

1 Inégalités triangulaires.

Théorème. Première inégalité triangulaire. Pour tous z, z' dans $\mathbb{C}$, nous avons

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si $(z = 0)$ ou $(z' = 0)$ ou $(\exists \lambda > 0, z = \lambda z')$.

Preuve. En effet, si z, z' sont dans $\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} |z + z'| \leq |z| + |z'| &\Leftrightarrow |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \Leftrightarrow (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ \Leftrightarrow z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' &\leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 \\ \Leftrightarrow z\bar{z}' + z'\bar{z} &\leq 2|z||z'| \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq 2|z\bar{z}'| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z\bar{z}') \leq |z\bar{z}'|. \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est toujours vraie car, quel que soit le nombre complexe w , on a toujours $\operatorname{Re} w \leq |w|$.

De plus, on déduit que nous avons l'égalité $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$.

Il est clair que, si $z = 0$ ou si $z' = 0$, l'égalité $\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'|$ est vraie.

Supposons $z \neq 0 \neq z'$. Si $w = z\bar{z}'$, alors $w \neq 0$. Il existe donc $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $w = re^{i\theta}$. Nous avons alors $\operatorname{Re} w = r \cos \theta = |w| = r$. Ceci nous donne que $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc que $w = r$ est un réel positif. Nous avons alors

$$z = \frac{z\bar{z}'}{\bar{z}'} = \frac{w}{\bar{z}'} = \frac{w}{|z'|^2} z' = \lambda z'$$

avec $\lambda = \frac{r}{|z'|^2} > 0$. Ceci termine la preuve du théorème.

Théorème. Deuxième inégalité triangulaire. Pour tous z, z' dans $\mathbb{C}$, nous avons

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|$$

avec égalité si et seulement si $(z = 0)$ ou $(z' = 0)$ ou $(\exists \lambda > 0, z = \lambda z')$.

Preuve. Si w, w' sont dans $\mathbb{C}$, on applique la première inégalité avec $z = w$ et $z' = w' - w$. On obtient alors $|w'| = |z + z'| \leq |z| + |z'| = |w| + |w' - w|$, soit encore $|w' - w| \geq |w'| - |w|$.

Echangeant les rôles de w et w' , nous obtenons $|w' - w| = |w - w'| \geq |w| - |w'|$, donc $|w' - w| \geq ||w| - |w'||$. Ceci prouve la deuxième inégalité triangulaire.

Enfin, nous avons égalité si et seulement si, quand nous appliquons la première inégalité à $z = w$ et $z' = w' - w$ ou à $z = w'$ et $z' = w - w'$, il y a égalité. Nous avons donc l'égalité $||w| - |w'|| = |w - w'|$ si et seulement si

$$[(w = 0) \text{ ou } (w' - w = 0) \text{ ou } (\exists \lambda > 0, w = \lambda(w' - w))] \text{ ou } [(w' = 0) \text{ ou } (w - w' = 0) \text{ ou } (\exists \lambda > 0, w' = \lambda(w - w'))]$$

ce qui équivaut à

$$\left[(w = 0) \text{ ou } (w = w') \text{ ou } (\exists \lambda > 0, w = \frac{\lambda}{1 + \lambda} w') \right] \text{ ou } \left[(w' = 0) \text{ ou } (w = w') \text{ ou } (\exists \lambda > 0, w = \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)} w') \right]$$

soit encore à

$$(w = 0) \text{ ou } (w' = 0) \text{ ou } (\exists \lambda' > 0, \quad w = \lambda' w').$$

Ceci achève la preuve de la seconde inégalité triangulaire.

2 Somme des termes d'une suite géométrique.

Théorème. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } a = 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^n a^k = n+1,$$

$$\text{Si } a \neq 1, \text{ alors } \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Preuve. Le cas $a = 1$ est clair. Si $a \neq 1$, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que cela soit vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1}}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1},$$

donc c'est vrai au rang $n + 1$.

On a donc bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Théorème. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\text{Si } x \in 2\pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{k=0}^n \cos kx = n+1, \quad \sum_{k=0}^n \sin kx = 0.$$

$$\text{Si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \quad \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \quad \sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Preuve. Notons

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos kx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin kx.$$

On a

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^n e^{ikx}.$$

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, le résultat énoncé est clair.

