Université de Provence 2010–2011

Mathématiques Générales I

PLANCHE 5

ENTIERS, ARITHMÉTIQUE, COMBINATOIRE

Exercice 1. Relations d'ordre.

1. Rappeler la définition d'une relation d'ordre.
2. Montrer que les relations suivantes sont bien des relations d'ordre sur l'ensemble considéré :
   (a) Sur $\mathbb{N}$, $a \leq b$ si et seulement si $b - a$ est un entier positif ou nul.
   (b) Sur $\mathbb{R}$, $a \leq b$ si et seulement si $b - a$ est un réel positif ou nul.
   (c) $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E (quelconque), muni de la relation d'inclusion.
   (d) Sur $\mathbb{N}^2$, la relation $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si ($x \leq x'$ et $y \leq y'$), appelée "ordre produit".
   (e) Sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si ($x \leq x'$ ou ($x = x'$ et $y \leq y'$)), appelée "ordre lexicographique".
3. Pour les deux dernières, dessiner dans le plan l'ensemble des points (x, y) tels que $(x, y) \preceq (2, 4)$ puis tels que $(x, y) \succeq (2, 4)$.

Exercice 2. Ensembles dénombrables.

1. Rappeler ce que veut dire dénombrable.
2. Montrez que les ensembles suivants sont dénombrables.
   (a) $\mathbb{N}^*$.
   (b) l'ensemble des entiers pairs, et l'ensemble des entiers impairs.
   (c) l'ensemble des entiers divisibles par 2009.
   (d) l'ensemble des entiers dont la division euclidienne par 2010 donne pour reste 2009.
   (e) $\mathbb{Z}$.
   (f) $\mathbb{N}^2$ *(on utilisera par exemple l'application $f : (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^p(2q + 1)$).*

Dénombrements

Exercice 3. Dans une salle de classe, il y a 30 tables. De combien de façons peuvent prendre place 27 élèves ? 30 élèves ? 31 élèves ?

Exercice 4. On tape cinq chiffres au hasard sur un pavé numérique (de 0 à 9) Calculer la probabilité pour que les 5 chiffres forment une suite strictement croissante ? Et une suite simplement croissante ?

Exercice 5. Poker

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes. Une main est constituée de 5 de ces cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ? Le jeu est mélangé aléatoirement et on distribue une main. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. une couleur (5 cartes de la même couleur)
2. une paire (2 cartes de même rang, et 3 autres cartes de rangs tous distincts)
3. Une double paire
4. Un brelan (3 cartes de même rang, et 2 autres cartes de rangs tous distincts)
5. un full (une paire et un brelan)
6. un carré
7. Une suite (5 carte de rang consécutifs)
8. Une suite finissant par un as

9. une suite avec des cartes d'une seule couleur.

Exercice 6. Alphabets

1. Dans une langue dont l'alphabet contient n lettres (par exemple 26 pour le français), combien peut-on former de mots de 5 lettres ? Combien parmi ces mots ne contiennent qu'une seule lettre répetée ?
2. En classant les mots de 5 lettres formés de plus de deux lettres distinctes (on pourra formaliser cela grâce à une bonne relaion d'équivalence), montrer que
$$5|n^5 - n$$
3. Montrer que cela reste valable si on remplace 5 par un nombre premier p. Que se passe-t-il si p n'est pas premier ?

Exercice 7. Jeux de hasard.

On vous propose de jouer à un des deux jeux de hasard décrits ci-dessous :

Jeu 1	**Jeu 2**
Vous payez 1 euro, et lancez 4 pièces de monnaie. Si vous obtenez exactement 2 faces et 2 piles, vous gagnez 3 euros, et dans tous les autres cas vous perdez.	Vous payez 1 euro, et lancez 3 dés. Vous obtenez 2 euros pour chaque 6 que vous obtenez.

On peut calculer le gain moyen espéré en multipliant la probabilité de gagner par le gain. S'il y a plusieurs gain possibles, il faut aditionner (proba gain 1) $\times$ (gain 1) + (proba gain 2) $\times$ (gain 2) + ...

