraite qui converge dans K. Soit (x,y) sa limite. Pour tout n, on a $0 < y_n < \frac{1}{n}$. On obtient $y = 0$ par passage à la limite. Donc $(x, 0) \in K$, ce qui contredit $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$.

ii) En considérant les parties $\{(x,y) \in K \ / \ y > t\}$.

Pour $t > 0$, on pose $O_t = \{(x,y) \in K \ / \ y > t\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc $U_t = O_t \cap K$ est un ouvert de K. Puisque $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$, tout point (x,y) de K appartient à $O_{|y|}$, donc la famille $(O_t)_{t>0}$ forme un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, on peut en extraire un recouvrement fini, et puisque pour tout $t < t'$, on a $O_{t'} \subset O_t$, on en déduit qu'il existe t_0 tel que $K \subset O_{t_0}$. Posons $r = t_0$. On a alors $K \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq r\}$.

2) La propriété reste-t-elle vraie si l'on suppose uniquement K fermé ?

La réponse est non : prenez par exemple le fermé $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq \frac{1}{x}\}$.

Retour texte → $\square$

. Exercice 53

1) Il existe une suite $((x_n, y_n))$ de $A \times B$ telle que $\lim d(x_n, y_n) = d(A, B)$. Puisque A est compacte, (x_n) admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans A vers un certain x. On a alors $d(x, x_{\phi(n)}) \to 0$ et $d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) \to d(A, B)$. Comme

$$d(x, y_{\phi(n)}) \leq d(x, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}),$$

si $d(A,B)=0$ alors $y_{\phi(n)}$ converge vers x, et comme B est fermée, $x \in B$. Donc $x \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.

2) Il suffit de remarquer que dans la démonstration précédente, on n'a pas utilisé le fait que B est compacte, mais seulement le fait que B est fermée.

3) Posons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = e^x\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = -e^x\}$. On a $d(A,B)=0$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = (-n, e^{-n}) \in A$ et $y_n = (-n, -e^{-n}) \in B$, et $d(x_n, y_n) = |2e^{-n}| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Retour texte → □

. Exercice 54

1) Soit (x_n) une suite convergente de X telle que $x_n \in F_n$ pour tout entier n et soit l sa limite. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $k \geq n$, on a $x_k \subset F_k \subset F_n$, donc $(x_k)_{k \geq n}$ est une suite de F_n qui converge vers l dans X. Puisque F_n est fermé, on en déduit $l \in F_n$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que l est dans l'intersection des F_n, qui est donc non vide.

2) Dans $X = \mathbb{R}$, considérer la suite de fermés $F_n = [n, +\infty[$.

3) Fixons un (x_n) dans chaque K_n. Puisque la suite de compacts est décroissante, la suite (x_n) est une suite de K_0. Puisque K_0 est compact, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans K_0. Soit l sa limite. Alors $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\phi(n)}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq \phi(n_0)$, et on a alors $K_{\phi(n_0)} \subset K_k$. Donc $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\phi(n)} \subset K_{\phi(n_0)} \subset K_k$. Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit $l \in K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$. Donc $K \neq \emptyset$.

Soit Ω un ouvert contenant K. Montrons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, K_n \subset \Omega$.

Supposons le contraire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que $K_n \not\subset \Omega$, i.e., $K_n \cap \Omega^c = \emptyset$. On peut alors construire par récurrence une suite $(x_n)_n$ et une fonction croissante $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \subset K_{\phi(n)} \subset \Omega^c$.

Puisque $(x_n)_n$ est une suite de $K_{\phi(0)}$, (x_n) admet une sous-suite $x_{\psi(n)}$ qui converge dans $K_{\phi(0)}$. Soit l sa limite. Puisque $x_{\psi(n)}$ est une suite du fermé Ω^c, on a $l \in \Omega^c$.

Par ailleurs, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{\psi(n)} \in K_{\phi(\psi(n))}$, on peut appliquer 1), et on obtient $l \in \bigcap K_{\phi(\psi(n))}$. Puisque le suite (K_n) est décroissante, ceci implique $l \in K$, et donc $l \in \Omega$. Contradiction.

Retour texte → □

. Exercice 55

1) Soit $(z_n) = (a_n + b_n)$ une suite de $A+B$ qui converge dans E. Soit l sa limite. La suite $(b_n) = (z_n - a_n)$ est un suite du compact B, donc elle admet une sous-suite $b_{\phi(n)}$ qui converge dans B. Soit $b \in B$ sa limite. Alors la suite $(a_{\phi(n)}) = (z_{\phi(n)}) - b_{\phi(n)}))$ est une suite qui converge vers $a = l - b$, et comme A est fermé, $a \in A$. Donc finalement, $l = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Donc $l \in A + B$.

2) Considérons $A = \mathbb{N}^*$ et $B = \{-n + \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\}$. A et B sont des fermés car leurs complémentaires sont des unions d'intervalles ouverts. La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $A+B$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers 0. Mais $0 \notin A + B$. Donc $A+B$ n'est pas un fermé.

Retour texte → □

. Exercice 56

Soit $(z_n) = (\lambda_n x_n)$ une suite de F qui converge dans E vers une limite l. Montrons que $l \in F$. Puisque K est compact, la suite (x_n) de K admet une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge

dans K. Soit x sa limite. Puisque $0 \notin K$, on a $x \neq 0$ et pour tout n, $x_n \neq 0$. Puisque $\lambda_n \geq 0$, alors pour tout n, on a :
$$\lambda_{\phi(n)} = \frac{|\lambda_{\phi(n)}| \left\|x_{\phi(n)}\right\|}{\left\|x_{\phi(n)}\right\|} = \frac{\left\|z_{\phi(n)}\right\|}{\left\|x_{\phi(n)}\right\|}.$$
Donc la suite $(\lambda_{\phi(n)})$ converge vers $\lambda = \frac{l}{x} \in \mathbb{R}^+$. Finalement, on obtient $l = \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $x \in K$, d'où $l \in F$.

Retour texte → □

. Exercice 57

Pour x dans K on pose $f(x) := \inf\{d(x, y) \colon y \in F\}$. Montrons que f est bien définie et est continue à valeurs dans $]0, +\infty[$.

L'ensemble $\{d(x, y) \colon y \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne inférieure. Ceci définit $f(x)$. Par définition de la distance, $f(x)$ est ≥ 0. Si $f(x) = 0$, alors la définition de la borne inférieure permet de trouver une suite (y_n) à valeurs dans F telle que la limite de $d(x, y_n)$ soit 0. Ceci entraine que x est dans $\overline{F} = F$ et dans K. Cela contredit l'hypothèse $F \cap K = \emptyset$.

Il reste à montrer que f est continue. Soient x et x' dans K, et soit y dans F. L'inégalité triangulaire donne
$$f(x) \leq d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y).$$
Ceci est vrai pour tout y donc on obtient $f(x) \leq d(x, x') + f(x')$, ce qui s'écrit aussi $f(x) - f(x') \leq d(x, x')$. En échangeant les rôles de x et x', on obtient $|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$, ce qui montre que f est continue. On applique alors le Corollaire IV.4.5.

Retour texte → □

. Exercice 58

On pose $F = X \setminus U$; c'est un fermé. La fonction $f \colon X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, F)$ est continue et vaut 0 sur F. Sur K, f est continue et donc bornée et atteint ses bornes. Soit δ le minimum de f sur K ; on pose $\phi(x) = \min(1, \frac{1}{\delta} f(x))$.

Retour texte → □

. Exercice 59

Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, pour montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ M^t M = I_n\}$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné (Corollaire IV.6.5).

$O_n(\mathbb{R}) = \{f^{-1}(\{I_n\})\}$ où f est l'application $f \colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M\,{}^tM$. Or f est continue puisque ses applications composantes (coefficients de la matrice image) sont continues en les coefficients de la matrice M. Or le singleton $\{I_n\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$ (identifié avec $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de l'une des norme usuelles). Donc $O_n(\mathbb{R}) = \{f^{-1}(\{I_n\})\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, l'égalité $M\,{}^tM = I_n$ donne sur les termes de la diagonale : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$.

Donc pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $|a_{ij}|^2 \leq 1$, donc
$$\max\{|a_{ij}| \colon 1 \leq i, j \leq n\} \leq 1,$$
ce qui montre que $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans la boule unité pour la norme infinie de $M_n(\mathbb{R})$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

Finalement, $O_n(\mathbb{R})$ est fermé borné et donc compacte puisque $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

Cinquième partie

Espaces complets

V.1 Suites de Cauchy

Définition V.1.1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (X,d) est dite* ***de Cauchy*** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ t.q.\ \forall m,n \in \mathbb{N},\ (m \geq N \ et\ n \geq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \epsilon).$$

Proposition V.1.2. *1. Toute suite convergente est de Cauchy ;*

2. Toute suite de Cauchy est bornée ;

3. Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration. 1) Soit (x_n) une suite convergente et soit x sa limite. Montrons que (x_n) est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour tous $m,n \geq N$

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x) + d(x,x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Donc (x_n) est de Cauchy.

2) Soit (x_n) une suite de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n,m \geq N$, $d(x_m,x_n) < 1$. Alors pour tout $n \geq N$, $d(x_N,x_n) < 1$. Posons

$$r = \max(1, d(x_1,x_N), \ldots, d(x_{N-1},x_N)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_N,r)$, ce qui signifie que (x_n) est bornée.

3) Soit (x_n) une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence x. Soit $(x_{\phi(n)})$ une suite extraite qui converge vers x. Soit $\epsilon > 0$ et soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1, d(x_{\phi(n)},x) < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n,m \geq N_2, d(x_n,x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Posons $N = \max(N_1,N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $\phi(n) \geq n$, donc

$$d(x,x_n) \leq d(x,x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)},x_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Donc la suite (x_n) converge vers x. □

V.2 Espaces métriques complets

Vérifier le critère de Cauchy pour une suite (x_n) signifie que tous les termes s'agglutinent à partir d'un certain rang. On espère alors qu'ils s'accumuleront autour d'une limite :

Définition V.2.1. *Un espace métrique (X,d) est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Exemple V.2.2 (Exemples d'espaces métriques complets)**.**

1. *Un espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes est complet. En conséquence, $\mathbb{R}$, et plus généralement $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont complets.*
2. *Tout produit fini d'espaces complets, muni de la distance produit, est complet.*
3. *Tout fermé d'un espace complet, muni de la distance induite, est complet.*

Exercice 60. Démontrer les trois affirmations des exemples V.2.2

Correction →

Exercice 61. Démontrer que tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.

Correction →

Proposition V.2.3. *Soient (X, d) un espace métrique et soit K un compact de X. Alors l'espace métrique (K, d) est complet (même si X ne l'est pas).*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de K. Elle admet au moins une valeur d'adhérence par la propriété de Bolzano-Weierstrass et au plus une car elle est de Cauchy. Donc elle converge par le Corollaire IV.3.2. □

V.3 Espaces de Banach

Définition V.3.1. *Un* ***espace de Banach*** *est un espace vectoriel normé complet.*

Exercice 62. Soit E un espace vectoriel et soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Démontrer que $(E, \|.\|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|.\|_2)$ est un espace de Banach.

Correction →

Proposition V.3.2. $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty)$. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon. \qquad (1)$$

Fixons $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus. Pour x fixé dans $[0,1]$, on a donc $\forall m, n \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. La suite numérique $(f_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est complet, elle converge dans $\mathbb{R}$. Notons $f(x)$ sa limite. On a donc une suite (f_n) d'applications continues qui converge simplement vers une application $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité (1), on obtient donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \qquad (2)$$

ce qui signifie que f_n converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$ (ce qui équivaut à la convergence uniforme).

Il reste à montrer que f est continue sur $[0,1]$. Soit $x_0 \in [0,1]$ et soient ϵ et N comme ci-dessus. On a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|,$$

Or $|f(x) - f_N(x)| < \epsilon$ et $|f(x_0) - f_N(x_0)| < \epsilon$. De plus, f_N est continue en x_0, donc il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon$. Finalement, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - f(x_0)| < 3\epsilon$. Ce qui signifie que f est continue en x_0 et ce pour tout $x_0 \in [0,1]$.

□

Remarque V.3.3. *On a constaté au passage que la convergence d'une suite de fonctions pour la norme infinie équivaut à la convergence uniforme, et on a démontré que la limite uniforme d'une suite de fonction continue est elle-même continue. La norme infinie est appelée aussi* ***norme de la convergence uniforme****.*

Exercice 63. Démontrer que $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach

Indication. Utiliser la suite de fonctions (f_n) définie pour $n \geq 3$ par :
$f_n(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,
$f_n(x) = n(x - \frac{1}{2})$ si $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$,
$f_n(x) = 1$ si $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1$,

Correction →

Exercice 64. Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty .$$

1) Montrer que N définit une norme sur E.
2) Démontrer que (E,N) est un espace de Banach.

Correction →

Proposition V.3.4. *L'espace vectoriel $l^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées muni de la norme*

$$\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

est un espace de Banach.

Démonstration. Soit $u_p = (u_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \|u_p - u_q\|_\infty < \epsilon.$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $(u_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet, donc elle converge. Notons $u(n) \in \mathbb{R}$ sa limite. On définit ainsi une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Puisque $(u_p)_p$ est de Cauchy, elle est bornée. Soit $M \geq 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|u_p\|_\infty \leq M$. On a donc pour tout n,

$$|u_p(n)| \leq \|u_p\|_\infty \leq M.$$

Par passage à la limite $p \to \infty$, ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u(n)| \leq M$. Donc la suite $u = (u(n))_n$ est bornée.

Montrons que $(u_p)_p$ converge vers u dans $l^\infty(\mathbb{R})$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|u(n) - u_p(n)| = \lim_{q\to\infty} |u_q(n) - u_p(n)|$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, on peut prendre $N \in \mathbb{N}$ comme dans (1), et alors pour tous $p,q \geq N$,

$$|u_q(n) - u_p(n)| < \epsilon$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient que pour tout $p \geq N$, $|u_p(n) - u(n)| < \epsilon$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\|u_p - u\|_\infty < \epsilon$.

□

V.4 Espaces de Banach et séries

Proposition V.4.1. *Soit $(E, ||.||)$ un espace de Banach et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente (c'est-à-dire $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||$, alors elle est convergente, et*

$$||\sum_{n=0}^{\infty} u_n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||u_n||$$

Démonstration. Considérons les suites de sommes partielles $(S_n)_n \subset E$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $(S'_n) \subset \mathbb{R}$ où $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, on a :

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| = S'_{n+p} - S'_n.$$

Puisque la série est absolument convergente, alors la suite des sommes partielles (S'_n) converge, donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Donc l'inégalité ci-dessus implique que (S_n) est de Cauchy dans E. Puisque E est complet, (S_n) converge dans E, ce qui signifie que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. De plus, en appliquant l'inégalité ci-dessous à $n = 0$ puis en passant à la limite $p \to \infty$, on obtient l'inégalité souhaitée entre les sommes des deux séries. □

Application : l'exponentielle de matrice

Considérons l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ muni d'une norme matricielle $\|.\|$ sous-multiplicative (c'est-à-dire vérifiant $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$), par exemple (Proposition III.6.2) en posant $\|A\| = \sup\{\|Ax\| / \|x\|\,,\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0\}$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

donc

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

d'où

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leq \|A\| \|B\| .$$

Puisque $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, c'est un espace de Banach. De plus, on a pour tout N :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq e^{\|A\|}.$$

Ceci montre que la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente. En appliquant la Proposition V.4.1, on obtient que la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans E.

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition V.4.2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On définit l'exponentielle e^A de la matrice A par :*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

V.5 Espaces de Banach et applications linéaires continues

Théorème V.5.1. *Soit E un espace vectoriel normé et soit F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Cas particulier. Pour tout espace vectoriel normé E, $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $p, q \geq N$, on a :

$$\|f_p - f_q\| < \epsilon$$

Fixons provisoirement $x \in E$. Alors, on a :

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p - f_q\| \, \|x\| \leq \|x\| \, \epsilon.$$

Ceci prouve que la suite $(f_p(x))$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc cette suite est convergente. On note $f(x)$ sa limite.

Par passage à la limite dans

$$f_n(\lambda x + \mu y) = \lambda f_n(x) + \mu f_n(y),$$

on obtient que la fonction limite f est linéaire.

De plus, la suite (f_n) étant de Cauchy, elle est majorée, disons par M. Alors pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|f_n(x)\| \leq M \, \|x\| \, .$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient

$$\|f(x)\| \leq M \, \|x\| \, ,$$

donc f est continue en 0, et donc continue (puisque c'est une application linéaire). Par conséquent $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Il reste à prouver la convergence de (f_n) vers f dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout x dans E et pour tout $p, q \geq N$, on a

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|x\| \, \epsilon.$$

On fait tendre p vers $+\infty$: pour $q \geq N$, on a donc :

$$\|f(x) - f_q(x)\| \leq \|x\| \, \epsilon,$$

d'où

$$\|f - f_q\| \leq \epsilon.$$

La suite (f_n) converge vers f donc l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. □

V.6 Le théorème du point fixe

Définition V.6.1. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f \colon X \to Y$ est dite **contractante** si f est lipschitzienne de rapport $k < 1$, c'est-à-dire s'il existe un réel $k < 1$ tel que pour tous x et $y \in X$,*

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k \; d(x, y)$$

Définition V.6.2. *Soit E un ensemble et soit $f : E \longrightarrow E$ une application de E dans lui-même. On dit que $x \in E$ est un* ***point fixe*** *de f si $f(x) = x$.*

Théorème V.6.3. *[Théorème du point fixe]*

Une application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède un point fixe unique.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $f\colon X \to X$ une application contractante de rapport k. Choisissons un point x_0 dans X et considérons la suite (x_n) définie par récurrence par : pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Alors on montre aisément par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$.

