Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1 - Parcours PEI

LOGIQUE, ENSEMBLES, RELATIONS, APPLICATIONS

1 Rudiments de logique.

1.1 Quantificateurs

Pour écrire des mathématiques, on utilise souvent les quantificateurs combinés avec les connecteurs logiques "et", "ou", $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$:

- $\forall$ (lu : "quel que soit" ... ou bien "pour tout" ...)
- $\exists$ (lu : "Il existe ...")
- $\exists!$ (lu : "il existe un unique ...").

Par exemple, si on veut exprimer que tout entier naturel est soit pair ou impair, on écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n = 2k \qquad \text{ou} \quad \exists k' \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n = 2k + 1.$$

Si on veut exprimer l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on écrit

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \forall b \in \mathbb{R}, \qquad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

De même,

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax + b = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$$

et

$$(\exists x \in \mathbb{R}, \quad ax + b = 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ ou } a = b = 0)$$

L'ordre des quantificateurs n'est pas important quand ils sont identiques, mais a de l'importance quand ils sont différents.

Quelques exemples :

$$(\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0)$$

et ces deux assertions sont vraies.

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0) \Leftrightarrow (\forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0)$$

et ces deux assertions sont fausses. Par contre les assertions

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \qquad y - x > 0$$

sont différentes. En effet la première est fausse alors que la seconde est vraie.

1.2 Négation.

On appelle négation d'une assertion A, l'assertion (non A) qui est vraie quand A et fausse, et fausse quand A est vraie.

Les règles pour prendre les négations des assertions sont très simples :
- $\forall$ devient $\exists$;
- $\exists$ devient $\forall$;
- non (A ou B) = (non A) et (non B) (le "et" devient "ou") ;
- non (A et B) = (non A) ou (non B) (le "ou" devient "et") ;
- non ($A \Rightarrow B$) = A et (non B).

Par exemple, si on écrit que tout entier est pair (ce qui est faux) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \exists k \in N, \qquad n = 2k,$$

la négation de cette assertion est donc vraie, ce qui nous donne :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad n \neq 2k.$$

La négation de l'assertion (vraie) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \exists k \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n = 2k \qquad \text{ou} \quad \exists k' \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad n = 2k + 1.$$

est

$$\exists n \in \mathbb{N}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad n \neq 2k \qquad \text{et} \quad \forall k' \in \mathbb{N}, \qquad n \neq 2k + 1$$

qui est donc fausse car la première est vraie.

2 Ensembles.

2.1 Définition.

Nous considérons des *ensembles* (ou collections) d'objets de nature quelconque : ensemble des points de l'espace, ensemble des nombres réels, ensemble des droites du plan, etc... Les objets dont l'ensemble est constitué s'appellent les *éléments*.

2.2 Symboles de la théorie des ensembles.

Soient A et B deux ensembles quelconques.

- "$x \in A$" signifie x est un élément de l'ensemble A.

- "$x \notin A$" signifie x n'est pas un élément de A.

- L'ensemble ne contenant aucun élément est l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$.

- " $A \subset B$" signifie que A est inclus dans B, c'est-à-dire que tous les éléments de A sont des éléments de B. Cela se formalise :

$$\forall x, \qquad (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- "$A \not\subset B$" signifie que A n'est pas inclus dans B. C'est la négation de l'assertion précédente, c'est-à-dire qu'il existe des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. Cela se formalise

$$\exists x, \qquad x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B.$$

-"$A = B$" signifie que les éléments de A sont exactement les éléments de B. Cela se formalise

$$\forall x, \qquad (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

-"$A \neq B$" est la négation de l'assertion précédente, c'est-à-dire qu'il existe des éléments de A qui ne sont pas dans B ou il existe des éléments de B qui ne sont pas dans A. Pour formaliser cela, on écrit que

$$[A = B] \Longleftrightarrow [\forall x, \quad (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$$

$$\Longleftrightarrow [\forall x, \quad (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \text{ et } (x \in B) \Rightarrow (x \in A)]\,.$$

Et donc :

$$[A \neq B] \Longleftrightarrow [\exists x, \quad (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)]\,.$$

- On appelle *intersection* de A et de B l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et à la fois dans B. On note cet ensemble $A \cap B$. On a

$$\forall x, \qquad (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$

- On appelle *réunion* de A et de B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou bien dans B. On note cet ensemble $A \cup B$.

$$\forall x, \qquad (x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

- Soit E un ensemble et soit A un sous-ensemble de E. On appelle *complémentaire* de A dans E et on note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ l'ensemble des x de E qui ne sont pas dans A.

$$\forall x \in E, \qquad x \in (E \setminus A) \Leftrightarrow x \notin A.$$

2.3 Ensemble produit.

Si A et B sont deux ensembles quelconques, on appelle *ensemble produit de A par B* et on note $A \times B$, l'ensemble des couples ordonnés (a, b), où $a \in A$ et $b \in B$.