1. Calculez le gain moyen espéré dans chacun des cas.
2. À quel jeu préféreriez-vous jouer ?

Exercice 8. Triangle de Pascal

1. Montrer par le calcul les formules ci-dessous.
$$\begin{aligned} (a) \qquad & C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad \text{pour } 0 \leq p < n \\ (b) \qquad & C_n^p C_p^k = C_n^k C_{n-k}^{p-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq p \leq n \end{aligned}$$
2. Les démontrer maintenant sans calculs. Pour (a), on fixera un élément x dans un ensemble E et on comptera les parties à p éléments qui contiennent a, puis celles qui ne le contiennent pas. Pour (b), on considèrera les couples (A, B) de parties de E, qui vérifient $\operatorname{Card} A = k$, $\operatorname{Card} B = p$ et $A \subset B$. On comptera ces couples en choisissant d'abord A puis en choisissant d'abord B.

Exercice 9. Le binôme de Newton

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.
2. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} k C_n^k$, *(dériver la fonction $x \mapsto (1 + x)^n$).*
3. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$ *(cette fois-ci il faut intégrer).*
4. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ *(calculer le coefficient de x^n dans $(1 + x)^n (1 + x)^n$).*
5. Calculer $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}$ où $[\frac{n}{2}]$ désigne la partie entière de $n/2$ *(développer $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$).*

Il est aussi possible de démontrer les formules 1,4 et 5 par des méthodes sans calculs utilisant des ensembles. Lesquelles ?

Arithmétique

Exercice 10. Les carrés modulo 4

1. Trouver tous les carrés de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (C'est-à-dire les éléments $y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tels que $\exists y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $x = y^2$).
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. *(On supposera que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p, q deux entiers premiers entre eux et on aboutira à une contradiction.)*
3. En déduire également que l'équation $x^2 - y^2 = 250$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 11. Divisibilité par 9, 11 et 7

On cherche d'abord à démontrer le résultat classique : Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer 10^i modulo 9.
2. En utilisant que le nombre $m = k_n\, k_{n-1} \cdots k_1\, k_0$ s'écrit $m = \sum_{i=0}^{n} k_i 10^i$, exprimer m modulo 9 et en déduire le critère de divisibilité par 9 donné ci-dessus.
3. Application : 8 431 848 et 21 568 137 888 sont-ils divisibles par 9 ?

Un critère de divisibilité par 11.

1. Pour la divisibilité par 11, reprendre toutes les questions précédentes en remplacant 9 par 11, et en déduire un critère simple.
2. Application : 502 720 427 et 23 929 159 736 sont-ils divisibles par 11 ?

Un critère de divisibilité par 7.

1. Utiliser la décomposition $m = 10 \times k_n\, k_{n-1} \cdots k_1 + k_0$ et les congruences modulo 7 pour montrer que m est divisible par 7 si et seulement si $k_n\, k_{n-1} \cdots k_1 - 2k_0$ est divisible par 7.
2. Application : En déduire un critère de divisibilité par 7 que l'on utilisera sur 12997 et 101941.

3. Peut-on aussi trouver des critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$?

Exercice 12. Le jeu des allumettes

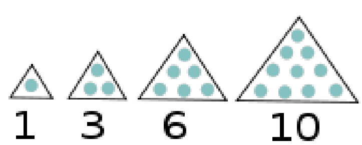
Ce jeu se joue à 2. On dispose 21 allumettes sur une table et les joueurs enlèvent chacun leur tour de 1 à 3 allumettes.