Mais alors pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m < n$, on a :

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq k^m d(x_0, x_1) + k^{m+1} d(x_0, x_1) + \ldots + k^{n-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq k^m d(x_0, x_1)(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-m+1}) \\
&\leq k^m d(x_0, x_1) \frac{1}{1-k}
\end{aligned}
$$

Puisque $0 \leq k < 1$, la quantité k^m tend vers 0 indépendamment de n, ce qui montre que la suite (x_n) est de Cauchy. Puisque X est complet, (x_n) converge. Notons x sa limite.

Par passage à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$, et puisque f est continue, on a $f(x) = x$. Donc x est un point fixe de f. Ceci démontre l'existence d'un point fixe.

Supposons que y soit aussi un point fixe de f. Alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ avec $k < 1$, donc $d(x, y) = 0$, ce qui montre que $x = y$. D'où l'unicité du point fixe. □

Application. On cherche à déterminer les fonctions continues de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation :

$$
(E) \qquad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\, dt.
$$

Par une adaptation immédiate de la Proposition V.3.2, l'espace $E = \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

Considérons l'application $\Phi\colon E \to E$ définie par :

$$
\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \Phi(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt
$$

Pour tous $f, g \in E$ et pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$
|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left| \int_0^x (f(t) - g(t))\, dt \right| \leq \|f - g\|_\infty \int_0^x dt \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty
$$

en passant au sup sur $[0, \frac{1}{2}]$ à gauche, on obtient

$$
\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty .
$$

Donc Φ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$. Le théorème du point fixe garantit donc l'existence et l'unicité d'un point fixe $f \in E$ pour E. Or $\Phi(f) = f$ équivaut à l'équation (E). Donc (E) admet une solution unique.

Par ailleurs, la fonction $f(x) = e^x$ est solution évidente de (E). C'est donc l'unique solution de (E).

Exercice 65. Soit $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue, soit $\phi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et soit λ un nombre réel. Démontrer que si λ est suffisamment petit (on précisera ce que cela signifie), alors l'équation fonctionnelle d'inconnue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\ f(t)\ dt\ +\ \phi(x)$$

admet une solution unique dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Correction →

Exercice 66. Déterminer les fonctions continues bornées de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \ (f(x))^2 = 1 + |f(x+1)|\,.$$

Correction →

Exercice 67. (Théorème de Cantor)

Si A est une partie non vide d'un espace métrique E, on appelle **diamètre** de A et on note $\mathrm{diam}(A)$ la borne supérieure des distances $d(x,y)$ où x et y sont des points de A (voir aussi l'exercice 16).

Démontrer qu'un espace métrique (E,d) est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de E décroissante ($i.e.$ $\forall n, F_{n+1} \subset F_n$) telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$, l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Correction →

Exercice 68. (Théorème de prolongement)

Soit (E,d) un espace métrique et soit (F,δ) un espace métrique complet. Soit A une partie dense de E et soit $g : A \longrightarrow F$ une application uniformément continue. Démontrer que g se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{g} : E \longrightarrow F$ et que $\tilde{g}$ est uniformément continue.

Correction →

Exercice 69.
1. Soit l^1 l'espace vectoriel des suites $u = (u_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ telles que la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Pour tout u dans l^1, on pose $||u||_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Démontrer que $(l^1, ||.||_1)$ est un espace de Banach.
2. Soit $\mathcal{C}_0$ le sous-espace vectoriel de l^1 des suites de réels dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini. On restreint la norme $||.||_1$ à $\mathcal{C}_0$. Démontrer que $(\mathcal{C}_0, ||.||_1)$ n'est pas complet.
3. Démontrer que $\mathcal{C}_0$ est dense dans l^1.

Correction →

Exercice 70. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = l$. Démontrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Correction →

V.7 Correction des exercices

. Exercice 60

1. Soit (X, d) un espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Alors (x_n) est bornée. Soit $B_f(a, r)$ une boule fermée qui contient tous les termes de (x_n). Puisque $B_f(a, r)$ est compacte, (x_n) admet une sous-suite extraite qui une valeur d'adhérence x dans $B_f(a, r)$. Puisque (x_n) est une suite de Cauchy, alors elle converge vers cette valeur d'adhérence.
2. Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_r, d_r)$ des espaces complets. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $X_1 \times \ldots \times X_n$. Pour tout n, on écrit $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^r)$. Puisque (x_n) est de Cauchy pour la distance produit, alors pour tout $i = 1, \ldots, r$, (x_n^i) est de Cauchy dans (X_i, d_i) qui est complet. Donc (x_n^i) converge pour tout $i = 1, \ldots, r$. Par conséquent (x_n) converge.
3. Tout fermé d'un espace complet X, muni de la distance induite, est complet. En effet, soit F un fermé d'un espace complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans F. Alors c'est une suite de Cauchy dans X qui est complet, donc (x_n) converge dans X, et donc dans F puisque F est fermé.

Retour texte → □

. Exercice 61

Soit A un sous espace complet d'un espace métrique (X, d). Soit (x_n) une suite de A qui converge dans X vers x. Montrons que $x \in A$.

Puisque (x_n) converge dans X, alors elle est de Cauchy pour la distance de X, donc elle est de Cauchy dans A pour la distance induite. Mais A est complet, donc (x_n) converge dans A vers une limite y, qui est aussi limite dans X (par définition de la distance induite). Par unicité de la limite, on a $y = x$. Donc $x \in A$.

Retour texte → □

. Exercice 62

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ deux réels tels que pour tout $x \in E$,

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

Supposons que $(E, \|.\|_1)$ soit complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_2)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N, \|x_n - x_m\|_2 < \frac{1}{\alpha}\epsilon$, et donc $\|x_n - x_m\|_1$. Donc (x_n) une suite de Cauchy dans $(E, \|.\|_1)$, qui est complet. Donc (x_n) converge dans $(E, \|.\|_1)$. Notons x sa limite. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, \|x_n - x\|_1 < \beta\epsilon$, et donc $\|x_n - x\|_2 < \epsilon$. Donc (x_n) converge vers x dans $(E, \|.\|_2)$. Ceci montre que $(E, \|.\|_2)$ est complet.

Retour texte → □

. Exercice 63

On va montrer que la suite de fonctions (f_n) est de Cauchy mais ne converge pas pour la norme $\|.\|_1$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \geq 3$ tel que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Mais alors pour tous $m, n \geq 3$ avec $m, n \geq N$, on a :

$$\|f_n - f_m\|_1 = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2N} \leq \epsilon.$$

Donc (f_n) est de Cauchy.

Supposons que (f_n) converge vers une fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ pour la norme $\|.\|_1$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $a > 0$ et un intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset]0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $|f(x)| > a$. Mais alors pour tout n,

$$\|f_n - f\|_1 \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f_n(x) - f(x)| = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(x)| \geq 2a\eta,$$

ce qui contredit le fait que $\|f_n - f\|_1$ a pour limite 0.

Donc on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[$. Par le même argument, on démontre que $f(x) = 1$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Mais alors ceci contredit la continuité de f en $\frac{1}{2}$.

Conclusion : la suite (f_n) ne converge pas dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_1)$.

Retour texte → □

. Exercice 64

1) L'homogénéité et l'inégalité triangulaires sont immédiates.

Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$, i.e., $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$. Alors en particulier, $\|f\|_\infty = 0$, ce qui implique $f = 0$.

2) Soit (f_n) une suite de Cauchy de (E, N). Alors (f_n) est aussi une suite de Cauchy de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, qui est complet. Donc la suite (f_n) converge vers une fonction f continue pour la norme $\|.\|_\infty$.

De même, la suite (f_n') est une suite de Cauchy du même espace. Elle converge donc vers une fonction g continue. Ainsi, la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f et la suite (f_n') converge uniformément sur $[0,1]$ vers g. On en déduit que f est de classe C^1 (théorème classique sur la convergence uniforme) et que $f' = g$. De plus, dire que $\|f_n - f\|_\infty$ et $\|f_n' - g\|_\infty$ tendent vers zéro implique que $N(f_n - f)$ tend vers 0 et donc que (f_n) converge vers f dans E. L'espace (E, N) est donc complet.

Retour texte → □

. Exercice 65

K est une application continue de $[0,1] \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Comme $[0,1] \times [0,1]$ est compact (fermé borné de $\mathbb{R}^2$), l'application continue K est borné sur $[0,1] \times [0,1]$. Posons $M = \sup\{|K(x,y)|, (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$.

Posons

$$\Psi(f) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\ f(t)\ dt\ +\ \phi(x)$$

(définie en prenant par le deuxième membre de l'équation fonctionnelle). On a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|\Psi(f)(x) - \Psi(g)(x)| \leq |\lambda| M ||f - g||_\infty,$$

donc en passant au sup à gauche,

$$||\Psi(f) - \Psi(g)||_\infty \leq |\lambda| M ||f - g||_\infty.$$

Si $|\lambda| < \frac{1}{M}$ (c'est le sens de "suffisamment petit" de l'énoncé), alors Ψ est contractante et donc, d'après le théorème du point fixe, Ψ admet un unique point fixe. Par choix de Ψ, ce point fixe est l'unique solution de l'équation fonctionnelle.

Retour texte → □

. Exercice 66

Soit $E = \mathcal{C}_b([0,+\infty[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $[0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f(x)|$. Alors $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach (c'est la même démonstration que pour $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ en un peu plus simple, car on n'a pas à démontrer que la limite est continue, mais seulement bornée).

Soit $\Phi\colon E \to E$ l'application définie par : $\Phi(f)(x) = \sqrt{1+|f(x+1)|}$.

Si $f \in E$, on a bien $\Phi(f) \in E$. En particulier,

$$\sup_x |\Phi(f)(x)| = \sqrt{1+\sup_x |f(x)|} < +\infty.$$

Montrons que Φ est une contraction. Pour tous $f, g \in E$ et $x \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| &= \left|\sqrt{1+|f(x+1)|} - \sqrt{1+|g(x+1)|}\right| \\ &= \frac{|1+|f(x+1)|-1-|g(x+1)||}{\sqrt{1+|f(x+1)|}+\sqrt{1+|g(x+1)|}}.\end{aligned}$$

Le dénominateur étant minoré par 2, par l'inégalité triangulaire renversée on a

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \le \frac{|f(x+1)-g(x+1)|}{2}$$

et en prenant le sup sur x on obtient :

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty\,,$$

donc Φ est une contraction de rapport $\frac{1}{2}$.

On peut appliquer le théorème du point fixe : il existe un unique fonction de E solution de l'équation.

Pour déterminer cette solution, essayons une fonction constante $f(x) = c \ge 0$. f est solution si et seulement si $c^2 = 1+c$. L'unique solution positive est $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Donc finalement, l'équation admet pour unique solution dans E la fonction constante $f(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Retour texte → □

. Exercice 67

Supposons E complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E décroissante telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$. Notons $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Pour chaque n, fixons $x_n \in F_n$. Alors $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$ implique que (x_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge puisque E est complet. Soit x sa limite. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(x_n)_{n\ge k}$ est une suite du fermé F_k qui converge vers x, donc $x \in F_k$. Comme ceci est valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient donc $x \in A$.

Puisque $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$, alors $diam(A) = 0$. Donc A est un singleton.

Réciproquement, supposons que pour toute suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non vides de E décroissante ($i.e.\ \forall n, F_{n+1} \subset F_n$) telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n) = 0$, l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Soit (x_n) une suite de Cauchy de E. Supposons que (x_n) ne converge pas. Alors puisque (x_n) est de Cauchy, (x_n) n'admet aucune valeur d'adhérence. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_k = \{x_n\colon n \ge k\}$ est un fermé de E. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{k+1} \subset F_k$, et puisque (x_n) est de Cauchy, alors $\lim_{k\to\infty}\mathrm{diam}(F_k) = 0$. Donc l'intersection des F_k est un singleton x et on démontre sans peine par un argument d'inégalité triangulaire que x est la limite de la suite (x_n). Ceci contredit le fait que (x_n) ne converge pas. Donc en fait, (x_n) converge, et E est complet.

Retour texte → □

. Exercice 68

Soit $x \in E \setminus A$. Puisque A est dense dans E, il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers x. On prolonge g par continuité en posant $\tilde{g}(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$. Cette limite l est bien définie car la continuité uniforme de g implique que $(g(x_n))$ est de Cauchy dans F qui est complet, donc $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = l$ existe.

Pour montrer l'unicité de ce prolongement, on doit montrer que $tildeg(x)$ ne dépend pas du choix de la suite (x_n). Soit donc (y_n) une autre suite de A qui converge vers x, et soit l' la limite de la suite $g(y_n)$ dans Y. On doit montrer que $l = l'$. Pour tout n, on a :

$$|l - l'| \leq \delta(l, g(x_n) + \delta(g(x_n), g(y_n)) + \delta(g(y_n), l').$$

Or g est uniformément continue et (x_n) et (y_n) convergent toutes deux vers x, donc $\lim_{n\to\infty} \delta(g(x_n), g(y_n)) = 0$. Et par définition de l et l', on a $\lim_{n\to\infty} \delta(g(x_n), l) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \delta(g(y_n), l') = 0$. Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient donc $l = l'$.

Montrons maintenant la continuité uniforme de $\tilde{g}$. Soient $\epsilon > 0$ et soient $x, y \in E$. Considérons une suite (x_n) de A qui converge vers x et une suite (y_n) de A qui converge vers y. Alors

$$\delta(\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)) \leq \delta(\tilde{g}(x) - g(x_n)) + \delta(g(x_n) - g(y_n)) + \delta(g(y_n) - \tilde{g}(y)).$$

Puisque g est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x', y' \in A$, $|x' - y'| < \eta$ implique $\delta(g(x') - g(y')) < \frac{1}{3}\epsilon$.

Supposons $d(x, y) \leq \frac{1}{3}\eta$. Puisque (x_n) converge vers x et (y_n) vers y, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x) < \frac{1}{3}\eta$ et $d(y_n, y) < \frac{1}{3}\eta$. On a donc pour tout $n \geq N$, $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < \eta$, et donc $\delta(g(x_n), g(y_n)) < \frac{1}{3}\epsilon$.

De plus, par définition de $\tilde{g}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(\tilde{g}(x) - g(x_n)) < \frac{1}{3}\epsilon$ et $\delta(\tilde{g}(y) - g(y_n)) < \frac{1}{3}\epsilon$. Alors pour tout $n \geq \max(N, N_1)$, on obtient

$$\delta(\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)) \leq \delta(\tilde{g}(x) - g(x_n)) + \delta(g(x_n) - g(y_n)) + \delta(g(y_n) - \tilde{g}(y)) < \epsilon.$$

Finalement, on a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E, d(x, y) < \eta$ implique $\delta(g(x), g(y)) < \epsilon$.

Retour texte → □

. Exercice 69

1) Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l^1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ est une suite normalement convergente, que l'on écrit $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $k, l \geq K$, $\left\| u^{(k)} - u^{(l)} \right\|_1 < \epsilon$, i.e.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{(k)} - u_n^{(l)}| < \epsilon \qquad (*)$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tous $k, l \geq K, |u_n^{(k)} - u_n^{(l)}| < \epsilon$, donc la suite $(u_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Donc $(u_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Notons ℓ_n sa limite.

Montrons que la suite (ℓ_n) est dans l^1. En passant à la limite $l \to \infty$ dans $(*)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{(k)} - \ell_n| < \epsilon \qquad (**)$$

Fixons $K \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{K} |\ell_n| \leq \sum_{n=0}^{K} |u_n^{(k)}| + \sum_{n=0}^{K} |u_n^{(k)} - \ell_n| \leq \sum_{n=0}^{K} |u_n^{(k)}| + \epsilon.$$

Or $\sum_{n=0}^{K} |u_n^{(k)}| + \epsilon$ est une constante. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |\ell_n|$ converge, i.e., (ℓ_n) est dans l^1.

Enfin, la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (ℓ_n) dans l^1 car d'après $(**)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, $\left\|u^{(k)} - \ell\right\|_1 < \epsilon$.

2) Choisissons une suite u de l^1 qui n'est pas dans $\mathcal{C}_0$, par exemple la suite $u = (u_n) = (\frac{1}{2^n})$. Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{C}_0$ définie par :

si $n \leq k, u_n^{(k)} = u_n = \frac{1}{2^n}$,

si $n > k, u_n^{(k)} = 0$.

