Mathématiques Générales I

DEVOIR MAISON

LOGIQUE, FONCTIONS

Exercice 1.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont vraies.

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n > m &\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } (-1)^n < 1 \\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,01 \end{aligned}$$

2. Que dire de ces propriétés si on transforme les quantificateurs $\forall$ en $\exists$ et réciproquement ?

3. Les énoncés ci-dessous sont-ils vrais ou faux ? (On justifiera).

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 5 \\ \forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 5 \\ \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2 \\ \exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y < z \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x < z \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, x < y < z) \\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1 \\ \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0 \\ \exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0 \end{aligned}$$

4. f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. Écrire la négation des propositions ci-dessous.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R}, x \neq x' &\Rightarrow f(x) \neq f(x') \\ \forall y \in [0, 1], \exists x \in \mathbb{R}, y &= f(x) \\ \forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, \exists r \in \mathbb{Z}, a &= qb + r \text{ et } 0 \leq r < b \end{aligned}$$

Exercice 2. Dresser la liste des inclusions et des égalités entre les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq 0\}, \quad B = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, a \text{ pair} \right\}, \quad C = \{z \in \mathbb{C}; z^2 = -4\}, \\ D = \{z \in \mathbb{R}; z^2 = -4\}, \quad E = \mathbb{Q}, \quad F = \emptyset, \quad G = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+, \quad H = \{2ni; n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soient les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x + 2 \end{cases} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 4 \end{cases}$$

Calculer $f \circ g$, $g \circ f$ ainsi que la fonction

$$fg : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{cases}$$

Exercice 4. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction s par

$$s : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{cases}$$

1. Exhiber une fonction paire mais pas impaire, puis une fonction impaire mais pas paire.
2. Existe-t-il des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires ?
3. Trouver toutes les fonctions qui sont à la fois paires et impaires.
4. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire ssi $f \circ s = f$.
5. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire ssi $f \circ s = s \circ f$.
6. Si f est une fonction quelconque, que dire des fonctions

$$x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} ?$$

7. Montrer que toute fonction f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 5. Donner $f(]0, 1[)$, $f([1, 2[)$, $f([-3, -2])$, $f^{-1}(]0, 1[)$, $f^{-1}([1, 2[)$, $f^{-1}([-3, -1])$, $f^{-1}([-\frac{1}{2}, 3])$ pour chacune des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes

$$1) \quad f : x \mapsto x^2 \quad 2) \quad f : x \mapsto e^x \quad 3) \quad f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad 4) \quad f : x \mapsto \sin x$$