1. Vous commencez. Trouvez la stratégie qui vous permettra de gagner à tous les coups.
2. Au cours de cette partie, une allumette se casse. Vous décidez de recommencer une partie avec 20 allumettes seulement. Comme vous avez gagné la partie précédente, vous avez le droit de choisir qui va commencer. Que choisissez-vous pour être sûr de gagner ?
3. Votre adversaire énervé par ses deux défaites, part acheter une nouvelle boîte d'allumettes. Quand il revient, il vous annonce son intention de commencer la prochaine partie mais s'absente un moment aux toilettes. Vous en profiter pour compter le nouveau nombre d'allumettes. Il y en a 138. Combien d'allumettes devez-vous cacher pour être sûr de gagner la prochaine partie ?
4. Dépité par sa nouvelle défaite, votre adversaire commence à penser que vous avez un truc. Beau joueur, vous lui expliquez que votre stratégie dépend du nombre d'allumettes initial. Mais de quelle façon ?
5. Pour voir s'il a bien compris, vous lui poser la question suivante : " Sur une île déserte après le naufrage d'un cargo d'allumettes pendant lequel toutes les calculettes embarquées ont coulé, les deux seul survivants décident pour tuer le temps d'entamer une partie avec les 768 234 135 boîtes contenant chacune 118 allumettes qu'ils ont retrouvées. Faut-il commencer ou non pour être sûr de gagner ? Et quel serait le premier coup ?"

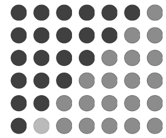
Pour chercher

Exercice 13. Les nombres figurés des mathématiciens grecs et arabes.

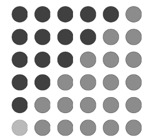
Le n^ième^ **nombre triangulaire** t_n est le nombre de disque que contient un tas triangulaire dont la base est formée de n disques. Sur le dessin ci-dessous on voit que les quatre premiers nombres triangulaires sont $1, 3, 6, 10$.



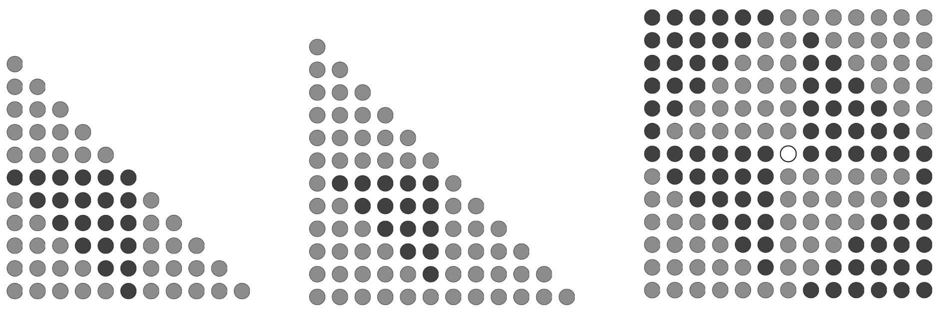
1. Calculer t_n et la somme $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ grâce au dessin ci-dessous



2. Montrer qu'un nombre triangulaire ne se termine jamais par $2, 4, 7, 9$.
3. On appelle **nombre carré** (ou carré parfait) un entier qui est le carré d'un autre. A votre avis, d'où vient cette appelation ? Quelle égalité entre nombre triangulires et carrés peut-on déduire de la figure ci-dessous ? La vérifier par le calcul.

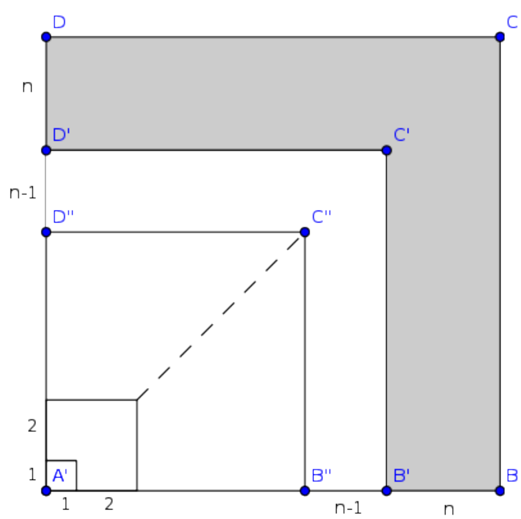


4. Quelles sont les égalités impliquant nombres triangulaires et carrés parfaits cachées dans les figures ci-dessous ? Les démontrer par le calcul.



