

**Mathématiques Générales I**

PLANCHE 1

NOMBRES COMPLEXES

**Exercice 1.** Mettre sous forme cartésienne (forme  $a + ib$  avec  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ ) les nombres complexes suivants

$$\frac{3 + 2i}{1 - i}, \frac{1 + 2i}{1 - 2i}, \frac{2 + 5i}{1 - i}, \frac{2 - 5i}{1 + i}, \frac{1}{(1 + 2i)(3 - i)}$$

**Exercice 2.** Soit  $\alpha$  un nombre complexe différent de 0. Quel est le module de  $\alpha/\bar{\alpha}$ ?

**Exercice 3.** Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants

$$1 + i, 1 + i\sqrt{3}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{2 + 2i}{1 - i}\right)^{20}, \frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}$$

En déduire leur forme cartésienne.

**Exercice 4.** Soient  $a = 2\sqrt{6}(1 + i)$  et  $b = \sqrt{2}(1 + i\sqrt{3})$ . Déterminer les formes polaires de  $a$  et  $b$ . Déterminer les formes cartésiennes et polaires du nombre complexe  $\frac{a}{b}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/12)$  et de  $\sin(\pi/12)$ .

**Exercice 5.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $-1 + e^{2i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}(e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})})$ . En déduire le module et l'argument de  $-1 + \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$  en discutant selon les valeurs de  $\theta$ .
2. De même mettre  $1 + e^{i\theta}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{2i\theta}$  sous forme  $ue^{iv}$  où  $u$  et  $v$  sont des nombres réels. En déduire leurs modules et arguments en discutant selon les valeurs de  $\theta$ .
3. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. Mettre  $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$  sous la forme  $ue^{iv}$  où  $u$  et  $v$  sont des nombres réels.

**Exercice 6.** (\*) Soient deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  de module 1. Montrer que  $\frac{z+z'}{1+zz'}$  est un nombre réel.

**Exercice 7.** Chacune des formules suivantes est fausse. Déterminer pourquoi sans développer les calculs :

$$e^{\frac{2i\pi}{7}} e^{-\frac{3i\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{2}i \tag{1}$$

$$(1 + i)(1 - i) = 0 \tag{2}$$

$$(1 + i)(1 - i) = 1 \tag{3}$$

$$z^2 + z + 2 = (z - 1 - i)(z + 2 - i). \tag{4}$$

**Exercice 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer la forme polaire de  $(1 + i)^n$ . Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $(1 + i)^n$  est-il un nombre réel ?

**Exercice 9.** Écrire, sous forme polaire, les deux nombres complexes  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

Exprimer  $z_1^n$  et  $z_2^n$  pour tout entier  $n \geq 1$  (sous forme polaire).

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations  $z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$  et  $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ .

**Exercice 10.**

1. Déterminer (sous la forme polaire) les trois complexes  $z_0, z_1, z_2$  qui sont solutions de l'équation  $z^3 = 1$ , puis placer les points d'affixe  $z_0, z_1, z_2$  dans un repère orthonormé du plan.

2. Exprimer  $z_0, z_1$  et  $z_2$  en fonction de  $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .

3. Calculer  $z_0^2, z_1^2, z_2^2$  ainsi que  $z_0z_1, z_0z_2$ , et  $z_1z_2$ . Commenter.

4. Calculer la valeur de  $z_0 + z_1 + z_2$ .

5. Calculer pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $j^k$  et  $\sum_{p=0}^k j^p = 1 + j + j^2 + \dots + j^k$ .

6. Soit  $z$  tel que  $z^n = 1$ . Montrer qu'on a  $n$  solutions  $z_0, \dots, z_{n-1}$  à cette équation et donner leurs valeurs en fonction de  $n$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}$ . Qu'en est-il des produits  $z_i z_j$  avec  $i$  et  $j$  dans  $\{0, \dots, n-1\}$  ?

*On dit que l'ensemble  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$  est stable pour la multiplication.*

**Exercice 11.** Résoudre  $(z - i)^5 = (z + i)^5$ . Quel est le nombre de solutions ?

**Exercice 12.** Trouver les racines carrées de  $3 - 4i$ ,  $24 - 10i$ ,  $5 + 12i$ .

**Exercice 13.** Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ . En déduire les valeurs de  $\cos(\pi/8)$  et  $\sin(\pi/8)$ . Comment feriez vous pour calculer  $\cos(\pi/16)$  et  $\sin(\pi/16)$  ?

**Exercice 14.** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$

1.  $z^2 + z - 2 = 0$ .

2.  $4iz^2 + 2(1 + 6i)z + 2(-1 + 7i) = 0$

3.  $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$

4.  $z^4 - (1 - i)z^2 - i = 0$

**Exercice 15.** Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la condition:

$$|z - 4| = |z + 2i|.$$

**Exercice 16.** Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie la condition:

$$z + \frac{4}{z} \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 17.**

1. Définir au moyen de nombres complexes la rotation de centre  $2 + 3i$  et d'angle  $\pi/3$
2. Définir au moyen de nombres complexes la similitude de centre  $z_0$ , d'angle  $\alpha$  et de rapport  $a \neq 0$ .
3. Définir au moyen des nombres complexes les symétries par rapport aux deux axes de coordonnées.
4. Soit  $z$  un nombre complexe, que peut-on dire des points d'affixe  $z$  et  $-i\bar{z}$  dans un repère orthonormé du plan?

**Exercice 18.** Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls tels que  $z$ ,  $1/z$ , et  $z - 1$  aient le même module.

**Exercice 19.** Soient  $z, z_1$  et  $z_2$  des nombres complexes. Montrer que  $\Re(z) = |z|$  si et seulement si  $z$  est un nombre réel positif ou nul.

Montrer que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si et seulement si ( $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$  ou  $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$ ).

**Exercice 20.** Soient  $a, b, c, d$  quatre nombres complexes deux à deux distincts. Montrez que si  $\frac{d-a}{b-c}$  et  $\frac{d-b}{a-c}$  sont imaginaires purs, il en est de même de  $\frac{d-c}{a-b}$ . Comment peut-on interpréter cela géométriquement?

**Exercice 21.**

1. Comment choisir le nombre complexe  $z$  pour que  $Z = z^2 + 2z - 3$  soit réel ? Soit  $E$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tel que  $Z$  soit réel. Déterminer  $E$ .
2. On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $i$  et  $1$ . Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$  distinct de  $A$ . On pose  $Z = \frac{1-z}{i-z}$ .  
Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit réel, et l'ensemble  $F$  des points  $M$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

**Exercice 22.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{Z}$ . On suppose que  $a$  et  $b$  sont la somme de deux carrés, c'est à dire il existe  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que  $a = x^2 + y^2$  et  $z$  et  $t$  tels que  $b = z^2 + t^2$ .  
Démontrer que le produit  $ab$  est encore la somme de deux carrés. *On dit que le sous ensemble des éléments de  $\mathbb{Z}$  qui sont la somme de deux carrés est stable pour la multiplication.*

**Indication:** voir  $a$  et  $b$  comme les modules de nombres complexes qu'on précisera.