Bien faire attention au fait que, si $a \in A$ et $b \in B$ et si $a \neq b$, $(a, b) \neq (b, a)$.

De plus, l'égalité $(a, b) = (a', b')$ signifie $a = a'$ et $b = b'$.

On a donc

$$A \times B = \{(a, b)/ \ a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Plus généralement, on appelle produit de n ensembles $A_1, \ldots, A_n$ (dans cet ordre), et on note :

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$$

l'ensemble des suites ordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ où $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$.

Si les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont égaux à un même ensemble A, on note : $A_1 \times \cdots \times A_n = A^n$.

3 Relations d'équivalence.

3.1 Relation binaire.

Considérons un ensemble E, et l'ensemble produit $E \times E = E^2$. Etant donnée une propriété $\mathscr{R}$ vérifiée par certains couples (a, b), on a pour tout couple $(a, b) \in E^2$, un et un seul des deux cas suivants :

- (a, b) vérifie $\mathscr{R}$ et on note $a\mathscr{R}b$.

- (a, b) ne vérifie pas $\mathscr{R}$ et on note $a \not\mathscr{R} b$.

Les couples vérifiant $\mathscr{R}$ forment un sous-ensemble de E^2. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation binaire* sur E.

Exemples. Dans l'ensemble des étudiants de PEIP, la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si x et y ont le même âge est une relation binaire.

- Sur l'ensemble des entiers naturels, "a est premier avec b" est une relation binaire.

- Sur l'ensemble des droites de l'espace, "D est orthogonale à D'" est une relation binaire.

3.2 Relations d'équivalence.

Définition. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :

- *Réfléxivité* : $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$;

- *Symétrie* : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;

- *Transitivité* : $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Exemples. Dans l'ensemble des étudiants de PEIP, la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si x et y ont le même âge est une relation d'équivalence.

-Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, la relation "$a - b$ est multiple d'un entier p donné" est une relation d'équivalence.

- Dans l'ensemble des droites de l'espace, la relation "D est parallèle à D'" est une relation d'équivalence.

Notons bien qu'une relation binaire n'est pas toujours une relation d'équivalence. Ainsi, dans l'ensemble des entiers naturels, la relation "a est premier avec b" est symétrique, mais elle n'est ni réflexive, ni transitive.

3.3 Classes d'équivalence. Ensemble quotient

Définition. Etant donnée une relation d'équivalence sur un ensemble E, on appelle *classe d'équivalence* d'un élément x de E, et on note $\overline{x}$ ou $c\ell(x)$ l'ensemble des éléments y de E tels que $x\mathscr{R}y$.

$$\overline{x} = c\ell(x) = \{y \in E / \ x\mathscr{R}y\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé *ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\mathscr{R}$* et noté $E/\mathscr{R}$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème. *Etant donnée une relation d'équivalence sur un ensemble E et x, y deux éléments de E, on a :*

$$x \in \overline{x};$$

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x\mathscr{R}y;$$

$$\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset \Leftrightarrow x \not\mathscr{R} y.$$

Preuve. En effet, $x\mathscr{R}x$, d'où le premier point.

Pour le second point, on remarque que si $x\mathscr{R}y$, alors tout z en relation avec x est en relation avec y car $z\mathscr{R}x$ et $x\mathscr{R}y$ entraîne $z\mathscr{R}y$ grâce à la transitivité de le relation. On montre de même que tout z en relation avec y est en relation avec x. On en déduit que $\overline{x} = \overline{y}$.

Réciproquement, si $\overline{x} = \overline{y}$, comme $y \in \overline{y}$, on a $y \in \overline{x}$ donc $x\mathscr{R}y$.

Pour le troisième point, comme $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont non vides, $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset \ \Rightarrow \ \overline{x} \neq \overline{y} \ \Rightarrow \ x \not\mathscr{R} y$ grâce au point précédent.

Il reste donc à prouver que $x \not\mathscr{R} y$ implique $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. Soient donc x, y dans E tels que $x \not\mathscr{R} y$. Supposons que $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, et soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. On alors $x\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}y$. La transitivité entraîne que $x\mathscr{R}y$, ce qui est absurde. On a donc bien prouvé que $x \not\mathscr{R} y$ implique $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

On exprime toutes ces propriétés en disant que les classes d'équivalence forment une partition de E.