Alors $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. De plus, elle converge vers u dans l^1 car pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\|u^{(k)} - u\right\|_1 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \to_{k\to+\infty} 0.$$

Mais u n'appartient pas à $\mathcal{C}_0$, donc $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathcal{C}_0$. Ceci montre que $\mathcal{C}_0$ n'est pas complet.

3) C'est très facile car nous l'avons déjà fait au 2) : si $u = (u_n)$ est une suite de l^1, alors la suite de $\mathcal{C}_0$ définie par :

si $n \leq k, u_n^{(k)} = u_n = \frac{1}{2^n}$,

si $n > k, u_n^{(k)} = 0$.

converge vers u dans l_1.

Retour texte → □

Sixième partie

Espaces connexes

VI.1 Définitions et propriétés

Définition VI.1.1. *Un espace métrique (X, d) est dit* **connexe** *s'il n'existe pas deux ouverts non vides U_1 et U_2 de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Si X n'est pas connexe, alors une paire (U_1, U_2) de deux tels ouverts s'appelle une **disconnection** *de X.*

Si A est une partie d'un espace métrique X on munira A de la topologie induite et on dira que A est une **partie connexe** *de X si A muni de la topologie induite est connexe.*

Exemple VI.1.2.
1. *Tout singleton $\{x\}$ est connexe puisque $\{x\}$ admet un seul ouvert non vide : lui-même.*
2. *Dans $\mathbb{R}$, $\{0, 1\}$ n'est pas une partie connexe. En effet, la paire $\{0\}, \{1\}$ est une disconnection.*
3. *Les seules parties connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons. En effet, on vient de voir que tout singleton est connexe. Par ailleurs, si une partie A de $\mathbb{Z}$ n'est pas un singleton, alors elle contient (au moins) deux éléments distincts x et y. Alors $U_1 = \{x\}$ et $U_2 = A \setminus \{x\}$ forment une disconnection de A*

Proposition VI.1.3. *Un espace métrique (X, d) est connexe si et seulement si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées dans X sont X et $\emptyset$.*

Démonstration. Suppsons qu'il existe une partie A de X à la fois ouverte et fermée qui soit non vide et différente de X. Alors $U_1 = A$ et $U_2 = X \setminus A$ sont deux ouverts disjoints de X non vides tels que $X = U_1 \cup U_2$. Donc X n'est pas connexe.

Suppons que X ne soit pas connexe et soient U_1, U_2 une disconnection de X. Alors $A = U_1$ est à la fois ouvert et fermé de X et est différent de X et $\emptyset$.

□

Théorème VI.1.4. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Rappelons qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, l'intervalle $[a, b]$ est inclus dans I.

Soit C une partie connexe de $\mathbb{R}$. Montrons que C est un intervalle. Supposons le contraire. Alors il existe $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 < y_0 < z_0$. Alors $U_1 = \{x \in C \ / \ x < y_0\}$ $U_2 = \{x \in C \ / \ x > y_0\}$ sont deux ouverts de C qui contredisent sa connexité.

Réciproquement, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrons que I est connexe. Supposons le contraire. Alors il existe U_1 et U_2 deux ouverts de I disjoints et non vides tels que $I = U_1 \cup U_2$. Prenons $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$. Quitte à échanger U_1 et U_2, on peut supposer $x_1 < x_2$. Posons $V = \{x < x_2 \ / \ x \in U_1\}$ et $s = \sup V$.

Ou bien $s \in U_1$, alors puisque U_1 est ouvert dans I, il existe $r > 0$ tel que $B(s, r) \cap I \subset U_1$, et puisque I est un intervalle, alors $[s, s + \frac{r}{2}] \subset U_1$ et $S + \frac{r}{2} \in V$. Contradiction avec $s = \sup V$.

Ou bien $s \notin U_1$. Alors $s \in U_2$ et on peut choisir $r > 0$ tel que $B(s, r) \cap I \subset U_2$. Puisque I est un intervalle, alors $[s - \frac{r}{2}, s] \subset U_2$ et $s - \frac{r}{2}$ majore V. Contradiction avec $s = \sup V$.

□

VI.2 Connexité et applications continues

Proposition VI.2.1. *Soient X et Y deux espaces métriques et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Supposons $f(X)$ non connexe et soit (U_1, U_2) une disconnection. Puisque $f(X)$ est munie de la topologie induite par celle de Y, alors $U_1 = V_1 \cap f(E)$ et $U_2 = V_2 \cap f(X)$ où V_1 et V_2 sont deux ouverts de Y. Puisque f est continue, $O_1 = f^{-1}(V_1)$ et $O_2 = f^{-1}(V_2)$ sont deux ouverts de X qui sont non vides puisque U_1 et U_2 sont non vides et tels que $X = O_1 \cup O_2$ puisque $U_1 \cup U_2 = f(X)$. Donc O_1 et O_2 forment une disconnection de X. □

Corollaire VI.2.2. (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit X un espace métrique connexe et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soient a et $b \in X$. Alors pour tout $c \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = c$.*

Démonstration. $f(X)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle. □

Corollaire VI.2.3.

Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\mathbb{Z}$ est constante.

Démonstration. Supposons que X soit connexe et soit $f : X \to \mathbb{Z}$ une application continue. Alors $f(X)$ est un sous-espace métrique connexe de $\mathbb{Z}$, donc c'est un singleton (voir l'exemple (3) de VI.1.2), ce qui montre que f est constante.

Réciproquement, supposons que X ne soit pas connexe et soit U_1, U_2 une disconnection de X. Soit f la fonction indicatrice de U_1, c'est-à-dire que $f(x) = 1$ pour tout $x \in U_1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in U_2$. Alors f est une application continue non constante de X dans $\mathbb{Z}$. □

Corollaire VI.2.4. *Soit X un espace topologique et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie connexe de X.*

Démonstration. Soit $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{Z}$ une application continue. Montrons que f est constante. Puisque pour tout i, A_i est connexe, la restriction $f_{|A_i}$, qui est continue, est constante d'après le Corollaire VI.2.3. Soit $a_i \in \mathbb{Z}$ sa valeur. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Alors pour tout i, $f(x) = a_i$. Donc les a_i sont tous égaux et f est constante. Comme ceci est valable pour toute application continue $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \mathbb{Z}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe d'après le Corollaire VI.2.3. □

VI.3 Composantes connexes

Définition VI.3.1. *On dit que deux points a et b d'un espace métrique X sont* **connectés** *s'il existe une partie connexe A de X qui contient a et b.*

Proposition VI.3.2. *La relation "être connectés" est une relation d'équivalence sur les points de X.*

Démonstration. La relation est évidemment réflexive et symétrique. Montrons la transitivité. Soient x, y et z trois points de X tels que x et y sont connectés, et y et z sont connectés. Soit C et C' des parties connexes de X telles que $x, y \in C$ et $y, z \in C'$. Alors $C \cup C'$ est un connexe d'après le Corollaire VI.2.4. Puisque $x, z \in C \cup C'$, on en déduit que x et z sont connectés. Donc la relation est transitive. □

Définition VI.3.3. *Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées* **composantes connexes** *de X. Soit $x \in X$. On note $C(x)$ la composante connexe qui contient x (c'est-à-dire la classe d'équivalence de x).*

Exemple VI.3.4. *1. $\mathbb{R}$ est connexe, donc admet une unique composante connexe : lui-même.*

2. $\{0,1\}$ admet deux composantes connexes : $\{0\}$ et $\{1\}$.

3. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 0$ ou $y = 0\}$ la réunion des deux axes dans $\mathbb{R}^2$. Alors
A est connexe ;
$A \setminus \{(0,1)\}$ admet deux composantes connexes ;
$A \setminus \{(0,1),(1,0)\}$ admet trois composantes connexes ;
$A \setminus \{(0,0)\}$ admet quatre composantes connexes.

Proposition VI.3.5. *Soit X un espace métrique et soit $x \in X$.*

1. *La composante connexe $C(x)$ est la réunion de toutes les parties connexes de X contenant x. C'est aussi la plus grande (pour l'inclusion) partie connexe de X contenant x.*
2. *$C(x)$ est fermée dans X.*

Démonstration. (1) Soit D la réunion de tous les connexes contenant x. D'après le Corollaire VI.2.4, c'est une partie connexe de X. Donc tout point de D est connecté avec x, ce qui montre l'inclusion $D \subset C(x)$. Réciproquement, si $y \in C(x)$, alors il existe un connexe C qui contient x et y, qui est donc contenu dans D. Donc $C(x) \subset D$.

Puisque cette réunion est elle-même connexe, donc c'est la plus grande (pour l'inclusion) partie connexe de X contenant x.

(2) Soit $f \colon \overline{C(x)} \to \mathbb{Z}$ une application continue. Puisque $C(x)$ est connexe, alors f est constante sur $C(x)$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ sa valeur. Soit $y \in C(x)$ et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(x)$ qui converge vers y dans X. Alors par continuité de f, on a $f(y) = a$. Donc f est constante sur $\overline{C(x)}$. Par le Corollaire VI.2.3, ceci implique que $\overline{C(x)}$ est connexe. Donc $\overline{C(x)} \subset C(x)$ d'après (1). Donc $\overline{C(x)} = C(x)$ et $C(x)$ est bien un fermé. □

VI.4 Connexité par arcs

Définition VI.4.1. *Un espace métrique X est dit* **connexe par arcs** *si pour tout couple (a,b) de points de X, il existe une application continue $f[0,1] \longrightarrow X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

Proposition VI.4.2. *Un espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Exercice (DCC2). □

Exercice 71. Soit (X,d) un espace métrique et soit A une partie connexe de X. Démontrer que tout sous-espace B de X tel que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.

Correction →

Exercice 72. Un espace métrique est dit **totalement discontinu** si chacune de ses composantes connexes est un singleton.

1. Démontrer qu'un espace métrique discret est totalement discontinu. (on rappelle qu'un espace métrique est discret si toutes ses parties sont des ouverts).
2. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu mais pas discret.

Correction →

Exercice 73. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y = \sin 1/x\}$. Démontrer que $\overline{E}$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Correction →

Exercice 74. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue d'un un espace métrique X dans un un espace métrique Y. On suppose f localement constante sur X, c'est-à-dire que tout point de X possède un voisinage sur lequel f est constante.

1. Démontrer que f est constante sur chaque composante connexe de X.
2. Démontrer que chaque intervalle $]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k + 1)\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$ contient une solution de l'équation $\tan x - e^x = 0$.

Correction →

Exercice 75.

1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme entre deux espaces métriques X et Y. Montrer que f induit une bijection entre les composantes connexes de X et les composantes connexes de Y.
2. Démontrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre les lettres X et Y, vues commes les sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) \ / \ x \in [-1, 1], y = x \text{ ou } y = -x\}$$

et

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) \ / \ x \in [-1, 0], y = -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) \ / \ x \in [0, 1], y = x\} \cup \{0\} \times [-1, 0]$$

Correction →

VI.5 Correction des exercices

. Exercice 71 Soient V_1 et V_2 deux ouverts disjoints de B tels que $B = V_1 \cup V_2$. Puisque B est muni de la topologie induite, alors $V_1 = U_1 \cap B$ et $V_2 = U_2 \cap B$ où U_1 et U_2 sont deux ouverts de X. Alors $W_1 = U_1 \cap A$ et $W_2 = U_2 \cap A$ sont deux ouverts disjoints de A tels que $W_1 \cup W_2 = \emptyset$. Puisque A est connexe, l'un des deux est vide, par exemple W_1, et on a donc $A \subset U_1^c$ (le complémentaire de U_1 dans X). Puisque U_1^c est un fermé, on a dons $\overline{A} \subset U_1^c$, et donc $B \subset U_1^c$. On en déduit $U_1 \cap B = V_1 = \emptyset$. Donc B est connexe.

(Remarque : en particulier, ceci démontre que $\overline{A}$ est connexe).

Retour texte →

□

. Exercice 72

(1) Soit X un espace métrique discret et soit $a \in X$. Supposons que $C(a) \neq \{a\}$. Alors il existe un point $b \in C(a)$ tel que $a \neq b$. Puisque $U_1 = \{a\}$ et $U_2 = C(a) \setminus \{a\}$ sont des ouvets de X, alors ce sont aussi des ouverts de $C(a)$ (topologie induite), et il forment une disconnection de $C(a)$. Contradiction avec $C(a)$ connexe. Donc $C(a) = \{a\}$ et ce pour tout $a \in X$. Conclusion : X est totalement discontinu.

(2) Montrons que $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Supposons que $C(q)$ contienne un rationnel q' distinct de q. Quitte à ëchanger les rôles de q et q', on peut supposer $q < q'$. Soit

r un irrationnel tel que $q < r < q'$. Alors $U_1 =]-\infty, r[\cap C(q)$ et $U_2 =]r, +\infty[\cap C(q)$ forment une disconnection de $C(q)$. Contradiction. Donc $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu.

Montrons maintenant que $\mathbb{Q}$ n'est pas discret. Supposons le contraire. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Alors $\{q\}$ soit un ouvert de $\mathbb{Q}$. Alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $\{q\} = U \cap \mathbb{Q}$. Or il existe $r > 0$ tel que $]q-r, q+r[\subset U$. Donc $\mathbb{Q}\cap]q-r, q+r[= \{q\}$. Or tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels. Contradiction.

Retour texte → □

. Exercice 73

Soit $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x}$. Puisque f est continue et $]0, +\infty[$ est connexe, alors $E = f(]0, +\infty[)$ est connexe. Donc $\overline{E}$ est connexe d'après le résultat de l'exercice 71.

Montrons maintenant que $\overline{E} = E \cap \{0\} \times [-1, +1]$ n'est pas connexe par arcs. Soient $\lambda > 0$ et $\mu \in [-1, 1]$. Posons $a = (\lambda, \sin\lambda) \in E$ et $b = (0, \mu)$ et supposons qu'il existe un chemin continu $c\colon [0, 1] \to \overline{E}$ tel que $c(0) = a$ et $c(1) = b$. Pour tout t, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$ où c_1 et c_2 sontdeux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $|c_2(t) < 1|$ si $c_1(t) = 0$ et $c_2(t) = \sin(\frac{1}{c_1(t)})$ si $c_1(t) > 0$.

L'ensemble $A = \{t \in [0, 1] \,/\, c_1(t) = 0\}$ est non vide puisqu'il contient 1, et il est minoré par 0. Notons t_m sa borne inférieure. Puisque c_1 est continue, A est fermé, donc $t_m \in A$. En particulier, $0 < t_m$ puisque $0 \notin A$. Donc $c_1(t_m) = 0$. Par continuité de c, $\lim_{t\to t_m} c(t) = (0, c_2(t_m))$, donc il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leq t_m - \eta$ et tel que

$$\forall t \in [t_m - \eta, t_m], |c_2(t) - c_2(t_m)| \leq \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Mais lorsque t parcourt $[t_m - \eta, t_m]$, $c_1(t)$ prend toutes les valeurs comprises entre 0 et $c_1(t_m - \eta) > 0$ donc $c_2(t) = \sin\frac{1}{c_1(t)}$ prend une infinité de fois les valeurs $+1$ et -1. Contradiction avec $(*)$.

Conclusion : $\overline{E}$ n'est pas connexe par arcs.

Retour texte →

□

. Exercice 74

(1) Soit $a \in X$. Montrons que f est constante sur la composante connexe $C(a)$. Puisque $\{f(a)\}$ est un fermé de X et f continue, alors $f^{-1}(f(a))$ est un fermé de X, et donc par topologie induite, $U_1 = f^{-1}(f(a)) \cap C(a)$ est un fermé de $C(a)$.

D'autre part, pour tout $y \in U_1$, il existe par hypothèse un ouvert U_y de X contenant y tel que $U_y \subset f^{-1}(f(a))$. Alors $U_y \cap C(a)$ est un ouvert de $C(a)$ inclu dans $f^{-1}(f(a)) \cap C(a)$ et on peut alors écrire exprimer $f^{-1}(f(a)) \cap C(a)$ comme une réunion d'ouverts de $C'(a)$:

$$f^{-1}(f(a)) \cap C(a) = \bigcup_{y \in f^{-1}(f(a)) \cap C(a)} U_y \cap C(a),$$

ce qui montre que U_1 est un ouvert de $C(a)$.

Posons alors $U_2 = C(a) \setminus U_1$ et supposons que U_2 est non vide. Puisque U_1 est un fermé de $C(a)$, alors U_2 est un ouvert de $C(a)$, etr la paire U_1, U_2 forme une disconnection de $C(a)$. Ceci contredit la connexité de $C(a)$. Donc en fait, $U_2 = \emptyset$ et $U_1 = C(a)$. Ceci démontre que f est constante égale à $f(a)$ sur $C(a)$.

(2) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons $g_k\colon I_k \to \mathbb{R}$ la restriction à $I_k =]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$ de la fonction $f(x) = \tan x - e^x$.

On va supposer que k est impair. Le raisonnement pour k pair est similaire.

On a d'une part :

$$\lim_{x \to pi/2+k\pi} g_k(x) = -\infty,$$

donc il existe $x_0 \in I_k$ tel que $g(x_0) < 0$.