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{ix} \neq 1$, et donc

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - e^{-i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{n}{2}x} \frac{2i \sin \frac{n+1}{2}x}{2i \sin \frac{x}{2}}.$$

On déduit de cela que

$$C_n = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{\cos \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S_n = \operatorname{Im} \left(e^{i\frac{n}{2}x} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

3 Racines n -ièmes de nombres complexes.

3.1 Racines carrées de nombres complexes.

Soit $a + ib \neq 0$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche les $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $z^2 = a + ib$. On appelle ces nombres les racines carrées de $a + ib$.

Pour trouver ces z , on écrit que $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy = a + ib$, ce qui nous donne

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Or $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En additionnant cette relation à la relation $x^2 - y^2 = a$ et en divisant par 2, on obtient donc que

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2},$$

et donc que

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

La relation $2xy = b$ nous donne alors les deux valeurs de y correspondantes :

$$y = \pm \frac{2b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

Les deux racines sont donc

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{2b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}, \quad -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \frac{2b}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}$$

3.2 Remarque importante.

Il ne faut jamais écrire $\sqrt{z}$ quand $z \in \mathbb{C}$

Quand x est un réel positif, l'équation $y^2 = x$ admet toujours deux racines, une positive et l'autre négative. On a donc un moyen simple de différencier les racines, c'est leur signe, on choisit de noter la racine positive $\sqrt{x}$. Dans ce cas, on a $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Quand α est un complexe, l'équation $z^2 = \alpha$ admet toujours deux solutions opposées. On pourrait choisir la racine qui a une partie réelle positive (et qui n'est pas de la forme $-ib$ avec $b \in \mathbb{R}^+$) pour définir une fonction racine complexe. Mais ce choix donne une fonction qui n'est pas continue, et qui ne vérifie pas $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. On risque de faire plein d'erreur avec une telle fonction. Et tous les choix possibles pour la racine posent les mêmes problèmes. Le plus simple est de se passer d'une fonction racine complexe.

3.3 Racines n -ièmes de $a \in \mathbb{C}$ pour $n \geq 3$.

Soit $n \geq 3$ un entier et $a \in \mathbb{C}$. On cherche les z tels que $z^n = a$.

Si $a = 0$, alors seul $z = 0$ est solution de $z^n = 0$.

Si $a \neq 0$, alors on peut écrire $a = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Posant $z = re^{i\theta}$, nous avons $z^n = r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\varphi}$.

Donc $|z^n| = r^n = |\rho e^{i\varphi}| = \rho$, ce qui nous donne que $r = \rho^{1/n}$. Nous avons alors $e^{in\theta} = \varphi$, ce qui est équivalent à l'existence d'un $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = \varphi + 2k\pi$, ou encore $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Nous en déduisons que l'ensemble des racines n -ièmes de a est

$$S = \{\rho^{1/n} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Or la suite $w_k = (e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})})_k$ est périodique de période n car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$w_{k+n} = e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+n)\pi}{n})} = e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2\pi)} = e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = w_k.$$

On en déduit que l'ensemble S se réduit à l'ensemble

$$S = \{\rho^{1/n} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

3.4 Équation $z_1^n = z_2^n$

Cela n'implique pas $z_1 = z_2$, mais

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de l'unité.}$$

Par exemple pour $n = 2$, les racines carrées de l'unité sont $\{1, -1\}$ et cela donne $z_1 = \pm z_2$.

Pour $n = 3$, les racines troisièmes de l'unité sont $\{1, j, j^2\}$ et cela donne $z_1 = z_2$ ou $z_1 = j z_2$ ou $z_1 = j^2 z_2$.

4 Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes.

Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On cherche à résoudre l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{*}$$

dans $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. En divisant par $a \neq 0$, on a

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0.$$

Or

$$z^2 + \frac{b}{a}z = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

On en déduit que z est solution de (*) si et seulement si

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0,$$

soit encore si et seulement si

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2} (b^2 - 4ac) = 0.$$

Notons δ_1 et δ_2 les deux racines carrées complexes (opposées) du nombre complexe $b^2 - 4ac$.

z est alors solution de (*) si et seulement si

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta_1^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_1}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta_1}{2a}\right) = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_1}{2a}\right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta_2}{2a}\right) = 0.$$

On en déduit que les deux solutions de (*) sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}.$$