Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales 1

FEUILLE D'EXERCICES N° 4

THÉORIE DES ENSEMBLES, RELATIONS, APPLICATIONS

I. Un peu de logique

Exercice 1 Ecrire à l'aide de quantificateurs ($\forall$, $\exists$) et de connecteurs logiques ("non", "et", "ou", "implique", "équivaut") les propositions suivantes :

1. Il existe trois nombres réels dont le produit vaut 1.
2. Un nombre réel est non nul si et seulement s'il est strictement positif ou strictement négatif.
3. Tout entier naturel est la somme de quatre carrés d'entiers.
4. L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution formée d'entiers x, y, z tous non nuls, et ce pour tout entier n strictement plus grand que 2.

Exercice 2 Trouver la négation des propositions suivantes :
- Jean porte un béret ou une casquette ;
- Il fait froid donc Pierre met un pull et un manteau ;
- Il fait froid et Pierre n'a pas mis son manteau.
- S'il fait beau, nous allons à la plage.
- Nous n'allons à la plage que s'il fait beau.
- S'il fait beau et si l'eau est chaude, nous baignons les enfants.
- Tu as un cadeau si et seulement si tu es sage comme une image.

ATTENTION : le si ...alors ... du langage courant est souvent confondu avec un si et seulement si... mais là, nous faisons des mathématiques !...

Exercice 3 Soit la proposition $\mathscr{P}$: "Les lions et les crocodiles sont des bêtes féroces".

1. Ecrire la proposition $\mathscr{P}$ à l'aide du formalisme mathématique en introduisant 3 propositions bien choisies et en utilisant une implication.
2. Peut-on déduire de $\mathscr{P}$ que :
   - Si on est un lion, alors on est féroce
   - Si on n'est pas un crocodile, alors on n'est pas féroce
   - Si on n'est pas féroce, alors on n'est ni un lion, ni un crocodile
   - Si on est féroce mais que l'on est pas un lion, alors on est un crocodile
3. Ecrire la négation de $\mathscr{P}$, sa contraposée, ainsi que sa réciproque. Dire si chacune vous semble vraie (la proposition $\mathscr{P}$ étant manifestement une proposition vraie).

Exercice 4 On suppose vraie la proposition logique : $A \Rightarrow B$, où A et B sont deux assertions.

A votre avis, A est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour avoir B ? Et B est-elle une condition nécessaire ou suffisante pour avoir A ?

Application : Ecrire chaque proposition à l'aide d'une implication, puis dire si elle est vraie pour tout nb réel :

1. Pour que x soit strictement supérieur à 0, il faut que x soit supérieur ou égal à 1.

2. Pour que x soit strictement supérieur à 0, il suffit que x soit supérieur ou égal à 1.

3. Pour que x soit strictement supérieur à 0, il est nécessaire que x soit non nul.

Exercice 5 Remplir avec $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, ou encore $\times$ lorsqu'aucune des implications n'est possible ; en justifiant.

1. $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \ \ldots \ \alpha^2 \leqslant \beta^2 \ \ldots \ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leqslant 0$.
2. $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \ \ldots \ 0 \leqslant \sqrt{\alpha} \leqslant \sqrt{\beta} \ \ldots \ \alpha \leqslant \beta$.
3. $x = y \ \ldots \ f(x) = f(y)$.
4. $x = y \ \ldots \ \exp x = \exp y$.

II. Théorie des ensembles

Exercice 6 *symboles de théorie des ensembles*

1. Soient X un ensemble non vide et A, B, C trois parties de X.
   (a) Expliciter les formules de théorie des ensembles : $x \in A \cup B$, $x \in A \cap B$, $x \in A^c$, où ^{c} désigne le symbole de complément, au moyen des connecteurs logiques et des symboles élémentaires $(x \in A)$ et $(x \in B)$.
   (b) Déterminer les ensembles suivants :
   1. $X \cap \emptyset^c$ 2. $X^c \cap \emptyset$ 3. $(X \cap \emptyset)^c$ 4. $X \cup \emptyset^c$ 5. $(X^c \cap \emptyset)^c$ 6. $(X^c \cup \emptyset)^c \cap X$.
   (c) Montrer que $\Big(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C\Big) \Rightarrow B \subset C$.

2. On pose $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. L'opération $A \triangle B$ est appelée la *différence symétrique* de A et B.
   (a) Montrer que $A \triangle B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.
   (b) A-t-on : $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$? et $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$?