D'autre part,

$$\lim_{x \to pi/2+(k+1)\pi} g_k(x) = +\infty,$$

donc il existe $x_1 \in I_k$ tel que $x_1 > x_0$ et $g(x_1) > 0$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[x_0, x_1]$, on obtient qu'il existe $x \in [x_0, x_1]$ tel que $g_k(0) = 0$, c'est-à-dire solution de $\tan x - e^x = 0$.

$]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[$, avec $k \in \mathbb{Z}$ contient une solution de l'équation $\tan x - e^x = 0$.

Retour texte →

□

. Exercice 75

(1) Il suffit de montre que pour tout $x \in X$, $f(C(x)$ est une composante connexe de Y, i.e., $f(C(x) = C(f(x))$.

Fixons $x \in X$. Puisque f est continue et $C(x)$ connexe, alors $f(C(x))$ est un connexe de Y. Puisque $f(x) \in f(C(x))$, ceci implique $f(C(x)) \subset C(f(x))$.

De plus, $C(f(x))$ est une partie connexe de Y et f^{-1} est continue. Donc $f^{-1}(C(f(x)))$ est une partie connexe de X. Puisque $x \in f^{-1}(C(f(x)))$, ceci implique $f^{-1}(C(f(x))) \subset C(x)$. En prenant les images par f, on obtient $C(f(x)) \subset f(Cx))$.

Finalement, on a bien $f(Cx)) = C(f(x))$.

(2) Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f\colon X \to Y$. Considérons le point $O = (0, 0)$. Alors f se restreint en un homéomorphisme $g\colon X \setminus \{O\} \to Y \setminus \{f(O)\}$. Or $X \setminus \{O\}$ admet quatre composantes connexes alors que $Y \setminus \{f(O)\}$ en admet au plus trois. Contradiction.

Retour texte →

□

Septième partie

Applications différentiables

VII.1 Applications différentiables

Définition VII.1.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application. Soit $a \in U$. On dit que f est* ***différentiable*** *au point a s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et une application $\epsilon\colon U \to F$ telles que*

1. $\forall x \in U, f(x) = f(a) + L(x - a) + ||x - a||\epsilon(x)$
2. $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$

Proposition VII.1.2. *Si une telle L existe, alors elle est unique.*

On appelle L la ***différentielle*** *de f au point a, et on la note Df_a.*

Démonstration. Supposons que $L_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\epsilon_1\colon U \to F$ vérifie aussi :

1. $\forall x \in U, f(x) = f(a) + L_1(x - a) + ||x - a||\epsilon_1(x)$
2. $\lim_{x\to a} \epsilon_1(x) = 0$

Montrons que $L_1 = L$.

Soit $v \in E$. Pour tout réel $t \in]0, +\infty[$, on a

$$f(a + tv) - f(a) = L(tv) + ||tv||\epsilon(a + tv) = L_1(tv) + ||tv||\epsilon_1(a + tv).$$

Donc $L_1(tv)-L(tv) = ||tv||\big(\epsilon_1(a+tv)-\epsilon(a+tv)\big)$. En divisant par t, on obtient : $L_1(v)-L(v) = ||v||\big(\epsilon_1(a + tv) - \epsilon(a + tv)\big)$. La limite du membre de droite est 0 quand t tend vers 0, donc $L_1(v) - L(v) = 0$.

Ceci étant valable pour tout $v \in E$, on a donc $L_1 = L$.

□

Remarque VII.1.3. *Les assertions (1) et (2) de la Définition VII.1.1 sont équivalentes à :*

$$f(a + h) = f(a) + Df_a(h) + ||h||\epsilon_1(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = 0$ *ou encore*

$$f(a + h) = f(a) + Df_a(h) + o(\|h\|)$$

où $o(\|h\|)$ signifie "petit o de $\|h\|$".

Lorsque $E = \mathbb{R}$, ceci s'écrit pour $h \in \mathbb{R}$:

$$f(a + h) = f(a) + hDf_a(1) + o(h),$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = Df_a(1)$$

Ce qui équivaut à dire que f est dérivable en a et que $f'(a) = Df_a(1)$.

On a alors : $\forall h \in \mathbb{R}, Df_a(h) = h.f'(a)$

Exemple VII.1.4. *Différentielle d'une application constante.*

Soit $f : U \to F$ une application constante : $\forall x \in U, f(x) = c$ où $c \in F$ est une constante. Alors pour tout $a \in U$ et pour tout $x \in U$, $f(x) - f(a) = 0$. Donc f est différentiable en tout point a de U et $Df_a = 0$ (l'application linéaire nulle).

Exemple VII.1.5. *Différentielle d'une application linéaire continue.*

Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue et soit $a \in E$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$f(x) - f(a) = f(x-a) + \|x-a\|\,\epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x) = 0$. Donc f est différentiable en a et $Df_a = f$.

Exercice 76. Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application différentiable en un point a de U. Montrer que f est continue en a.

Correction $\to$

Proposition VII.1.6. *Soient E, F et G des espaces vectoriels normés. Soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application. Soit V un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et soit $g : V \to G$ une application. Soit $a \in U$.*

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} \circ Df_a$.

Démonstration. Puisque f est différentiable en a, on a pour tout $x \in U$,

$$f(x) - f(a) = Df_a(x-a) + \|x-a\|\,\epsilon_1(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \epsilon_1(x) = 0 \qquad (1)$$

Puisque g est différentiable en $f(a)$, on a pour tout $y \in V$,

$$g(y) - g(f(a)) = Dg_{f(a)}(y - f(a)) + \|y - f(a)\|\,\epsilon_2(y), \quad \text{avec } \lim_{y \to f(a)} \epsilon_2(y) = 0 \qquad (2)$$

donc pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) - (g \circ f)(a) &= Dg_{f(a)}(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\,\epsilon_2(f(x)) \\ &= Dg_{f(a)}(Df(a)(x-a) + \|x-a\|\,\epsilon_1(x)) + \|f(x)-f(a)\|\,\epsilon_2(f(x)) \\ &= Dg_{f(a)}(Df(a)(x-a)) + \|x-a\|\,Dg_{f(a)}(\epsilon_1(x)) + \|f(x)-f(a)\|\,\epsilon_2(f(x)),\end{aligned}$$

en utilisant (2), puis (1), puis la linéarité de $Dg_{f(a)}$. On obtient donc :

$$(g \circ f)(x) - (g\circ f)(a) = \big(Dg_{f(a)} \circ Df(a)\big)(x-a) + \|x-a\|\,\epsilon(x),$$

avec

$$\epsilon(x) = Dg_{f(a)}(\epsilon_1(x)) + \frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|}\epsilon_2(f(x)).$$

Il reste à montrer que $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$. Puisque $Dg_{f(a)}$ est continue et que $\lim_{x\to a}\epsilon_1(x) = 0$, on a $\lim_{x\to a} Dg_{f(a)}(\epsilon_1(x)) = 0$. De plus, f est continue en a, donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, donc $\lim_{x\to a}\epsilon_2(f(x)) = \lim_{y\to f(a)}\epsilon_2(y) = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|} = \frac{\|Df_a(x-a) + \|x-a\|\,\epsilon_1(x)\|}{\|x-a\|} &\leq \frac{\|Df_a(x-a)\|}{\|x-a\|} + \|\epsilon_1(x)\| \\ &\leq \|Df_a\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|\epsilon_1(x)\|.\end{aligned}$$

De $\lim_{x\to a}\epsilon_1(x) = 0$, on déduit que $\frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|}$ est borné.

Finalement, on a bien $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$. □

Exercice 77. [Linéarité de la différentiabilité]

Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ et $g : U \to F$ des applications différentiables en $a \in U$. Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et déterminer sa différentielle.

Correction →

Exercice 78. Soit E un espace vectoriel normé. On considère l'application $f : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $f(A) = A^2$. Démontrer que f est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et déterminer Df_A pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$.

Indication : On pourra utiliser (et démontrer au passage) le fait que si $H \in \mathcal{L}(E)$, alors $||H^2|| \leq ||H||^2$, où la norme est celle de $\mathcal{L}(E)$.

Correction →

VII.2 Différentielle d'une application n-linéaire continue.

Définition VII.2.1. *Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Une application $f \colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est dite **n-linéaire** (**bilinéaire** si $n = 2$) si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, l'application $f_i \colon E_i \to F$ définie par : pour tout $x \in E_i$,*

$$f_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est linéaire.

Notation. Munissons $E_1 \times \ldots \times E_n$ de la norme produit

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max(\|x_1\|_{E_1}, \dots, \|x_n\|_{E_n}).$$

On note $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F.

Rappelons le résultat démontré dans l'exercice 48 :

Proposition VII.2.2. *Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés et soit $\phi : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *ϕ est continue sur le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$*

(ii) *ϕ est continue en 0*

(iii) *ϕ est bornée sur le produit des boules unité des E_i*

(iv) *il existe $C \geq 0$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,*

$$\|\phi(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|$$

En conséquence, on définit une norme sur $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ en posant pour tout $f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$:

$$\|f\| = \sup_{\|x_1\|=1, \dots, \|x_n\|=1} \|f(x_1, \dots, x_n\|_F ,$$

et on a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\|f(x_1, \dots, x_n)\|_F \leq \|f\| \ \|x_1\| \dots \|x_n\| .$$

Exercice 79. 1) Soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels normés et soit $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire. Démontrer que f est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et déterminer sa différentielle.

2) Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. On considère l'application $f : \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G)$ définie par :

$$f(A,B) = AB (= A \circ B)$$

Démontrer que f est différentiable sur $\mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F)$ et déterminer $Df_{(A,B)}$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F)$.

Correction →

Exercice 80. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés et soit $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.

1) Démontrer que f est différentiable sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ et déterminer sa différentielle.

2) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère l'application $f_n : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $f_n(A) = A^n$. Démontrer que f_n est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et déterminer $Df_n(A)$ pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$.

Correction →

VII.3 Cas $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$; dérivées partielles

Considérons une fonction numérique $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Fixons $i \in \{1, \ldots, n\}$, et notons $I_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'injection $I_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ et $U_i = I_i^{-1}(U)$.

Si la fonction $f \circ I_i : U_i \to \mathbb{R}$,

$$(f \circ I_i)(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

est dérivable au point a_i, on dit que f est **dérivable en a par rapport à la i-ème variable**. On note

$$(f \circ I_i)'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

la dérivée, et on l'appelle i-ème dérivée partielle de f au point a.

Exemple VII.3.1. *$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x^2 y)$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y sur $\mathbb{R}^2$ et*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy\sin(x^2y), \ \ et \ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(x^2y).$$

Remarque VII.3.2. *Savoir qu'une fonction admet des dérivées partielles en un point a ne donne pas beaucoup d'information sur le comportement de f au voisinage de a. Par exemple, considérons la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = (0,0)$. Alors f n'est pas continue en $(0,0)$ alors que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent.*

Exercice 81. Démontrer que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(x,y) = (0,0)$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais que f n'est pas continue en 0.

Correction →

Proposition VII.3.3. *Si $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles en a par rapport à toutes les variables, et*

$$\forall h = (h_1, \ldots, h_n), Df_a(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Démonstration. Soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$. Donc par linéarité de Df_a, on a :

$$Df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i Df_a(e_i).$$

Puisque f est difffférentiable en a, alors $f(a+h) = f(a)+Df_a(h)+\|h\|\,\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. En posant $h = te_i$, on a donc :

$$f(a + te_i) = f(a) + tDf_a(e_i) + |t|\epsilon(te_i).$$

En posant $a = (a_1, \ldots, a_n)$, on obtient donc :

$$Df_a(e_i) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t},$$

c'est-à-dire

$$Df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

□

Remarque VII.3.4. *La réciproque de cette proposition est bien sûr fausse : une fonction peut admettre des dérivées partielles en a par rapport à toutes les variables en un point sans être différentiable en ce point, ni même continue, comme nous l'avons vu dans la Remarque VII.3.2. C'est pourquoi on introduit ici la notion d'application de classe C^1.*

Définition VII.3.5. *On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est* ***de classe*** $\mathbf{C^1}$ *sur U si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables en tout point de U et si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction $g_i : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

est continue sur U.

Théorème VII.3.6. *$f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ est de classe C^1 sur U, si et seulement si f est différentiable en tout point a de U et l'application $Df : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par $x \mapsto Df_x$ est continue sur U.*

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, supposons $n = 2$. La preuve est une adaptation directe dans le cas général.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) = &\ f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ = &\ f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le Théorème des Accroissements Finis (TAF), dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème VII.3.7 (Théorème des Accroissements Finis)**.** *Soit $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Appliquons le TAF à l'application partielle $t \mapsto f(a_1 + h_1, a_2 + t)$ sur l'intervalle $[0, h_2]$: il existe $h_2' \in [0, h_2]$ tel que

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2 + h_2')$$

Appliquons maintenant le TAF à l'application partielle $t \mapsto f(a_1 + t, a_2)$ sur l'intervalle $[0, h_1]$: il existe $h_1' \in [0, h_1]$ tel que

$$f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1', a_2).$$

On obtient donc

$$f(a + h) - f(a) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2 + h_2') + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + h_1', a_2),$$

et donc par continuité des $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, 2$:

$$f(a + h) - f(a) = h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(h).$$

□

VII.4 Cas $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application. Pour tout $x \in U$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Les $f_i : U \to \mathbb{R}$ s'appellent les **applications composantes** de f. On note $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

Proposition VII.4.1. *Soit $a \in U$. f est différentiable au point a si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, p$, f_i est différentiable au point a, auquel cas, $\forall h \in E$,*

$$Df_a(h) = (Df_{1_a}(h), \ldots, Df_{p_a}(h))$$

Démonstration. $\Leftarrow$ Supposons que pour tout $i = 1, \ldots, p$, f_i est différentiable au point a. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, considérons l'application $i_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$i_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0),$$

où la composante égale à x est la $k$ième composante.

On a :

$$f = \sum_{i=1}^{n} i_k \circ f_k.$$

Puisque pour tout k, i_k est linéaire continue, alors $i_k \circ f_k$ est différentiable en a comme composée d'applications différentiables, donc f est différentiable en a par linéarité de la différentiabilité (c.f. Exercice 77), et on a :

$$\begin{aligned} Df_a(h) = & \textstyle\sum_{i=1}^n D(i_k \circ f_k)_a(h) \\ = & \big(\textstyle\sum_{i=1}^n D(i_k)_{f_k(a)} \circ D(f_k)_a\big)(h) \\ = & \big(D(f_1)_a(h), \ldots, D(f_n)_a(h)\big). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Supposons que f soit différentiable au point a. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, $f_k = p_k \circ f$, où $p_k \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est la projection $p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k$. Puisque p_k est linéaire continue, elle est différentiable au point a, donc la composée $f_k = p_k \circ f$ est différentiable au point a. □

Définition VII.4.2. *La matrice de l'application linéaire $Df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dans les bases canoniques s'appelle la matrice* ***jacobienne*** *de f. C'est la matrice :*

$$Jf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Exercice 82. Soit $f = (f_1, f_2, f_3)$ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f_1(x, y, z) = x + y + z \ ; \ f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \ ; \ f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

Calculer la matrice jacobienne de f au point (a, b, c).

Correction →

Exercice 83. (Coordonnées cylindriques)
Calculer la matrice jacobienne de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$(r, \theta, z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Correction →

Exercice 84. 1) Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $P(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Montrer que P est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $c :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$c(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}).$$

Montrer que c est différentiable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et calculer sa matrice jacobienne en tout point.

3) Calculer $P \circ c$.

4) Vérifier que pour tout $x, y \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$D(P \circ c)_{(x,y)} = DP_{c(x,y)} \circ Dc_{(x,y)}.$$

Correction →

VII.5 Applications de classe C^1

Définition VII.5.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application. On dit que f est* ***de classe*** *C^1 sur U si f est différentiable en tout point de U et si l'application $Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$ définie par $a \mapsto Df_a$ est continue sur U.*

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, cette définition coïncide avec la Définition VII.3.5.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ est de classe C^1 sur U si et seulement si seulement si ses applications composantes sont de classe C^1 sur U.

Exercice 85. On pose $E = \mathbb{R}^n$.

1) Démontrer que l'application déterminant $\det : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa différentielle. *Indication : utiliser la question 1) de l'exercice 80.*

Donner une formule explicite pour la différentielle en l'identité.

2) Soit $A \in Gl(E)$ et soit $H \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que

$$D\det(A).H = \det(A)\,\mathrm{tr}\left(A^{-1} \circ H\right)$$

Correction →

Exercice 86. Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\,dt$ et $P \mapsto P' - P^2$.

Correction →

Exercice 87. Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty.$$

(on dit alors que f est *propre*). On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, Df_x est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective.

Fixons $a \in \mathbb{R}^2$ et posons $g(x) = \|f(x) - a\|^2$.

1) Calculer $Dg(x)$.

2) Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point X_0 de $\mathbb{R}^2$ et que $Dg_{X_0} = 0$.

3) Conclure.