Corollaire. *Etant donnée une relation d'équivalence sur un ensemble E, les classes d'équivalence forment une partition de E.*

4 Applications.

4.1 Applications. Composition des applications.

Définition. Si E et F sont deux ensembles, on appelle *fonction f* ou *application f* toute correspondance qui à un élément x de E associe un et un seul élément y de F. On note $f : E \to F$, $x \mapsto y = f(x)$.

Définition. Si E, F et G sont trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, on appelle *application composée* de g et de f et on note $g \circ f$ l'unique application qui à $x \in E$ associe $g[f(x)]$. On a donc :

$$\forall x \in E, \qquad (g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

On vérifie de manière immédiate que, si E, F, G et H sont quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications, on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On dit alors que la composition est *associative.*

4.2 Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Définition. Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que :

- f est *injective* si et seulement si : $\forall (x, x') \in E^2, \qquad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

- f est *surjective* si et seulement si : $\forall y \in F, \qquad \exists x \in E, \qquad f(x) = y$.

- f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective.

On vérifie de manière immédiate que la composée de fonctions injectives est injective, la composée de fonctions surjectives est surjective, et donc que la composée de fonctions bijectives est encore bijective.

Si E est un ensemble non vide, on note Id_E l'unique application de E dans E appelée *identité*, et qui à tout élément x de E associe $x \in E$.

Nous avons la caractérisation suivante des fonctions injectives, surjectives et bijectives :

Théorème. *Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*

- f est injective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

- f est surjective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

- f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = IdE$.

Preuve. Prouvons le premier point : si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$, montrons que f est injective. Soient donc $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors $x = g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(x')] = g \circ f(x') = x'$. Ceci prouve bien que $x = x'$, donc que f est injective.

Réciproquement, montrons que si f est injective, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$. Soit $y \in F$. Si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, ce x est unique car f est injective. On pose alors $g(y) = x$. Sinon, on pose $g(y) = a$ où $a \in E$ est quelconque. On vérifie que l'application ainsi construite vérifie $g \circ f = Id_E$. En effet, si $x \in E$ et si $y = f(x)$, alors, par construction, $g(y) = x$. Ceci clôt la preuve du premier point.

Prouvons le second point : si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_E$, montrons que f est surjective. Soit donc $y \in F$. Soit $x = g(y)$. On a $y = (f \circ g)(y) = f[g(y)] = f(x)$. Ceci prouve bien que, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et donc que f est surjective.

Réciproquement, montons que si f est surjective, il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$. Soit $y \in F$. Il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On en choisit alors un, et on pose $g(y) = x$. On vérifie que l'application ainsi construite vérifie $f \circ g = Id_F$. En effet, si $y \in F$ et si $g(y) = x$, alors, par construction, $f(x) = y$. Ceci clôt la preuve du second point.

Prouvons le troisième point. Il est clair que si il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$, alors d'après les deux points précédents, f est injective et surjective, donc f est bijective.

Réciproquement, si f est bijective, montrons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Grâce aux deux points précédemment prouvés, on sait qu'il existe g_1 et g_2 de E dans F telles que $g_1 \circ f = Id_E$ et $f \circ g_2 = Id_F$ (attention ! g_1 et g_2 n'ont à priori aucune raison d'être identiques). Prouvons néanmoins qu'ici, on a $g_1 = g_2$. On utilise pour cela l'associativité de la composition. On a d'une part $(g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_E \circ g_2 = g_2$, et d'autre part $(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ Id_F = g_1$. D'où $g_1 = g_2$.

Corollaire et définition. Soit $f : E \to F$ une application entre les deux ensembles E et F.

Alors f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

Cette application est de plus unique, et est aussi une bijection de F vers E. On l'appelle *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1}.

De plus, f est bijective si et seulement si

$$\forall y \in F, \qquad \exists ! x \in E, \qquad y = f(x).$$

Preuve. On a vu que f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Prouvons que cette application g est unique. Supposons donc qu'il existe g_1 et g_2 deux applications de F dans E telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f = Id_E$ et $f \circ g_1 = f \circ g_2 = Id_F$. Alors, comme précédemment, on a d'une part $(g_1 \circ f) \circ g_2 = Id_E \circ g_2 = g_2$, et d'autre part $(g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ Id_F = g_1$. D'où $g_1 = g_2$. Ceci prouve l'unicité de g.

En particulier, ceci prouve que, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ (qui est $f^{-1}(y)$) tel que $y = f(x)$, d'où le dernier point.

Définition. Soit $f : E \to F$ une application entre les ensembles E et F. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$ deux sous-ensembles de E et F. On appelle *image directe* de A et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par

$$f(A) = \{f(x)/ \ x \in A\}.$$

On appelle *Image réciproque* de B et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Bien faire attention au fait que $f^{-1}(B)$ existe toujous, même si f n'est pas bijective (auquel cas la bijection réciproque f^{-1} n'existe pas).