Exercice 7 *Opérations sur les ensembles*

1. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
   (b) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
2. Soient A et B des parties d'un ensemble E, montrer
   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   (c) $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$.
3. Soient A et B des parties d'un ensemble E, démontrer que : $A \cup B = E \Leftrightarrow A^c \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A$.

Exercice 8 *extrait examen 2008*

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E non vide telles que l'on ait les quatre hypothèses :

$(1) A \cap B = C \cap D$; $(2) C \cup D = E$; $(3) C \subset A$; $(4) D \subset B$.

Prouver que $C = A$ puis que $D = B$.

Exercice 9 *Produit cartésien*

Etant donnés, deux ensembles A et B, on appelle produit cartésien de A par B, l'ensemble $\{(x, y)/x \in A,\ y \in B\}$.

1. Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$. Expliciter les produits cartésiens : $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ? Enoncer un résultat analogue avec les symboles $\cup$ et $\times$.
2. Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$. Dessiner, dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, les ensembles : $I \times J$ et $K \times L$; déterminer : $(I \times J) \cap (K \times L)$.
3. Pour les ensembles quelconques A, B, C, D, déterminer (en justifiant le résultat) $(A \times B) \cap (C \times D)$.
4. Montrer en donnant un contre-exemple, que $(A \times B) \cup (C \times D)$ n'est en général pas un produit cartésien.
5. Que vaut $\emptyset \times B$?
6. Résoudre l'équation : $A \times B = \emptyset$.

Exercice 10 *Ensemble des parties d'un ensemble*

1. Soit l'ensemble $A = \{a\ , b\ , c\ , d\}$. Déterminer $\mathscr{P}(A)$.
2. L'ensemble $\mathscr{P}(\emptyset)$ est-il vide ?
3. Si E est un ensemble à k éléments, combien $\mathscr{P}(E)$ a-t-il d'éléments ?

Exercice 11 *Démonstration par récurrence*

1. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n > n$.
2. Démontrer que :
   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + 4 + \cdots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Sigma_{p=1}^{n} p \times p! = (n + 1)! - 1$
3. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Prouver que $|\sin(nt)| \leqslant n|\sin t|$.
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*, 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} \leqslant e^t$.

III. Relations binaires, relations d'équivalence

Exercice 12 Etudier les propriétés des relations binaires suivantes :

1. $x \mathscr{R} y$ lorsque $xy > 0$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{R}^\star$.
2. $x \mathscr{S} y$ lorsque $x|y$ dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{N}$;
3. $x \mathcal{R} y$ lorsque $(\exists n \in \mathbb{N}^\star, y = x^n)$, dans $\mathbb{N}$.

Exercice 13 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mathscr{R} (x',y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence des couples $(1,0), (0,1), (1,1)$.
3. Trouver toutes les classes d'équivalence et les visualiser en faisant un dessin.

Exercice 14 *congruence module n*

Soit n un entier naturel non nul. On considère la relation $\mathscr{R}_n$, définie sur $\mathbb{Z}$, par $a \mathscr{R}_n b \Leftrightarrow n \,|\, (a-b)$.

1. Montrer que $\mathscr{R}_n$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ appelée congruence modulo n.
2. Déterminer l'espace quotient pour $n = 2$ puis $n = 3$.
3. Prouver que $a \mathscr{R}_n b \Leftrightarrow a$ et b ont le même reste dans la division euclidienne par n. En déduire l'ensemble quotient dans le cas général.
4. Montrer que pour tous a, b, c éléments de $\mathbb{Z}$,

$$a \mathscr{R}_n b \Rightarrow (a+c) \mathscr{R}_n (b+c)$$
$$a \mathscr{R}_n b \Rightarrow (ac) \mathscr{R}_n (bc)$$

5. En déduire que l'on a aussi

$$a \mathscr{R}_n b \text{ et } c \mathscr{R}_n d \Rightarrow (a+c) \mathscr{R}_n (b+d) \quad (\mathscr{R}_n \text{ est compatible avec l'addition});$$
$$a \mathscr{R}_n b \text{ et } c \mathscr{R}_n d \Rightarrow (ac) \mathscr{R}_n (bd) \quad (\mathscr{R}_n \text{ est compatible avec la multiplication}).$$

Exercice 15 On définit dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{\text{applications de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}\}$ la relation $\mathscr{S}$ suivante :

$$f \mathscr{S} g \Leftrightarrow \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x| > A \Rightarrow f(x) = g(x))$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 16 Soit E l'espace usuel. On fixe un point O de E et on définit la relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des points de E par

$$P \mathscr{R} P' \Leftrightarrow \text{ les points } O, P \text{ et } P' \text{ sont alignés.}$$

– Est-ce une relation d'équivalence sur E ?
– On note $E^\star = E \setminus \{O\}$; montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $E^\star$. Déterminer l'ensemble quotient (dans cet exercice, l'ensemble quotient obtenu correspond à un objet fondamental en géométrie : l'espace projectif).