Correction →

VII.6 Différentielles d'ordres supérieurs

VII.6.1 La différentielle seconde

Soient E et F des e.v.n., soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application différentiable sur U. On considère la différentielle

$$Df : U \to \mathcal{L}(E, F)$$

Définition VII.6.1. *On dit que f est **deux fois différentiable** en $a \in U$ si Df est différentiable en a, auquel cas on note $D^2 f_a$ la différentielle de Df en a et on l'appelle **la différentielle seconde** de f au point a.*

*Si f est deux fois différentiable en tout point de U et si l'application $D^2 f : U \to \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ est continue sur U, on dit que f est **de classe C^2 sur** U.*

VII.6.2 La différentielle seconde vue comme application bilinéaire

Notons $\mathcal{L}^2(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F. Alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Phi : \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \to \mathcal{L}^2(E, F)$$

défini pour $u \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$par $\Phi(u)(h, k) = [u(h)](k)$.

Soit $f : U \to F$ une application deux fois différentiable en $a \in U$. On regardera $D^2 f_a$ comme un élément de $\mathcal{L}^2(E, F)$ en l'identifiant avec son image par Φ et on notera $D^2 f_a(h, k)$ pour $(D^2 f_a(h))(k)$.

Théorème VII.6.2. ***(Théorème de Schwartz)*** *(admis) Soit $f : U \to F$ une application deux fois différentiable en tout point a de U. Alors pour tout $a \in U$, l'application bilinéaire $D^2 f_a$ est symétrique, i.e.*

$$\forall (h,k) \in E \times E,\ D^2 f_a(h,k) = D^2 f_a(k,h)$$

VII.6.3 Différentielles d'ordres supérieurs

On définit de la même façon par récurrence les notions de fonction n fois différentiable en a, sur U et de classe C^n sur U :

On note $\mathcal{L}^n(E,F)$ l'e.v.n. des applications n-linéaires de E^n dans F muni de la norme usuelle

$$||M|| = \sup_{x \in (E \setminus \{0\})^n} \frac{||M(x)||_F}{||x_1||_E \cdots ||x_n||_E}$$

On identifie $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^n(E,F)$ avec $\mathcal{L}^{n+1}(E,F)$ (écrire l'isomorphisme !).

On note $D^1 f$ pour Df.

Définition VII.6.3. *Soit $n \geq 2$. On dit que f est n* ***fois différentiable*** *en $a \in U$ s'il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant a sur lequel f est $n-1$ fois différentiable et si l'application $D^{n-1} f U' \to \mathcal{L}^{n-1}(E,F)$ est différentiable en a, auquel cas on note $D^n f_a \in \mathcal{L}^n(E,F)$ la différentielle et on l'appelle* ***la différentielle n-ième de de f au point*** *a.*

Si f est n fois différentiable en tout point de U et si l'application $D^n f : U \to \mathcal{L}^n(E,F)$ est continue sur U, on dit que f est ***de classe C^n sur*** *U.*

VII.6.4 Une formule explicite pour $D^2 f_a$

Commençons par un rappel. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application différentiable au point $a \in U$. Alors pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$Df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Cette formule se généralise de la façon suivante :

Soit F un e.v.n et soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$ une application deux fois différentiable en $a \in U$. Alors pour tous $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et $k = (k_1, \ldots, k_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$D^2 f_a(h,k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j$$

Lorsque f est deux fois différentiable sur U, alors le théorème de Schwartz implique :

$$\forall a \in U, \forall i,j, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a),$$

et

$$D^2 f_a(h,k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i k_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(h_i k_j + h_j k_i)$$

La forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to F$ associée à la forme bilinéaire $D^2 f_a$ s'exprime donc par :

$$\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n,\ q(h) = D^2 f_a(h,h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

La suite du chapitre est un rappel de résultats vus dans le cours de calcul différentiel de L2. Nous renvoyons à ce cours pour les démonstrations, qui ont été faites dans $\mathbb{R}^n$, mais qui utilisent exactement les mêmes arguments dans notre cadre plus général.

VII.7 La formule de Taylor-Young

Théorème VII.7.1. *Soient E et F des e.v.n, soit U un ouvert de E et soit $f : U \to F$ une application n fois différentiable au point $a \in U$. Alors $\forall x \in U$,*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} Df_a(x-a) + \frac{1}{2!} D^2 f_a(x-a, x-a) + \ldots +$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} D^n f_a(x-a, \ldots, x-a) + o((x-a)^n)$$

Remarque. Pour $n = 1$, c'est la définition de la différentielle Df_a.

VII.8 Points critiques - Extremas libres

Définition VII.8.1. *Soit E un e.v.n., soit U une ouvert de E et soit $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet au point $a \in U$ un* ***minimum local*** *(resp.* ***maximum local****) s'il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant a tel que $\forall x \in U', f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).*

Si les inégalités sont strictes, on parle de minimum (resp. maximum) local ***strict****.*

Proposition VII.8.2. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Une condition nécessaire pour que f admette en a un extremum local est que $Df_a = 0$.*

Exercice 88. Démontrer ce résultat.

Correction $\rightarrow$

Définition VII.8.3. *Un point $a \in U$ tel que $Df_a = 0$ s'appelle un* ***point critique*** *de f.*

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que f admette un extremum local en un de ses points critiques.

Théorème VII.8.4. *Soit E un e.v.n. de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en $a \in U$. On suppose que a est un point critique de f.*

1. *Si la forme quadratique $q : h \in E \mapsto D^2 f_a(h,h)$ est définie positive, alors f admet en a un minimum local strict.*
2. *Si la forme quadratique q est définie négative, alors f admet en a un maximum local strict.*
3. *S'il existe $h, k \in E$ tels que $D^2 f_a(h,h) > 0$ et $D^2 f_a(k,k) < 0$, alors f n'admet en a ni un maximum, ni un minimum local.*

Cas particulier : $\mathbf{E} = \mathbb{R}^2$

Théorème VII.8.5. ***(Lagrange, 1759)*** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en $a \in U$ telle que $Df_a = 0$. On pose :*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

1. *Si $rt - s^2 > 0$, alors f admet au point a un extremum local strict. Si $r > 0$, il s'agit d'un minimum ; Si $r < 0$, il s'agit d'un maximum.*
2. *Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local au point a.*

Exercice 89. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2$$

Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle).

Correction $\to$

Exercice 90. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle).

Correction $\to$

VII.9 Correction des exercices

. Exercice 76

Puisque f est différentiable en a, pour tout $x \in U$, $f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + \|x - a\| \, \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. Puisque $Df(a)$ est continue en 0, on a $\lim_{x \to a} Df(a)(x - a) = 0$. Donc $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$.

Retour texte $\to$ $\square$

. Exercice 77

Puisque f est différentiable en a, pour tout $x \in U$, $f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + \|x - a\| \, \epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon_1(x) = 0$.

Puisque g est différentiable en a, pour tout $x \in U$, $g(x) - g(a) = Dg(a)(x-a) + \|x - a\| \, \epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon_2(x) = 0$.

On a donc pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned}
(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a) &= \lambda(f(x) - f(a)) + \mu(g(x) - g(a)) \\
&= \lambda(Df(a)(x - a) + \|x - a\| \, \epsilon_1(x)) \\
&\qquad\qquad + \mu(Dg(a)(x - a) + \|x - a\| \, \epsilon_2(x)) \\
&= (\lambda Df(a) + \mu Dg(a))(x - a) + \|x - a\| \, (\lambda \epsilon_1(x) + \mu \epsilon_2(x))
\end{aligned}$$

D'une part, $\lambda Df(a) + \mu Dg(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, et d'autre part, $\lim_{x \to a}(\lambda \epsilon_1(x) + \mu \epsilon_2(x)) = 0$. Donc $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $D(\lambda f + \mu g)_a = \lambda Df(a) + \mu Dg(a)$.

Retour texte $\to$ $\square$

. Exercice 78

Pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$ et $H \in \mathcal{L}(E)$,

$$f(A+H) - f(A) = (A+H)^2 - A^2 = A^2 + AH + HA + H^2 - A^2 = AH + HA + H^2$$

Par définition (Proposition III.6.2) on a $\|H\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Hx\|}{\|x\|}$ et

$$\forall x \in E,\ \|Hx\| \leq \|H\| \|x\|$$

donc

$$\forall H_1, H_2 \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|H_1H_2x\| \leq \|H_1\| \|H_2x\| \leq \|H_1\| \|H_2\| \|x\|$$

d'où

$$\forall H_1, H_2 \in \mathcal{L}(E),\ \|H_1H_2\| \leq \|H_1\| \|H_2\|.$$

Montrons que l'application $L_A :\ H \to AH + HA$, de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même, est linéaire (c'est évident) et continue. Par la proposition III.6.1 il suffit de montrer qu'elle est continue en 0 :

$$\|L_A(H)\| = \|AH + HA\| \leq \|AH\| + \|HA\| \leq \|A\| \|H\| + \|H\| \|A\| = 2\|A\| \|H\|.$$

Si on pose $\epsilon(H) = \frac{1}{\|H\|}H^2$, l'inégalité $\|H^2\| \leq \|H\| \|H\|$ permet de montrer que

$$\lim_{H\to 0} \epsilon(H) = 0$$

Ceci montre que f est différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ de différentielle $Df_A(H) = AH + HA$.

Retour texte → □

. Exercice 79

1) Soit $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$. Pour tout $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$, on a

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2)$$

Montrons que l'application $L_a : E_1 \times E_2 \to F$ définie par $L_a(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2)$ est linéaire (c'est évident) et continue. Par la proposition III.6.1 il suffit de montrer qu'elle est continue en 0 :

$$\begin{aligned}\|L_a(h)\| = \|L_a(h_1,h_2)\| &= \|f(a_1,h_2) + f(h_1,a_2)\| \\ &\leq \|f(a_1,h_2)\| + \|f(h_1,a_2)\| \\ &\leq \|f\| \|a_1\| \|h_2\| + \|f\| \|h_1\| \|a_2\| \\ &\leq 2\|f\| \|a\| \|h\|.\end{aligned}$$

Montrons que l'application linéaire continue L_a est la différentielle $Df_{(a_1,a_2)}$.
Il s'agit de montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_{E_1\times E_2}} f(h_1, h_2) = 0$.

$$\|f(h_1,h_2)\| \leq \|f\|\ \ \|h_1\| \|h_2\| \leq \|f\| (\max(\|h_1\|, \|h_2\|))^2.$$

Donc

$$\frac{1}{\|h\|} f(h_1,h_2) \leq \|f\| \max(\|h_1\|, \|h_2\|) \to_{h\to 0} 0$$

2) L'application f est bilinéaire. En effet, pour $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, $B \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda A_1 + \mu A_2, B) = (\lambda A_1 + \mu A_2) \circ B = \lambda(A_1 \circ B) + \mu(A_2 \circ B) = \lambda f(A_1, B) + \mu f(A_2, B)$$

par définition de $\lambda A_1 + \mu A_2$ (c'est-à-dire de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(F,G)$. D'autre part, en utilisant la linéarité de $A \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :

$$f(A, \lambda B_1 + \mu B_2) = A \circ (\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda(A \circ B_1) + \mu(A \circ B_2) = \lambda f(A, B_1) + \mu f(A, B_2).$$

On peut alors appliquer le résultat de la question 1) : f est différentiable sur $\mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F)$ et pour tout $(A,B) \in \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F)$ et tout $(H_1,H_2) \in \mathcal{L}(F,G) \times \mathcal{L}(E,F)$, on a :

$$Df_{(A,B)}(H_1,H_2) = A \circ H_2 + H_1 \circ B.$$

Retour texte → □

. Exercice 80

1) La méthode est similaire à celle de la question 1) de l'exercice 79.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \dots \times E_n$, on a

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + \sum_{u \in J} f(u),$$

où J est l'ensemble des n-uplets $(u_1, \dots, u_n)$ tels que pour tout $i = 1, \dots, n$, $u_i \in \{a_i, h_i\}$ et il existe au moins deux indices i_1 et i_2 distincts tels que $u_{i_1} = h_{i_1}$ et $u_{i_2} = h_{i_2}$.

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|} \sum_{u \in J} f(u)$. Par un argument similaire à celui de l'exercice précédent, on a : $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} f(u) = 0$ pour tout $u \in J$. Puisque J est fini, on en déduit que $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

D'autre part, la fonction $h \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est un élément de $\mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$. On en déduit que f est différentiable en $a = (a_1, \dots, a_n)$ de différentielle

$$Df_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_1, \dots, a_{i-1}, h_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

2) Considérons l'application $g_n \colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)^n$ définie par $g_n(A) = (A, \dots, A)$. L'application g_n est une application linéaire continue de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)^n$ donc g_n est différentiable en A de différentielle $D(g_n)_A = g_n$.

L'application $\phi_n : \mathcal{L}(E)^n \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi_n(A_1, \dots, A_n) = A_1 A_2 \dots A_n$ est n-linéaire donc différentiable sur $\mathcal{L}(E)^n$ d'après la question 1, et pour tous $\underline{\mathrm{A}} = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ et $\underline{\mathrm{H}} = (H_1, \dots, H_n) \in \mathcal{L}(E)^n$,

$$D(\phi_n)_{\underline{\mathrm{A}}}(\underline{\mathrm{H}}) = H_1 A_2 \dots A_n + A_1 H_2 A_3 \dots A_n + \dots + A_1 A_2 \dots H_{n-1} A_n + A_1 A_2 \dots A_{n-1} H_n$$

Puisque $f_n = \phi_n \circ g_n$, f_n est donc différentiable sur $\mathcal{L}(E)$ et pour tous $A \in \mathcal{L}(E)$ et $H \in \mathcal{L}(E)$,

$$D(f_n)_A(H) = \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} H A^{n-i}.$$

Retour texte → □

. Exercice 81

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$, donc

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0,$$

ce qui montre que f admet en 0 une dérivée partielle par rapport à x égale à zéro. Même chose par rapport à y par symétrie des rôles.

Faisons tendre (x, y) vers $(0, 0)$ le long de la droite $y = x$: on a

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow_{x \to 0} \frac{1}{2}.$$

Faisons maintenant tendre (x, y) vers $(0, 0)$ le long de la droite $y = 0$: on a

$$f(x, 0) = \frac{0}{2x^2} = 0 \rightarrow_{x \to 0} 0.$$

Les deux limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 82

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{pmatrix}$$

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 83

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 84

1) Les applications composantes de P sont $P_1 \colon (\rho, \theta) \mapsto \rho\cos\theta$ et $P_2 \colon (\rho, \theta) \mapsto \rho\sin\theta$. P_1 et P_2 admettent des dérivées partielles continues relativement à ρ et θ en tout point de $\mathbb{R}^2$, donc P est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$,

$$JP(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \rho} & \frac{\partial P_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \rho} & \frac{\partial P_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

2) Les mêmes arguments montrent que c est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Un simple calcul conduit à :

$$Jc(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

3) Pour tous $x, y \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a :

$$(P \circ c)(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}\cos\arctan\frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2}\sin\arctan\frac{y}{x}).$$

Si $\cos a$ est positif, alors $\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}$. Or $x > 0$ et $y > 0$, donc $\arctan\frac{y}{x} \in]0\frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\arctan\frac{y}{x} > 0$. On a donc :

$$\cos\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

D'autre part,

$$\sin^2 \arctan \frac{y}{x} = 1 - \cos^2 \arctan \frac{y}{x} = 1 - \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Puisque $x > 0$ et $y > 0$, ceci donne :

$$\sin \arctan \frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Donc pour tous $x, y \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on obtient

$$(P \circ c)(x, y) = (x, y).$$

4) D'après la question précédente, on a $D(P \circ c)_{(x,y)} = Id_{\mathbb{R}^2}$, d'où la valeur de la matrice jacobienne $J(P \circ c)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous devons donc montrer que le produit matriciel $JP_{c(x,y)} \times Jc_{(x,y)}$ est égal à la matrice identité. À l'aide des calculs précédents on a effectivement

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Retour texte → □

. Exercice 85

L'application det qui associe à une matrice carrée d'ordre n son déterminant est une application n-linéaire des vecteurs colonnes de la matrice. On identifie l'espace des matrices carrées d'ordre n, $M_n(\mathbb{R})$, avec le produit de n copies de $\mathbb{R}^n$, à savoir $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$. On en déduit que la différentielle de det en une matrice $A = (c_1, \ldots, c_n)$ est égale à

$$D(\det)(A).H = \det(h_1, c_2, \ldots, c_n) + \det(c_1, h_2, \ldots, c_n) + \ldots + \det(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, h_n)$$

où $H = (h_1, \ldots, h_n) \in M_n(\mathbb{R})$.