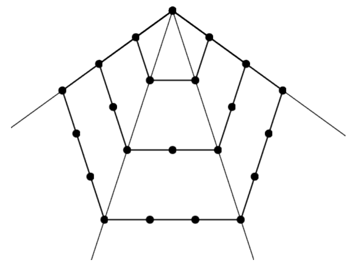
Le dessin ci-dessous a été utilisé par Al-Karagi, mathématicien arabe du XI$^{\text{ème}}$ siècle pour démontrer l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$



Le grand carré est construit par récurrence. On part du carré de côté 1 et à chaque rang, on ajoute la partie grisée (appelée gnomon) de largeur n qui est faite pour qu'on obtienne encore un carré après l'ajout.

5. Calculer le côté du grand carré, l'aire de la partie grisée et en déduire l'égalité ci-dessus.
6. Calculer aussi le n$^{\text{ème}}$ **nombre pentagonal** définit comme le nombre de points de la figure ci-dessous (où $n = 4$).



Exercice 14. Triplets pythagoriciens

Un triplet pythagoricien est un triplet de 3 entiers $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Un triplet sera dit primitif si les trois entiers x, y, z n'ont aucun facteur commun (c-à-d sont premiers entre eux).

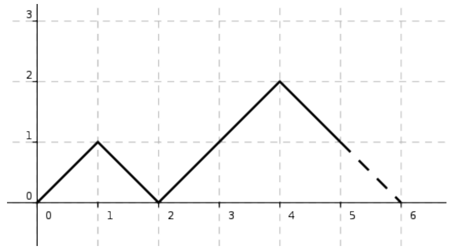
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a forcémment $x^2 \equiv 0\ [4]$ ou ou $x^2 \equiv 1\ [4]$.
2. En déduire que si (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif, alors x et y sont de parités différentes (l'un pair et l'autre impair) et z est impair.
3. Montrer que si $y \equiv 1[2]$, alors $y^2 \equiv 1[8]$. Montrer ensuite pour tout $x \in \mathbb{N}$, x^2 ne peut prendre que 3 valeurs différentes modulo 8. Lesquelles ?
   En déduire l'amélioration du résultat précédent : si (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif, alors x est divisible par 4 et y impair (ou l'inverse).
4. On choisit un x impair dans $\mathbb{N}$. Quelle est alors la parité de $\frac{x^2-1}{2}$? Vérifier que les trois entiers x, $\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2$ forment un triplet pythagoricien.
5. On choisit x divisible par 4. Quelle est alors la parité de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$? Vérifier que les trois entiers x, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$ et $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$ forment un triplet pythagoricien.
6. <u>Application :</u> Utiliser ces deux résultats pour trouver 10 triplets pythagoriciens.
7. Soient p, q deux entiers premier entre eux de parités différentes, montrer que le triplet
   $$(PQ) \qquad x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2$$
   est pythagoricien primitif et que x est impair *(pour le caractère primitif, raisonner par l'absurde).*
8. * Montrer que réciproquement, tout triplet pythagoricien primitif avec x impair peut s'écrire sous la forme (PQ) ci-dessus.
   Pour cela, on écrira $y = 2u$ (car y est pair), $2s = z - x$ et $2t = x + z$ (pourquoi est-ce possible ?). On montrera que s et t sont premiers entre eux. Ensuite de $st = u^2$ on déduira que s et t sont deux carrés. On les notera p^2 et q^2 et il restera alors à vérifier que p et q sont premiers entre eux de parités différentes.
9. <u>Application :</u> Utiliser le résultat de la question 7 pour trouver 10 nouveaux triplets pythagoriciens irréductibles.

Exercice 15. Problème de dépouillement

Le problème ci-dessous se propose de répondre à la question suivante :
Dans une élection où le vainqueur a recueilli s voix de plus que le vaincu, sur un total de n suffrages exprimés, quelle est la probabilité pour que le vainqueur ait toujours été en tête (au sens strict, c'est-à-dire avec toujours plus d'une voix d'avance sauf au tout début) lors du dépouillement ? On supposera qu'il n'y qu'une seule urne et que les bulletins sont ouverts les uns après les autres, et jamais simultanément.