Exercice 17 Etant donnés, dans un plan rapporté à 2 axes de coordonnées, deux points $P = (x, y)$ et $P' = (x', y')$, on note $\mathscr{R}$ la relation

$$P \mathscr{R} P' \Leftrightarrow xy = x'y'.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence dans le plan et en construire les classes d'équivalence.

IV. Applications

Exercice 18 Montrer que la composée de deux applications injectives (resp. surjectives) est une application injective (resp. surjective).

Exercice 19 Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Notons $h = g \circ f$.

1. Montrer que h injective entraîne f injective.
2. Montrer que h surjective entraîne g surjective.

Exercice 20 Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$ trois applications ; démontrer que si parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$, deux sont injectives (resp. surjectives), la troisième étant surjective (resp. injective), alors f, g, h sont bijectives.

Exercice 21 Soit f une application de X dans Y.

1. Montrer que f est injective si et seulement si il existe une fonction $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$. La fonction g est-elle unique ? (*on pourra faire un dessin avec diagramme sagital*)
2. Prouver que f est bijective si et seulement si $\exists! g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_X$.

Exercice 22 (Application "image réciproque")

On rappelle que si f est une application de X dans X', l'application de $\mathscr{P}(X')$ dans $\mathscr{P}(X)$, notée commodément mais abusivement f^{-1}, qui à A' associe $f^{-1}(A')$, est toujours bien définie.

Soient X, X' deux ensembles et $f : X \to X'$ une application.

1. Rappeler la définition de $f(A)$ pour une partie A de X, ainsi que la définition de $f^{-1}(A')$ pour une partie A' de X'.

2. Si f est une des fonctions usuelles $\cos x$, $\sin x$, e^x, x^2, $\sqrt{x}$ ou $\ln x$, déterminer $f^{-1}(\{y\})$, suivant les valeurs du réel y et dire si f est injective ou surjective.
3. Pour tous $(A, B) \in \mathscr{P}(X)^2$ et $(A', B') \in \mathscr{P}(X')^2$, montrer que :
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (*on dessinera un contre-exemple à l'autre inclusion).*
   (c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
   (d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
4. Pour tout $A \subset X$, $A' \subset X'$, comparer :
   (a) $f(A^c)$ et $f(A)^c$; $f^{-1}(A'^c)$ et $f^{-1}(A')^c$.
   (b) A et $f^{-1}(f(A))$; A' et $f(f^{-1}(A'))$.
5. Montrer que $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;
   (*on dit que f^{-1} est une application croissante de $\mathscr{P}(X')$ dans $\mathscr{P}(X)$.*
6. Démontrer les propositions suivantes :
   (a) $\big(\forall (A, B) \in \mathscr{P}(X)^2, \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad f$ injective.
   (b) $\big(\forall A \in \mathscr{P}(X), \quad f^{-1}(f(A)) = A\big) \quad \Longleftrightarrow \quad f$ injective.
   (c) $\big(\forall A' \in \mathscr{P}(X'), \quad f(f^{-1}(A')) = A'\big) \quad \Longleftrightarrow \quad f$ surjective.

Exercice 23 *extrait examen 2008*

1. Etant donnée une application f de E vers F, rappeler les définitions mathématiques de f injective et f surjective, puis exprimer que f n'est pas injective, et enfin que f n'est pas surjective. En déduire la définition mathématique de : f n'est pas bijective.
2. On considère l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{-2\} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

   – Démontrer que f est injective mais pas surjective (on pourra justifier que si x est un nombre réel différent de -2, alors $\dfrac{x+1}{x+2}$ n'est jamais égal à 1).
   – Soit g l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} - \{-2\} & \mapsto & \mathbb{R} - \{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x+2} \end{array}$$

   Justifier que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.