En particulier, si $A = I$ est la matrice identité, alors $D(\det)(I).H = \mathrm{tr}(H)$ où $\mathrm{tr}(H) = \sum_{i=1}^n h_{ij}$ est la trace de la matrice $H = (h_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

2) On a

$$\det(A + H) = \det(A) \det\left(I + A^{-1}H\right),$$

et d'après ce qui précède on peut écrire

$$\det(I + H) = \det I + \mathrm{tr}(H) + \|H\| \, \varepsilon(H),$$

où $\|.\|$ désigne n'importe quelle norme matricielle. Choisissons par commodité une norme sous-multiplicative (c'est-à-dire vérifiant $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$). En remplaçant H par $A^{-1}H$ on obtient

$$\det\left(I + A^{-1}H\right) = \det I + \mathrm{tr}\left(A^{-1}H\right) + \left\|A^{-1}H\right\| \varepsilon\left(A^{-1}H\right),$$

d'où en multipliant par $\det A$:

$$\det(A + H) = \det A + (\det A) \, \mathrm{tr}\left(A^{-1}H\right) + \|H\| \, \varepsilon_1(H),$$

où on a posé $\varepsilon_1(0) = 0$ et pour $H \neq 0$:

$$\varepsilon_1(H) = (\det A)\frac{\|A^{-1}H\|}{\|H\|}\varepsilon\left(A^{-1}H\right).$$

Comme $H \mapsto A^{-1}H$ est continue et $\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|\,\|H\|$, on a $\lim_{H\to 0}\varepsilon_1(H) = 0$ donc

$$D\det(A).H = \det(A)\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}\circ H\right).$$

Retour texte → □

. Exercice 86

Soit $F_1(P) = \int_0^1 \left(P^3 - P^2\right)(t)dt$, et soit H un polynôme de degré n alors

$$\begin{aligned} F_1(P+H) - F_1(P) &= \int_0^1 \left((P+H)^3 - P^3 - (P+H)^2 + P^2\right)(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left((3P^2-2P)H\right)(t)\,dt + \int_0^1 \left(3PH^2 + H^3 - H^2\right)(t)\,dt \end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_0^1 \left(3PH^2 + H^3 - H^2\right)(t)dt\right| \leq ||H||_\infty^2 \int_0^1 |3P + H - 1|\,(t)dt = o(||H||_\infty)$$

donc

$$DF_1(H) = \int_0^1 \left((3P^2-2P)H\right)(t)\,dt$$

Soit $F_2(P) = P' - P^2$ et soit H un polynôme de degré n alors

$$F_2(P+H) - F_2(P) = (P+H)' - (P+H)^2 - P' + P^2 = H' - 2PH - H^2$$

Or $H^2 = o(||H||)$ (pour toute norme a choisir). On a donc

$$DF_2(H) = H' - 2PH.$$

Retour texte → □

. Exercice 87

1) Notons $<,>$ le produit scalaire Euclidien sur $\mathbb{R}^2$, qui est une application bilinéaire. On a $g(x,y) =< f(x,y) - a, f(x,y) - a >$. L'application g est différentiable en tant que composée et produit de fonctions différentiables, et on a

$$Jg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &=< \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-a), f(x,y)-a > + < f(x,y)-a, \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-a) > \\ &= 2 < \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-a), f(x,y)-a > \end{aligned}$$

et de même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2 < \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-a), f(x,y)-a > .$$

2) L'application f est continue car différentiable et sa norme tend vers l'infini quand $\|(x,y)\|$ tend vers l'infini. Ainsi,

$$\forall A > 0, \exists B > 0, (\|(x,y)\| \geq B \Rightarrow \|f(x,y) - a\| \geq A).$$

Soit $m = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y)$. Posons $A = m+1$ et soit B associé à A comme précédemment. On a alors pour tout (x,y) tel que $\|(x,y)\| \geq B$,

$$g(x,y) = \|f(x,y) - a\|^2 \geq A^2 = (m+1)^2 \geq m+1$$

Donc

$$m = \inf_{\|(x,y)\|\leq B} g(x,y).$$

La boule fermée $\overline{B(0,B)}$ étant compacte et g continue, g atteint sa borne inférieure en un point $X_0 = (x_0, y_0) \in \overline{B(0,B)}$.

Comme X_0 est un minimum de g sur $\mathbb{R}^2$, c'est aussi un minimum de la restriction de g sur toute droite passant par X_0. Comme la dérivée d'une fonction réelle en un minimum est nulle, toute les dérivées partielles de g sont nulles et donc $Dg_{X_0} = 0$ et par conséquent la matrice jacobienne de g en X_0 est nulle.

3) D'après la question 2), on a en (x_0, y_0),

$$< \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - a), f(x,y) - a >= 0 \text{ et } < \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) - a), f(x,y) - a >= 0.$$

Comme Df_{X_0} est injective, ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent les projections de $f(x,y) - a$ sur la base $(\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0))$ sont nulles et donc $f(x_0,y_0) - a = 0$, ce qui équivaut à $f(x_0,y_0) = a$. Donc a admet un antécédent par f. Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}^2$, on a montré que f est surjective.

Retour texte → $\square$

. Exercice 88

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en a admettant en a un extremum local. Montrons que que $Df_a = 0$. On a

$$f(a+h) = f(a) + Df_a(h) + ||h||\, \epsilon(h), \quad \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0.$$

Supposons que f admette un minimum local en a (la démonstration est similaire pour un maximum), c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V, f(x) - f(a) \geq 0$.

Soit $h \in E$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$, $a + th \in V$. Alors pour tout $t \in]-\eta, \eta[$, on a : $f(a+th) - f(a) \geq 0$, et donc

$$0 \leq Df_a(th) + ||th||\, \epsilon(th) = tDf_a(h) + |t|\, ||h|| \epsilon(th)$$

Pour $t > 0$, en divisant par $t = |t|$ on a : $Df_a(h) + ||h|| \epsilon(th) \geq 0$. Par passage à la limite $t \to 0$, on obtient $Df_a(h) \geq 0$.

Pour $t < 0$, en divisant par $t = -|t|$ on a : $Df_a(h) - ||h|| \epsilon(th) \leq 0$. Par passage à la limite $t \to 0$, on obtient $Df_a(h) \leq 0$.

Donc $Df_a(h) = 0$, et ce pour tout $h \in E$.

Retour texte → $\square$

. Exercice 89 On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 + xy^2 - x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4(y^3 + yx^2 - y).$$

Les point critiques de f sont donc les solutions de

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - x = & 0 \\ y^3 + yx^2 - y = & 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = & 0 \\ y(x^2 + y^2 - 1) = & 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{ou } x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{ou } y = 0 \end{cases}$$

Donc (x, y) est un point critique si et seulement si $(x, y) = (0, 0)$ ou $x^2 + y^2 = 1$.

Déterminons la nature de ces points critiques.

On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 - 1)$$
$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(3y^2 + x^2 - 1)$$
$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy.$$

En $(x, y) = (0, 0)$, on a : $rt - s^2 = 8 > 0$ et $r < 0$. Donc f admet un maximum en ce point et $f(0, 0) = 0$.

En (x, y) tel que $x^2 + y^2 = 1$, on a : $r = 8x^2$ et $t = 8y^2$, donc $rt - s^2 = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 = 0$. Donc on ne peut pas conclure en utilisant le théorème. En ces points, on a $f(x, y) = -1$.

NB : on peut visualiser la surface d'équation $z = f(x, y)$ en remarquant qu'il s'agit d'une surface de révolution autour de l'axe $0z$ et en traçant la courbe de la fonction $g\colon x \mapsto f(x, 0) = x^4 - 2x^2$, qui est paire. Sur l'intervalle, $[0, 1]$, la fonction g est strictement décroissante de 0 à -1, sa dérivée s'annule en 1, puis g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Retour texte → □

. Exercice 90 On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$
$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$

En $(0, 0)$, $rt - s^2 = -9 < 0$, donc f admet un point selle (pas d'extremum local) au point $(0, 0)$.

En $(1, 1)$, $rt - s^2 = 27 > 0$ et $r > 0$, donc f admet un minimum local en $(1, 1)$.

Retour texte → □

Huitième partie

Le théorème d'inversion locale

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels normés considérés sont de dimension finie.
Nous allons généraliser le résultat suivant :

Théorème VIII.0.1. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $]a,b[$ telle que en $x_0 \in]a,b[, f'(x_0) \neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert $I \subset]a,b[$ contenant x_0 et un un intervalle ouvert de J tels que la restriction de f à I soit un difféomorphisme de I sur J.*

VIII.1 Homéomorphismes et difféomorphismes

Définition VIII.1.1. *Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F.*

Une application $f : U \to V$ est un ***homéomorphisme*** *si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues.*

Une application $f : U \to V$ est un ***difféomorphisme*** *si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe C^1.*

Remarque. f difféomorphisme $\Rightarrow$ f homéomorphisme.

Réciproque fausse : une application $f : U \to V$ de classe C^1 peut admettre une fonction inverse f^{-1} continue sans être un difféomorphisme. Par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est bijective et C^1. Son inverse est $f^{-1}(y) = x^{1/3}$ qui est continue mais pas différentiable en 0.

La proposition suivante donne une condition pour qu'un homéomorphisme est un difféomorphisme :

Proposition VIII.1.2. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts. Soit $f : U \to V$ un homéomorphisme de classe C^1. Alors f est un difféomorphisme si et seulement si pour tout $x \in U$, la différentielle Df_x est un isomorphisme de E sur F, auquel cas, on a :*

$$D(f^{-1})_{f(a)} = (Df_a)^{-1}$$

Remarque. Si en un point $x \in U$, la différentielle est un isomorphisme, alors en particulier $\dim E = \dim F$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Si f est un difféomorphisme, alors en particulier f^{-1} est inversible et $f^{-1} \circ f = Id_U$ et $f \circ f^{-1} = Id_V$. Donc pour tout $a \in U$ et $b = f(a)$,

$$D(f^{-1})_b \circ Df_a = Id_E \quad \text{et} \quad Df_a \circ D(f^{-1})_b = Id_F$$

Ceci prouve que Df_a est inversible d'inverse $D(f^{-1})_b$.

$\Leftarrow$ Soit $a \in U$. Supposons Df_a inversible. Posons $b = f(a)$, et $A = Df_a$.

a) Montrons que f^{-1} est différentiable en b de différentielle A^{-1}.

— Soit $k \in F$ tel que $b + k \in V$. Posons

$$\gamma_1(k) = f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) - A^{-1}(k) = f^{-1}(b+k) - a - A^{-1}(k)$$

On doit montrer que

$$\lim_{k \to 0} \frac{||\gamma_1(k)||}{||k||} = 0$$

— Exprimons $\gamma_1(k)$. Pour cela, exprimons la différentiabilité de f en a. Pour $h \in E$ tel que $a+h \in U$, on a :

$$f(a+h) = b + A(h) + o(h) \tag{1}$$

où $o(h) = ||h||\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.
Posons

$$\gamma(k) = f^{-1}(b+k) - a.$$

D'après (1),

$$b+k = f(f^{-1}(b+k)) = f(a+\gamma(k)) = b + A(\gamma(k)) + o(\gamma(k))$$

et donc

$$k = A(\gamma(k)) + o(\gamma(k)). \tag{2}$$

Comme

$$\gamma(k) = A^{-1}(k) + \gamma_1(k),$$

en appliquant A^{-1} à la relation (2) on obtient :

$$\gamma_1(k) = \gamma(k) - A^{-1}(k) = A^{-1}\left(k - o\left(\gamma(k)\right)\right) - A^{-1}(k) = -A^{-1}\left(o\left(\gamma(k)\right)\right)$$

On doit donc montrer que

$$\lim_{k\to 0} \frac{||A^{-1}(o(\gamma(k))||}{||k||} = 0$$

— Posons $||A^{-1}|| = M$.

$$\text{Si } v = A(w), \text{ i.e.,} w = A^{-1}(v) \text{ alors } ||w|| \leq M||v||. \tag{3}$$

En particulier, pour $w = \gamma(k)$ on obtient :

$$\frac{1}{M}||\gamma(k)|| \leq ||A(\gamma(k))|| \tag{4}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, on peut choisir $\eta > 0$ tel que

$$||h|| < \eta \ \Rightarrow ||\epsilon(h)|| < \frac{1}{2M} \tag{5}$$

Donc si $||\gamma(k)|| < \eta$, ce qui est vrai dès que k est suffisamment petit puisque γ est continue, alors $||\epsilon(\gamma(k))|| < \frac{1}{2M}$, et donc par définition de $o(\gamma(k))$,

$$||o(\gamma(k))|| \leq \frac{1}{2M}||\gamma(k)|| \tag{6}$$

D'autre part, la relation (2) entraîne :

$$||k|| = ||A(\gamma(k)) + o(\gamma(k))|| \geq | \ ||A(\gamma(k))|| - ||o(\gamma(k))|| ||,$$

Des relations (4) et (6), on obtient donc : $(\frac{1}{M} - \frac{1}{2M})||\gamma(k)|| \leq ||k||$, c'est-à-dire

$$||\gamma(k)|| \leq 2M||k|| \tag{7}$$

Finalement en appliquant l'inégalité (3) à $v = o(\gamma(k))$ puis en utilisant (7), on obtient :

$$\begin{aligned} ||A^{-1}(o(\gamma(k))|| &\leq M||o(\gamma(k)|| \\ &\leq M||\gamma(k)||\ ||\epsilon(\gamma(k)|| \\ &\leq 2M^2||k||\ ||\epsilon(\gamma(k)|| \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{||A^{-1}(o(\gamma(k))||}{||k||} \leq 2M^2||\epsilon(\gamma(k)||,$$

qui tend bien vers 0 quand k tend vers 0.

b) Montrons que $\mathbf{D(f^{-1}) : V \to \mathcal{L}(F, E)}$ est continue sur $\mathbf{V}$.

Comme, $D(f^{-1})_y = (Df_{f^{-1}(y)})^{-1}$, on a : $D(f^{-1}) = \mathrm{Inv} \circ Df \circ f^{-1}$ où Inv désigne l'application $\mathrm{Inv} : Gl(E, F) \to Gl(E, F)$ définie par $\mathrm{Inv}(u) = u^{-1}$. Donc $D(f^{-1})$ est continue comme composée d'applications continues.

□

VIII.2 Le théorème d'inversion locale

Définition VIII.2.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est un* ***difféomorphisme local*** *en a s'il existe un ouvert $U_1 \subset U$ contenant a et un ouvert V de F tel que f se restreigne en un difféomorphisme de U_1 sur V.*

Il résulte de la proposition VIII.1.2 que si f est un difféomorphisme local en a, alors Df_a est inversible.

Le théorème suivant dit que la réciproque est vraie :

Théorème VIII.2.2 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soient E et F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, et soit $f : U \to F$ une application de classe C^1. Soit $a \in U$ tel que Df_a soit inversible. Alors f est un difféomorphisme local en a.*

La démonstration sera donnée plus loin.

Application. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y^4, y + x^3y)$. Alors f est un difféomorphisme local en $(0, 0)$ car sa matrice jacobienne

$$Jf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Cela entraîne que si (a, b) est assez proche de $f(0, 0) = (0, 0)$, alors le système d'équations

$x + y^4 = a$

$y + x^3y = b$

admet une solution $(x(a, b), y(a, b))$ qui dépend différentiablement de (a, b) et telle que $x(0, 0) = 0$ et $y(0, 0) = 0$.

Si on essaie de faire la résolution explicite, on a à résoudre l'équation du treizième degré $y + (a - y^4)^3y = b$, ce qui n'est pas facile !

VIII.3 Démonstration du théorème d'inversion locale

Soit $f : U \to F$ une application de classe C^1 et soit $a \in U$ tel que Df_a soit inversible.

Puisque l'on travaille en dimension finie, on a $\dim E = \dim F$ et on peut supposer sans perdre en généralité que $E = F = \mathbb{R}^n$.

Première étape. On se ramène au cas où $a = 0$, $f(a) = 0$ et $Df_a = Id_E$ en remplaçant f par : $h(x) = (Df_a)^{-1}(f(x+a) - f(a))$.

En effet, on a bien $h(0) = 0$ et $Dh_0 = (Df_a)^{-1} \circ Df_a = Id_E$.

Par ailleurs, f est un difféomorphisme local en a si et seulement si h est un difféomorphisme local en 0.

Deuxième étape. Pour montrer que h est un difféomorphisme local, il faut montrer que l'équation $y = h(x)$, où y est donné proche de $h(0) = 0$ admet une unique solution proche de 0.

Considérons $g : U \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = x - h(x)$ et posons $\tilde{g}(x) = g(x) + y$. On a :

$$y = h(x) \Leftrightarrow \tilde{g}(x) = x$$

Nous allons appliquer le théorème du point fixe à $\tilde{g}$ sur un fermé de $\mathbb{R}^n$.

On a

$$Dg_0 = Id_{\mathbb{R}^n} - Dh_0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)},$$

or Dg est continue en 0 puisque f est C^1. Donc il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(0,r)$ soit contenue dans U et tel que

$$\forall x \in B(0,r), ||Dg_x|| < \frac{1}{2}.$$

Appliquons le théorème de la moyenne à g dans le convexe $B(0,r)$:

$$\forall x, x' \in B(0,r), ||g(x) - f(x')|| \leq \frac{1}{2}||x - x'|| \tag{8}$$

et donc, on a aussi :

$$\forall x, x' \in B(0,r), ||\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x')|| \leq \frac{1}{2}||x - x'||$$

Pour $x' = 0$, on obtient en particulier :

$$\forall x \in B(0,r), ||\tilde{g}(x) - y|| \leq \frac{1}{2}||x||,$$

donc $\tilde{g}(B(0,r)) \subset B(y, r/2)$. En choisissant y dans $B(0,r/2)$ on obtient :

$$\tilde{g}(B(0,r)) \subset B(0,r).$$

Par conséquent pour y fixé dans $B(0,r/2)$, la restriction $\tilde{g} : B(0,r) \to B(0,r)$ est une contraction de rapport 1/2. Par le théorème du point fixe il en résulte qu'il existe un unique $x \in B(0,r)$ tel que $x = \tilde{g}(x)$, c'est à-dire tel que $h(x) = y$.

