

Mathématiques Générales I

PARCOURS PEIP

PLANCHE 4BIS TRADUCTION VERS LE LANGAGE LOGIQUE

On rappelle que l'ensemble des sous-ensemble d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$. Pour traduire ce qui suit, on notera D l'ensemble des droites du plan.

Traduire en langage logique les phrases suivantes. Pour les onze première, écrire également leur négation :

1. tout nombre réel est le carré d'un nombre complexe ;
2. un réel positif est toujours compris entre 0 et deux fois lui-même ;
3. il existe un réel non nul dont l'inverse et le carré sont égaux ;
4. à toute droite du plan, on peut trouver une droite parallèle ;
5. un point du plan est toujours à l'intersection de deux droites perpendiculaires ;
6. un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est toujours un intervalle fermé ;
7. il n'existe pas d'ensemble de nombre entier dont tous les éléments sont pairs ;
8. un nombre réel est négatif s'il est plus petit que n'importe quel nombre strictement négatif ;
9. si un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ contient 1 mais pas 0, alors, tous ses éléments sont positifs ;
10. la réunion de deux ensembles de points du plan dont l'intersection est non vide peut être vide ;
11. si x est le cosinus de θ , alors θ est racine d'un polynôme de degré 4.

Pour traduire les phrases suivantes, on pourra utiliser le prédicat $P(x, y)$: " x est la fille de y " définie sur l'ensemble F des femmes.

12. on peut trouver deux femmes dont l'une est la fille de l'autre ;
13. il y a une femme qui est la fille de toutes les autres ;
14. toute femme a au moins une fille ;
15. on peut trouver une femme mère de toutes les autres ;
16. toute femme a une mère ;
17. toute femme est fille de toute femme ;
18. toute femme est fille de toute mère.

Solutions :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{C}, x = z^2$,
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, x \neq z^2$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (0 \leq x \text{ et } x \leq 2x) \text{ ou } (x \leq 0 \text{ et } 2x \leq x)$,
 $\exists x \in \mathbb{R}, (0 > x \text{ ou } x > 2x) \text{ et } (x > 0 \text{ ou } 2x > x)$;
3. $\exists x \in \mathbb{R}^*, x^2 = \frac{1}{x}$,
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 \neq \frac{1}{x}$;
4. $\forall d \in D, \exists d' \in D, d \text{ et } d' \text{ sont parallèles}$,
 $\exists d \in D, \forall d' \in D, d \text{ et } d' \text{ ne sont pas parallèles}$;
5. $\forall P \in \mathbb{R}^2, \exists (d, d') \in D^2, (d \text{ perpendiculaire à } d') \text{ et } (P \in d \cap d')$,
 $\exists P \in \mathbb{R}^2, \forall (d, d') \in D^2, (d \text{ perpendiculaire à } d') \Rightarrow (P \notin d \cap d')$;
6. $\forall I \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \exists (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}, I = [a, b]$,
 $\exists I \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \forall (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}, I \neq [a, b]$;
7. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \exists n \in A, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1$,
 $\exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \forall n \in A, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$;
8. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, x \leq \epsilon) \Rightarrow (x \leq 0)$,
 $\exists x \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+, x \leq \epsilon) \text{ et } x > 0$;
9. $\forall I \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (\exists (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}, I = [a, b] \text{ et } 1 \in I \text{ et } 0 \notin I) \Rightarrow (\forall x \in I, x \geq 0)$
 $\exists I \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (\exists (a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}, I = [a, b] \text{ et } 1 \in I \text{ et } 0 \notin I) \text{ et } (\exists x \in I, x < 0)$
10. $\exists (A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))^2, (A \cap B \neq \emptyset) \text{ et } (A \cup B = \emptyset)$,
 $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))^2, (A \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \cup B \neq \emptyset)$;
11. $\forall \theta \in \mathbb{R}, (\exists x \in \mathbb{R}, x = \cos(\theta)) \Rightarrow (\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \theta^4 + a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = 0)$,
 $\exists \theta \in \mathbb{R}, (\exists x \in \mathbb{R}, x = \cos(\theta)) \text{ et } (\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \theta^4 + a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d \neq 0)$;
12. $\exists (x, y) \in F^2, P(x, y)$;
13. $\exists x \in F, \forall y \in F, P(x, y)$;
14. $\forall x \in F, \exists y \in F, P(y, x)$;
15. $\exists x \in F, \forall y \in F, P(y, x)$;
16. $\forall x \in F, \exists y \in F, P(x, y)$;
17. $\forall (x, y) \in F^2, P(x, y)$;
18. $\forall (x, y) \in F^2, (\exists z \in F, P(z, y)) \Rightarrow P(x, y)$.