1. On note p le nombre de voix obtenues par le vainqueur et q celui du vaincu. Exprimez p et q en fonction de n et s.

On associe à un dépouillement possible un chemin de la façon suivante : on part du point (0,0). Lorsqu'on dépouille un bulletin du vainqueur V, on avance d'un cran à droite, et on monte d'un cran. Quand on dépouille un bulletin du perdant P, on avance à droite, et on descend d'un cran. Si par exemple le début du dépouillement donne V-P-V-V-P, on a le chemin :



Si le point de coordonnées (x,y) est sur le chemin, x représente le nombre de bulletins dépouillés, et y la différence entre le nombre de voix obtenus par le vainqueur et le vaincu à cet instant du dépouillement. Le premier point du chemin est (0,0), le dernier le point (n,s).

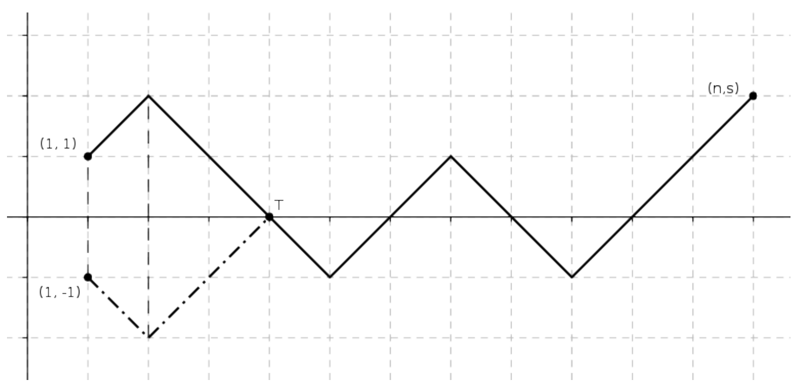
2. Dessiner le chemin α où toutes les premières voix font au vainqueur (et donc toutes l,es dernières au vaincu), puis le chemin β où toutes les premières voix vont au perdant (et donc...), et deux autres chemins au choix. Comment se situent tous les chemins par rapport aux deux chemins α et β ?

Notre problème est de comptabiliser le nombre de chemins allant de (0,0) à (n,s), et se situant, à part le point (0,0), strictement au-dessus de l'axe horizontal.

3. Quel est le second point (après l'origine) d'un tel chemin.
4. Quel est le nombre de chemin totaux qui vont de $(1, 1)$ à (n, s), en coupant ou non l'axe des origines *(il faut donc $(p - 1)$ montées parmi...)* ?

Pour compter le nombre de chemins de $(1, 1)$ à (n, s) qui touchent ou traversent l'axe horizontal, on utilise le principe de réflexion suivant :

Lemme : Si $s > 0$, le nombre de chemins qui vont de $(1, 1)$ à (n, s) qui touchent ou traversent l'axe horizontal vaut le nombre total de chemins allant de (1,-1) à (n,s).



5. Essayez d'expliquer pourquoi le lemme est vrai en vous aidant de la figure ci-dessus.
6. Calculer alors le nombre de chemins de $(1, 1)$ à (n, s) touchant l'axe des abscisses.
7. Montrer que $C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p} = \frac{p-q}{p+q} C_{p+q}^{p}$.
8. Calculer alors le nombre de chemins de $(1, 1)$ à (n, s) ne touchant pas l'axe des abscisses. En déduire la probabilité recherchée.
9. Application numérique : Quelle est la probabilité que le gagnant ait toujours été en tête s'il a remporté l'élection avec 53% des suffrages.
10. * Pour $s = 0$, la formule précédente donne une probabilité nulle. C'est normal, car dans ce cas, il y a égalité à la fin. Pourtant on peut calculer le nombre de chemin de $(1, 1)$ à $(n - 1, 1)$ ne touchant pas l'axe des abscisses. Combien vaut-il ? En déduire la probabilité que le vainqueur ait toujours été en tête (sauf au début et à la fin).
11. * On cherche la probabilité que le vainqueur ait toujours été en tête, mais cette fois-ci au sens large (les égalités sont autorisées). Quel est la droite que le chemin ne doit pas croiser cette fois-ci ? Et que vaut alors la nouvelle probabilité.