Conclusion : h est une bijection du voisinage ouvert de 0

$$\Omega = B(0,r) \cap h^{-1}(B(0,r/2))$$

sur le voisinage ouvert $B(0,r/2)$ de $h(0) = 0$.

Troisième étape. Notons $h^\sharp : \Omega \to B(0,r/2)$ la restriction de h. D'après ce qui précède $h^\sharp$ est une bijection. De plus, $h^\sharp$ est de classe C^1 par hypothèse. Donc d'après la proposition VIII.1.2, pour montrer que $h^\sharp$ est un difféomorphisme il reste à démontrer que $(h^\sharp)^{-1}$ est continue sur $B(0,r/2)$.

Soient $y, y' \in B(0,r/2)$. Posons $x = (h^\sharp)^{-1}(y)$ et $x' = (h^\sharp)^{-1}(y')$. D'après (8), on a :

$$||(h^\sharp)^{-1}(y) - (h^\sharp)^{-1}(y')|| = ||x - x'|| = ||h(x) - h(x') + g(x) - g(x')||$$

Donc

$$||(h^\sharp)^{-1}(y) - (h^\sharp)^{-1}(y')|| \leq ||y - y'||$$

En particulier $(h^\sharp)^{-1}$ est continue.

Exercice 91. Calculer la matrice jacobienne des applications suivantes. En quels points peut-on appliquer le théorème d'inversion locale ?

a)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x^2+y^2, x^2-y^2) \end{array}$$

b)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\sin x \cosh y, \cos x \sinh y) \end{array}$$

c)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y^2, y+z^2, z+x^2) \end{array}$$

Correction →

Exercice 92. Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de E. Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ une application de classe C^1.

Démontrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$ si et seulement si

1. f est injective
2. $\forall u \in \mathcal{U}$, $Df(u)$ est un isomorphisme de E sur F.

Correction →

Exercice 93. 1) Démontrer que l'application

$$P: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\rho,\theta) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.

2) Déterminer un ouvert maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que la restriction $P_{|U}$ de P à U soit un difféomorphisme de U sur $P(U)$. Décrire $P(U)$.

3) Pour $(x,y) \in P(U)$, calculer $D(P^{-1})(x,y)$.

Correction →

Exercice 94. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\tilde{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

1) Calculer les dérivées partielles de $\tilde{f}$ en fonction de celles de f.

2) Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Correction →

Exercice 95. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui sont solutions de

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

Correction →

VIII.4 Correction des exercices

. Exercice 91

a) La matrice jacobienne est :

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

On ne peut appliquer le théorème d'inversion locale en aucun point puisque les dimensions des espaces d'arrivée et de départ sont différentes.

b) La matrice jacobienne est :

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \cosh y & \sin x \sinh y \\ -\sin x \sinh y & \cos x \cosh y \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $Jf(x,y)$ est nul si et seulement si $\cos^2 x \cosh^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y = 0$, qui équivaut à $\cos x = 0$ et $\sinh y = 0$, c'est-à dire à $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $y = 0$.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale en tout point de

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; y = 0\}.$$

c) La matrice jacobienne est :

$$Jf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|Jf(x,y,z)| = 1 + 8xyz$. Donc on peut donc appliquer le théorème d'inversion locale en tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 + 8xyz = 0\}$.

Retour texte → □

. Exercice 92

L'implication $\Rightarrow$ est claire d'après la définition d'un difféomorphisme de classe C^1.

$\Leftarrow$ Supposons que f est injective et que $\forall u \in \mathcal{U}$, $Df(u)$ est un isomorphisme de E sur F.

Puisque f est injective, la restriction à l'arrivée $f \colon \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ est bijective. Il faut montrer que $f(\mathcal{U})$ est un ouvert de F et que $f^{-1} \colon f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ est de classe C^1 sur $f(\mathcal{U})$.

Soit $v \in f(\mathcal{U})$ et soit $u = f^{-1}(v)$. Comme $Df(u)$ est un isomorphisme de E sur F, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert Ω de u dans $\mathcal{U}$ et un voisinage ouvert W de v dans F tels que la restriction $f_{|\Omega} \colon \Omega \to W$ soit un C^1-difféomorphisme. Donc W est un ouvert de F tel que $v \in W$ et $W \subset f(\mathcal{U})$. Donc $f(\mathcal{U})$ est un ouvert de F.

De plus, $(f_{|\Omega})^{-1}$ est de classe C^1, et comme ceci est valable pour tout v dans $f(\mathcal{U})$, on en déduit que $f^{-1} \colon f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ est de classe C^1 sur $f(\mathcal{U})$.

Retour texte → □

. Exercice 93

1) La matrice jacobienne de P est :

$$JP(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

Son déterminant est égal à ρ, qui est non nul sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Donc d'après le théorème d'inversion locale, P réalise un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

2) On se restreint à un ouvert maximal sur lequel P est bijective. Par exemple, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{+*} \times]-\pi, \pi[$ convient.

3) Posons $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Alors $D(P^{-1})(x, y) = (DP(\rho, \theta))^{-1}$. Donc

$$JP^{-1}(x, y) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

ce qui donne :

$$JP^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Remarque : en fait, on a

$$P^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$$

En effet, posons $z = x + iy$, $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi[$ et $\alpha = \arg(\arg 1 + \frac{z}{|z|}) \in]-\pi, \pi[$. Les points du plan complexe d'affixes $0, 1, z$ et $1 + \frac{z}{|z|}$ sont les sommets d'un parallélogramme, donc $\theta = 2\alpha$, et $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{2}$. Nous obtenons donc

$$\theta = 2\arctan\tan(\alpha).$$

De plus, puisque $1 + \frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ce qui donne $\tan\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$, d'où la formule magique !

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 94

On a :

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\rho}(\rho, \theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}(\rho, \theta) = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On utilise l'exercice 93. On sait que $P\colon \mathbb{R}^{*+} \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^{*-} \times \{0\}$ est un C^1-difféomorphisme. Donc l'application f, définie et différentiable sur $V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^{*-} \times \{0\}$, est solution de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

si et seulement si l'application $\widetilde{f} = f \circ P$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\rho}(\rho, \theta) = 1$$

Les solutions de cette dernière équation sont de la forme $\widetilde{f}(\rho, \theta) = \rho + g(\theta)$. Donc les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$f(x, y) = \widetilde{f} \circ P^{-1}(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(\Psi(x, y)),$$

où $\Psi(x, y) = \theta$ avec $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$

. Exercice 95

On cherche un C^1-difféomorphisme $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$ tel que le premier membre de l'équation

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \beta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad (1)$$

devienne $\frac{\partial g}{\partial u}$ où $g(u,v) = f(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$.

Posons

$$\phi(u,v) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v).$$

Alors

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ d'inverse

$$\phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{-\beta x + \alpha y}{\alpha^2+\beta^2}\right),$$

et f est solution de (1) si et seulement si $g = f\circ\phi$ est solution de

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \qquad (2)$$

Les solutions de (2) sont les fonctions $g(u,v) = \psi(v)$ où ψ est C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et les solutions de (1) sont donc les fonctions

$$f(x,y) = \psi\left(\frac{-\beta x + \alpha y}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

Retour texte → □

Neuvième partie

Théorème des fonctions implicites

Considérons l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On sait expliciter la variable y en fonction de x sur un voisinage ouvert U d'un point $y_0 > 0$: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Cet exemple est particulier : en général, étant donné f, on ne peut pas décrire explicitement une variable en fonction de l'autre.

Comme son nom l'indique, le théorème des fonctions implicites donne des conditions pour que, dans une équation du type $f(x,y) = 0$, l'on puisse exprimer localement une variable en fonction de l'autre.

IX.1 Énoncé du théorème

Soient n, p et q trois entiers, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application différentiable sur U. Si $(x,y) \in U$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$, on notera $f(x,y)$ la valeur de f en (x,y).

Fixons $(a,b) \in U$.

Définition IX.1.1. *L'application $x \mapsto f(x,b)$ est définie sur un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et est différentiable en a. On note $D_1 f_{(a,b)}$ sa différentielle et on l'appelle la **différentielle partielle de** f par rapport à la variable x.*

*De même, on note $D_2 f_{(a,b)}$ la différentielle au point b de l'application $y \mapsto f(a,y)$ et on l'appelle la **différentielle partielle de** f par rapport à la variable y.*

Ceci généralise la notion de dérivée partielle. En effet, lorsque $n = p = q = 1$, alors pour $h \in \mathbb{R}$, on a : $D_1 f_{(a,b)}.h = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).h$ et $D_2 f_{(a,b)}.h = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).h$.

Précédemment, nous avons démontré une relation entre la différentielle d'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\forall h = (h_1, \ldots, h_n), Df_a(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Avec exactement les mêmes arguments, on obtient une relation entre les différentielles partielles et la différentielle d'une application $f : U \to \mathbb{R}^q$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

Proposition IX.1.2. *Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,*

$$Df_{(a,b)}(h,k) = D_1 f_{(a,b)}.h + D_2 f_{(a,b)}.k$$

À présent, nous disposons de tous les ingrédients pour énoncer le :

Théorème IX.1.3 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient n et p deux entiers, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1 sur U. Soit $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$. On suppose que la différentielle partielle $D_2 f_{(a,b)}$ est inversible.*

Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\phi : V \to W$ tels que

$$\big((x,y) \in V \times W \ \ et f(x,y) = 0\big) \iff \big(x \in V \ \ et\ y = \phi(x)\big)$$

De plus, pour tout $x \in V$ et $y = \phi(x)$, on a :

$$D\phi_x = -[D_2 f_{(x,y)}]^{-1} \circ D_1 f_{(x,y)}$$

Remarque Dire que $D_2f_{(a,b)}$ est inversible équivaut à dire que la matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\leq i,j\leq p}$$

est inversible.

IX.2 Interprétation géométrique

Le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+p}$ défini par l'équation $f(x,y)=0$ est localement, au voisinage du point (a,b), le graphe d'une application $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$.

Cas particuliers

$n=p=1$: courbes dans $\mathbb{R}^2$

$n=2, p=1$: surfaces dans $\mathbb{R}^3$

IX.3 Démonstration du théorème

Considérons l'application $F:U\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ définie par $F(x,y)=(x,f(x,y))$. Comme $f(a,b)=0$, on a $F(a,b)=(a,0)$. Calculons la différentielle de F au point (a,b) :

$$DF_{(a,b)}(h,k)=\big(h,Df_{(a,b)}(h,k)\big)=(h,D_1f_{(a,b)}.h+D_2f_{(a,b)}.k)$$

On constate que $DF_{(a,b)}$ est inversible. En effet, pour (z,t) fixé dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, l'équation $DF_{(a,b)}(h,k)=(z,t)$ admet pour unique solution : $h=z$ et $k=[D_2f_{(a,b)}]^{-1}(t-D_1f_{(a,b)}.z)$.

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à F en (a,b) : il existe un voisinage ouvert U_1 de (a,b) dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ et un ouvert W_1 de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ contenant $F(a,b)=(a,0)$ tels que F se restreigne en un difféomorphisme de U_1 sur W_1. Quitte à restreindre U_1, on peut supposer que $U_1=V_1\times V_2$ où V_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et V_2 un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant b. Le difféomorphisme inverse de $F_{|U_1}$ est l'application $G:W_1\to V_1\times V_2$ de classe C^1 de la forme

$$G(z,t)=(z,g(z,t))$$

pour une certaine fonction $g:W_1\to V_2$ de classe C^1.

Si $(x,y)\in U_1=V_1\times V_2$, alors l'équation $f(x,y)=0$ est équivalente à $F(x,y)=(x,0)$ et donc à $(x,y)=G(x,0)$, c'est-à dire $y=g(x,0)$.

L'ouvert $V=\{x\in V_1,\ (x,0)\in W_1\}$ contient a et si pour tout $x\in V$ on pose $\phi(x)=g(x,0)$, alors $\phi(x)$ est l'unique solution $y\in V_2$ de l'équation $f(x,y)=0$.

Pour calculer $D\phi_x$, on pose $y=\phi(x)$ et on différencie la relation $f(x,\phi(x))=0$: pour tout $h\in\mathbb{R}^n$,

$$D_1f_{(x,y)}.h+(D_2f_{(x,y)}\circ D\phi_x).h=0$$

Exercice 96. On considère la courbe du plan définie par l'équation

$$x^3+y^3-3xy=0$$

1) En posant $y=tx, t\in\mathbb{R}$, exprimer cette courbe par des équations paramétriques $x=x(t), y=y(t)$.

2) En utilisant le théorème des fonctions implicites, déterminer la tangente à la courbe au point $(x(1),y(1))$.

Correction →

Exercice 97. Soit $E = \mathbb{R}^n$ où n est un entier ≥ 1 et $f : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{L}(E),\ f(A, B) = B - \frac{1}{2}(Id - A + B)^2$$

1) Déterminer la différentielle de f.

2) Le théorème des fonctions implicites s'applique-t-il à f au voisinage de $(Id, 0) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$?

Correction →

Exercice 98. Soit $P_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ un polynôme à coefficients réels.

On pose $a = (a_0, \ldots, a_n)$. Fixons $a^* = (a_0^*, \ldots, a_n^*)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

On suppose que P_{a^*} possède une racine réelle x_0^*.

Ecrire une condition suffisante pour que, pour a proche de a^*, le polynôme P_a possède une racine réelle x_0 proche de x_0^* dépendant différentiablement de a.

Correction →

IX.4 Correction des exercices

. Exercice 96

On considère la courbe du plan définie par l'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

1) Remplaçons $y = tx, t \in \mathbb{R}$ dans cette équation. On obtient : $x^3 + t^3x^3 - 3x^2t = 0$, c'est-à-dire $x^2[(1 + t^3)x - 3t] = 0$. Ceci donne :

$$x(t) = \frac{3t}{1 + t^3} \quad \text{et } y(t) = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

2) Déterminons la tangente à la courbe au point $(x(1), y(1))$.

On a $x(1) = y(1) = \frac{3}{2}$.

La matrice jacobienne de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ est :

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y & 3y^2 - 3x \end{pmatrix},$$

donc

$$Jf\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{4} - \frac{9}{2} & \frac{27}{4} - \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

Puisque $\frac{9}{4} \neq 0$, $D_2f_{(1,1)}$ est inversible. Donc il existe des voisinages U et V de $\frac{3}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et une application $\phi\colon U \to V$ de classe C^1 telle que pour tous $(x, y) \in U \times V$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$ et on a :

$$\phi'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}.$$

donc la pente de la tangente à la courbe au point $(x(1), y(1))$ est : $\phi'(\frac{3}{2}) = -1$.

Retour texte → □

. Exercice 97

Soit $f : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{L}(E),\ f(A,B) = B - \frac{1}{2}(Id - A + B)^2$$

1) Déterminons la différentielle de f.

En développant l'expression de f, on obtient :

$$f(A,B) = -\frac{1}{2}(Id - 2A + A^2 - BA + B^2 - AB).$$

L'application $(A,B) \mapsto 2A$ est linéaire, l'application $(A,B) \mapsto -BA - AB$ est bilinéaire, et

$$(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 = A^2 + AH + HA + \|H\|\,\epsilon_1(H),$$
$$(B+K)^2 = B^2 + BK + KB + K^2 = B^2 + BK + KB + K^2 + \|K\|\,\epsilon_2(K),$$

donc on obtient la différentielle en utilisant un exercice antérieur :

$$Df(A,B)(H,K) = -\frac{1}{2}(-2H + AH + HA + BK + KB - BH - KA - AK - HB).$$

2) On a bien $f(Id, 0) = 0$. Le théorème des fonctions implicites s'applique à f au voisinage de $(Id, O) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $D_1f(A,B)$ ou $D_2f(A,B)$ est un isomorphisme, où $D_1f(A,B)$ ou $D_2f(A,B)$ sont définies par :

$$Df(A,B)(H,K) = D_1f(A,B).H + D_2f(A,B).K.$$

Par identification avec l'expression de $Df(A,B)(H,K)$ de la question 1, on trouve :

$$D_1f(A,B).H = -\frac{1}{2}(-2H + AH + HA - BH - HB)$$

et

$$D_2f(A,B).K = -\frac{1}{2}(BK + KB - KA - AK)$$

On a

$$D_2f(Id,0).K = -\frac{1}{2}(-K - K) = K$$

Donc $D_2f(Id,0) = Id$, c'est un isomorphisme !

Donc le théorème des fonctions implicites s'applique à f au voisinage de $(Id,0)$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $(Id,0)$, le sous ensemble $\{(A,B) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \colon f(A,B) = 0\}$ est localement le graphe d'une application $\phi \colon \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ telle que $A \mapsto B = \phi(A)$.

Retour texte → □

. Exercice 98

Considérons la fonction $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(a,x) = P_a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Fixons $a^* = (a_0^*, \ldots, a_n^*)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que P_{a^*} possède une racine réelle x_0^*, c'est-à-dire telle que $f(a^*, x_0^*) = 0$. Pour que pour tout a proche de a^*, le polynôme P_a possède une racine réelle x_0 proche de x_0^* dépendant différentiablement de a, il suffit de montrer que l'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à f avec l'hypothèse $D_2f(a^*, x_0^*) \neq 0$. Autrement dit, la condition $D_2f(a^*, x_0^*) \neq 0$ est la condition suffisante cherchée. Cette condition équivaut à : $P'_{a^*}(x_0^*) \neq 0$, et puisque l'on a déjà $P_{a^*}(x_0^*) = 0$, la condition $D_2f(a^*, x_0^*) \neq 0$ équivaut à : x_0^* est une racine simple de P_{a^*}.

Retour texte → □

Dixième partie

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ - Extrema liés

X.1 Sous-variétés

Définition X.1.1. *Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une **sous-variété différentiable** de dimension $p \leq n$ de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\phi : U_a \to V_a \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\phi(U_a \cap M) = V_a \cap (\mathbb{R}^p \times \{0_{\mathbb{R}^{n-p}}\})$$

*Si ϕ est de classe C^n, on parle de **sous-variété** C^n. Si ϕ est de classe C^∞, on parle de **sous-variété lisse**.*

X.2 Submersions

Définition X.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une application de classe C^1 $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ est une **submersion** sur Ω si pour tout $a \in \Omega$, la différentielle Df_a est surjective.*

Théorème X.2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ une submersion avec $k < n$. Alors le sous-ensemble $M = f^{-1}(0)$ de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $n-k$ de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f(x) = 0$ est une **équation** de M.*

Preuve Fixons $a \in \Omega$. Puisque Df_a est de rang k, alors la matrice jacobienne de f possède k colonnes linéairement indépendantes. Quitte à composer f par un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui permute les variables, on peut supposer qu'il s'agit des k dernières colonnes.

On définit $F : \Omega \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ par :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-k}, f(x)).$$

La matrice jacobienne de F s'écrit :

$$JF_a = \begin{pmatrix} & \mathbf{1_{n-k}} & & & \mathbf{0} & \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-k}}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_{n-k}}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

JF_a est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local au voisinage de a : il existe un voisinage ouvert U_a de a dans $\mathbb{R}^n$ et un ouvert V_a de $\mathbb{R}^n$ tel que $F : U_a \to V_a$ soit un difféomorphisme. On vérifie aisément que $F(U_a \cap M) = V_a \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0_{\mathbb{R}^k}\})$.

X.3 Espace tangent à une sous-variété

Théorème X.3.1. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$ d'équation $f(x) = 0$, où $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ désigne une submersion avec $k < n$. Alors*

1. M est partout localement le graphe d'une application $\phi : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$

2. Pour tout $x \in M$, $\ker Df_x$ est formé des vecteurs vitesses de courbes de classe C^1 tracées sur M et passant par x.

Preuve 1) Posons $f = (f_1, \dots, f_k)$. Soit $a \in M$.

Puisque f est une submersion, la matrice jacobienne Jf_a admet k colonnes linéairement indépendantes. Quitte à permuter les variables, on peut supposer que ce sont les k dernières. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons $x = (x_1, \dots, x_{n-k})$ et $y = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$. et regardons f comme $(x, y) \to f(x, y)$. Alors $D_2 f_a$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^k$, donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $(a_1, \dots, a_{n-k})$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$, un voisinage V de $(a_{n-k+1}, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{R}^k$ et une application $\phi : U \to V$ tels que

$$\big(x \in U, y \in V \text{ et } f(x, y) = 0\big) \Leftrightarrow \big(x \in U \text{ et } y = \phi(x)\big)$$

i.e. M est localement le graphe de ϕ au voisinage du point a.

2) Soit $c : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 tracée sur M et passant par a, c'est-à-dire : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $c(0) = a$ et $\forall t \in I, f(c(t)) = 0$. Alors

$$(f \circ c)'(0) = Df_a(c'(0)) = 0$$

Donc $c'(0) \in \ker Df_a$.

Réciproquement, soit $(h_x, h_y) \in \ker Df_a$.

Posons $A = (a_1, \dots, a_{n-k})$ et considérons la courbe définie par

$$c_x(t) = A + th_x \text{ et } c_y(t) = \phi(A + th_x)$$

Alors $\forall t \in I, c(t) \in M$, et $c'(0) = (h_x, c_y'(0))$ avec $c_y'(0) = D\phi_A(h_x)$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites,

$$c_y'(0) = -D_2 f_a^{-1} \circ D_1 f_a(h_x).$$

Or $(h_x, h_y) \in \ker Df_a$ implique que $Df_a h = D_1 f_a(h_x) + D_2 f_a(h_y) = 0$. Donc

$$c_y'(0) = h_y.$$

Définition X.3.2. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ définie par une équation $f(x) = 0$, où $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ désigne une submersion avec $k < n$. On appelle **espace tangent à M au point** $a \in M$ le sous-espace vectoriel $\ker Df_a$. Il est noté $T_a M$.*
Le sous-espace affine tangent à M en a est défini par $a + T_a M$.

Exemples

1. **Courbes dans $\mathbb{R}^2$**
   $k = 1$ et $n = 2$. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ submersion. On considère la courbe $M \subset \mathbb{R}^2$ donnée par l'équation $f(x, y) = 0$. Alors en $a = (x_0, y_0) \in M$, la droite affine tangente $a + T_a M$ est donnée par l'équation :
   $$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$
   car c'est l'ensemble des (x, y) tels que $(x, y) - a = (x - x_0, y - y_0) \in \ker f_a$.
2. **Surfaces dans $\mathbb{R}^3$**
   $k = 1$ et $n = 3$. $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ submersion. On considère la surface $M \subset \mathbb{R}^3$ donnée par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Alors en $a = (x_0, y_0, z_0) \in M$, le plan affine tangent $a + T_a M$ est donnée par l'équation :
   $$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$
   car c'est l'ensemble des (x, y, z) tels que $(x, y, z) - a = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \ker f_a$.

X.4 Extrema liés

On recherche les extrema de la restriction à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ d'une fonction de n variables.

Théorème X.4.1. *(Théorème des multiplicateurs de Lagrange). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^k$ une submersion. On considère la sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ d'équation $g(x) = 0$.*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Si la restriction $f_{|M}$ admet un extremum local au point $a \in M$, alors il existe k réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que :

$$Df_a = \lambda_1 D(g_1)_a + \cdots + \lambda_k D(g_k)_a$$

Définition X.4.2. *Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ s'appellent des **multiplicateurs de Lagrange**.*

Démonstration. Si a est extremum local de $f_{|M}$, alors pour toute courbe c tracée sur M telle que $c'(0) = a$, $f \circ c$ admet un extremum en 0, donc $(f \circ c)'(0) = 0$, i.e. $c'(0) \in \ker Df_a$. Mais d'après le théorème X.3.1, tout vecteur de $\ker Dg_a$ est de la forme $c'(0)$. On a donc $\ker Dg_a \subset \ker Df_a$.

Ceci implique qu'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ telle que $Df_a = L \circ Dg_a$. En effet, soit $v \in \mathbb{R}^k$. Alors puisque g est une submersion, $\exists u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Dg_a(u) = v$. On pose $L(v) = Df_a(u)$. Remarquons que L ainsi définie ne dépend pas du choix de u car pour un autre $u' \in \mathbb{R}^n$ tel que $Dg_a(u') = v$, on a $Dg_a(u - u') = v - v = 0$. Donc $u - u' \in \ker Dg_a \subset \ker Df_a$. D'où $Df_a(u) - Df_a(u') = Df_a(u - u') = 0$.

Maintenant, soit $e_1, \dots, e_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Pour tout $i = 1, \dots, k$, posons $\lambda_i = L(e_i)$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$Df_a(h) = (L \circ Dg_a)(h) = L(D(g_1)_a(h), \dots, D(g_k)_a(h))$$

donc

$$Df_a(h) = (\lambda_1 D(g_1)_a + \dots \lambda_k D(g_k)_a).h.$$

□

Exercice 99. Notons $\mathbb{S}^n$ le sous ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$$

Montrer que $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont on précisera la dimension.

Correction →

Exercice 100. L'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ définit-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Donner un ouvert maximal de $\mathbb{R}^3$ sur lequel l'équation définit une sous-variété.

Correction →

Exercice 101. Décrire l'espace tangent en $(1, 1, 1)$ à la courbe γ de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations $x^2 - yz = 0$ et $3x^2 - y - 2z = 0$.

Correction →

Exercice 102. On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ et le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 8$. Quels sont les extrema de la restriction de f à A ?

Correction →

Exercice 103. Mettre le nombre 1728 sous la forme d'un produit $xyz = 1728$ de nombres réels positifs de telle sorte leur somme soit minimale.

Correction →

Exercice 104. Trouver les extrema de la restriction de la fonction $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2$ au sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ décrit par les deux équations $x + y + z = 0$ et $x + y - z = 0$.

Correction →

X.5 Correction des exercices

. Exercice 99

Notons $\mathbb{S}^n$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation

$$x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$$

Posons $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1$. Alors $\mathbb{S}^n$ est définie par l'équation $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$. La matrice jacobienne de f est :

$$Jf_{(a_1,\ldots,a_{n+1})} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}$$

Donc f est une submersion sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, et comme U contient $\mathbb{S}^n$, on en déduit que $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $n + 1 - 1 = n$.

($\mathbb{S}^n$ n'est autre que la sphère de centre 0 et de rayon 1).

Retour texte → □

. Exercice 100

L'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ définit-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Donner un ouvert maximal de $\mathbb{R}^3$ sur lequel l'équation définit une sous-variété.

La matrice jacobienne de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ est :

$$Jf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & -2z_0 \end{pmatrix}$$

C'est une submersion en tout point où $Jf_{(x_0,y_0,z_0)} \neq (0, 0, 0)$, c'est-à-dire en tout point de $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$. Donc l'équation définit une sous-variété sur $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0, 0, 0)\}$.

Retour texte → □

. Exercice 101

Décrire l'espace tangent en $(1, 1, 1)$ à la courbe γ de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations $x^2 - yz = 0$ et $3x^2 - y - 2z = 0$.

Tout d'abord, le point $(1, 1, 1)$ vérifie les deux équations $x^2 - yz = 0$ et $3x^2 - y - 2z = 0$, donc il est bien sur γ.

Considérons l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - yz, 3x^2 - y - 2z)$. Sa matrice jacobienne est :

$$Jf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & -z & -y \\ 6x & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$Jf_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant 2×2 correspondant aux deux premières colonnes est non nul en $(1,1,1)$, donc par continuité, il est non nul sur un voisinage de $(1,1,1)$, donc γ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-2=1$ au voisinage de $(1,1,1)$. L'espace tangent à γ en $(1,1,1)$ est le noyau de la matrice $Jf_{(1,1,1)}$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,-2,4)$.

Retour texte → □

. Exercice 102

On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy$ et le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 8$. Quels sont les extrema de la restriction de f à A ?

Nous allons appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange (Théorème X.4.1). Posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8$. Tout d'abord, A est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ car les dérivées partielles de g ne s'annulent simultanément qu'en l'origine, et A est contenu dans l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}$.

D'après le théorème, si la restriction de f à A admet un extremum en $a = (x,y)$ alors il existe un réel λ tel que $Jf_a = \lambda Jg(a)$. Ceci donne le système :

$$\begin{cases} 2x - 4y - 2\lambda x & = 0 \\ 2y - 4x - 2\lambda y & = 0 \\ \quad x^2 + y^2 & = 8 \end{cases}$$

D'après les deux premières équations, si x ou y est nul, alors ils le sont tous les deux. Or, d'après la troisième équation, x et y ne peuvent pas être nuls en même temps, donc x et y sont nécessairement non nuls. On peut donc diviser par x et y à volonté. En isolant λ dans les deux premières équations puis en soustrayant les deux, on élimine λ et on arrive à l'équation $x^2 = y^2$. Le système précédent est donc équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda & = \frac{x-2y}{x} \\ x^2 - y^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 8 \end{cases}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{cases} x & = \pm 2 \\ y & = \pm 2 \\ \lambda & = \frac{x-2y}{x} \end{cases}$$

On trouve donc les quatre points suivants :
- le point $(x_1,y_1) = (2,2)$ auquel correspond $\lambda = -1$, et on a $f(2,2) = -8$;
- le point $(x_2,y_2) = (-2,2)$ auquel correspond $\lambda = 3$, et on a $f(-2,2) = 24$;
- le point $(x_3,y_3) = (2,-2)$ auquel correspond $\lambda = 3$, et on a $f(2,2) = 24$;
- le point $(x_4,y_4) = (-2,-2)$ auquel correspond $\lambda = -1$, et on a $f(2,2) = -8$;

Puisque A est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{8}$, c'est un compact, donc la fonction continue f y est bornée et atteint ses bornes. Les points $(x_1,y_1) = (2,2)$ et $(x_4,y_4) = (-2,-2)$ sont donc des minima pour f, et les points $(x_2,y_2) = (-2,2)$ et $(x_3,y_3) = (2,-2)$ des maxima.

Retour texte → □

. Exercice 103

Pour mettre le nombre 1728 sous la forme d'un produit $xyz = 1728$ de nombres réels positifs de telle sorte leur somme soit minimale, posons $f(x,y,z) = x+y+z$ et $g(x,y,z) = xyz - 1728$.

On cherche donc le minimum de la restriction de f au sous-ensemble A de $\mathbb{R}^3$ d'équation $g(x, y, z) = 0$.

On a :

$$Jg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} yz & xz & yz \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne s'annule pas sur A, donc par continuité de ses coefficients, elle ne s'annule pas sur un voisinage ouvert de A dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, A est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 (donc une surface).

Appliquons le théorème des multiplicateurs de Lagrange. Si f admet un extremum en (a, b, c) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 1 & = \lambda bc \\ 1 & = \lambda ac \\ 1 & = \lambda ab \\ abc & = 1728 \end{cases}$$

Les trois premières équations impliquent $a = b = c$, et la dernière donne alors $a = b = c = 12$.

Montrons maintenant que $(a, b, c) = (12, 12, 12)$ est bien un minimum pour f. Il suffit de montrer qu'un tel minimum existe sur A. Soit $E = A \cap (\mathbb{R}^+)^3$. E est fermé dans $\mathbb{R}^3$, mais pas borné.

Soit $F = \{(x, y, z) \in E \colon 0 \leq x, y, z \leq 2000\}$. F est un compact de $\mathbb{R}^3$. Puisque f est continue, f admet un minimum sur F en un certain point (a', b', c'). Or $(1, 1, 1727) \in F$ et pour tout $(x, y, z) \in E \setminus F$, on a :

$$x + y + z \geq 2000 > 1730 = f(1, 1, 1728) \geq f(a', b', c').$$

Donc $f(a', b', c')$ est un minimum pour f sur E, et ce minimum est $(12, 12, 12)$ d'après ce qui précède.

Retour texte → □

. Exercice 104

Trouver les extrema de la restriction de la fonction $f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + y + z^2$ au le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ décrit par les deux équations $x + y + z = 0$ et $x + y - z = 0$.

Posons $g_1(x, y, z) = x + y + z$ et $g_2(x, y, z) = x + y - z$. Le sous-ensemble

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon g_1(x, y, z) = 0,\ g_2(x, y, z) = 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$ est une droite. La matrice jacobienne de $g = (g_1, g_2)$ est :

$$Jg_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang maximal 2 sur $\mathbb{R}^3$ puisque le déterminant des deux dernières colonnes est non nul. Donc g est une submersion sur $\mathbb{R}^3$, donc A est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

On peut donc appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange : si la restriction $f_{|A}$ admet un extremum en $(x, y, z) \in A$, alors il existe des complexes λ et μ tels que $Df_a = \lambda D(g_1)_a + \mu D(g_2)_a$. Donc (x, y, z) et λ, μ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + y - z & = 0 \\ x^2 & = \lambda + \mu \\ 1 & = \lambda + \mu \\ 2z & = \lambda - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = 1 \\ z & = 0 \\ y & = -x \\ \lambda + \mu & = 1 \\ \lambda - \mu & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \pm 1 \\ z & = 0 \\ y & = -x \\ \lambda = \mu & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On trouve donc deux extrema candidats : $(x_1, y_1, z_1) = (1, -1, 0)$ et $(x_2, y_2, z_2) = (-1, 1, 0)$, et pour ces deux points, on a $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

On a $f(x_1, y_1, z_1) = -\frac{2}{3}$ et $f(x_2, y_2, z_2) = \frac{2}{3}$.

Mais A est la droite paramétrée par $t \mapsto (t, -t, 0)$. $f(t, -t, 0) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Puisque $\lim_{t\to\pm\infty} = \pm\infty$, $f_{|A}$ n'admet pas d'extremum sur A.

Retour texte $\rightarrow$ $\square$