Étude des variations d'une fonction

On considère l'application $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - x$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On se propose d'étudier les variations de l'application $\phi : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(x) = f(\sin(x)) = \frac{\sin^3(x)}{3} - 2\sin^2(x) - \sin(x).$$

QUESTION 1

La dérivée de $f(x)$ est ..... .

Le signe de $f'(x)$ est ..... pour $x \in [0; 1]$.

Rappeler la formule de dérivation des fonctions composées: $(f \circ g)'(x) =$ ..... .

D'après cette formule, $\phi'(x) =$ ..... .

QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction ϕ:

x	
$\phi'(x)$	
$\phi(x)$	

Étude des variations d'une fonction

On pose $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ pour tout x réel pour lequel cela a un sens. On se propose d'étudier les variations de l'application

$$x \mapsto \phi(x) = f(e^x) = \sqrt{e^x(1-e^x)}$$

sur le domaine de $\mathbb{R}$ où $\phi(x)$ est bien définie.

QUESTION 1

La fonction f est définie sur ..... et la fonction ϕ sur ..... .

La dérivée de $f(x)$ est ..... pour tout $x \in$ ..... .

Donc, par la formule de dérivation des fonctions composées, $\phi'(x) =$ .....

pour tout $x \in$ ..... .

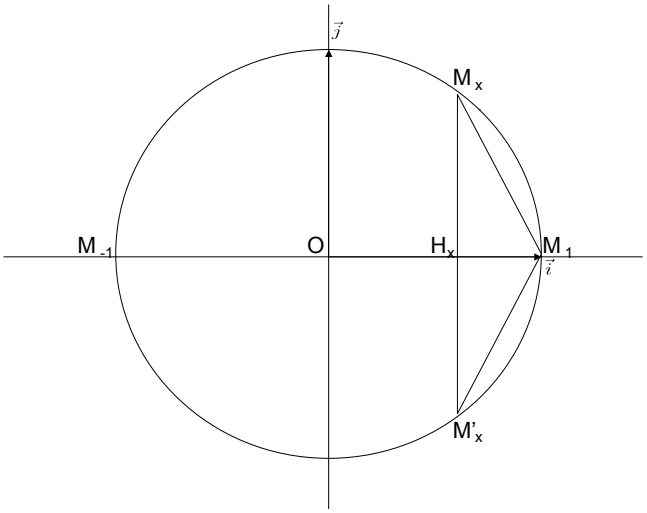
QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction ϕ:

x	
$\phi'(x)$	
$\phi(x)$	

Analyse des fonctions appliquée à l'optimisation

Le plan est rapporté au repère othonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,)$. Pour tout $-1 \leq x \leq 1$, on note M_x (resp M'_x) le point du cercle trigonométrique d'abscisse x et d'ordonnée positive (resp. négative). Par définition $f(x)$ est l'aire du triangle $M_1 M_x M'_x$.



QUESTION 1

Pour tout $-1 \leq x \leq 1$, exprimer $f(x)$ en fonction de $H_x M_1$ et de $H_x M_x$:

$f(x) =$ .....

puis, en fonction de x:

$f(x) =$ ..... .

Calculer $f'(x)$ et le mettre sous la forme $\dfrac{(ax+b)(cx+d)}{\sqrt{1-x^2}}$:

$f'(x) =$ ..... .

QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction f:

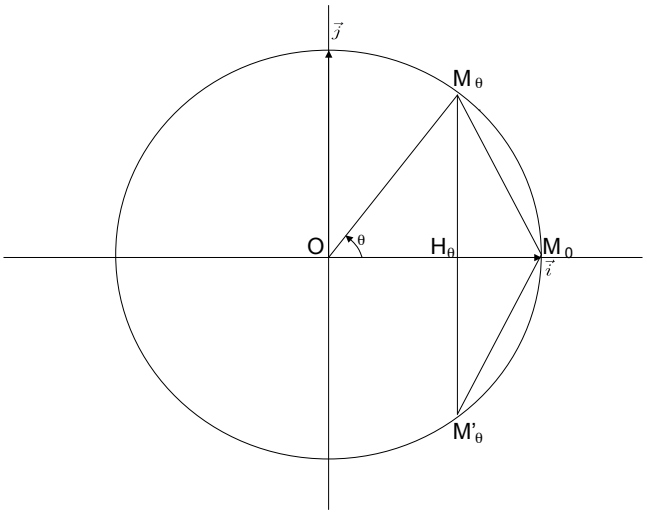
x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

L'aire du triangle est donc maximale quand H_x est le milieu du segment ..... ,

et elle vaut ..... .

Analyse des fonctions appliquée à l'optimisation

Le plan est rapporté au repère othonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Pour tout $0 \leq \theta \leq \pi$, on note M_θ (resp M'_θ) le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$ (resp. $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM'_\theta}) = -\theta$) modulo 2π. Par définition $\varphi(\theta)$ est l'aire du triangle $M_0 M_\theta M'_\theta$.



QUESTION 1

Pour tout $\theta \in [0\,;\pi]$, exprimer $\varphi(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

$\varphi(\theta) =$ ..... .

Calculer $\varphi'(\theta)$ et le mettre sous la forme d'un polynôme en $\cos\theta$:

$\varphi'(\theta) =$ ..... .

$\varphi'(\theta)$ s'annule pour $\cos\theta =$ ..... , c'est dire pour $\theta =$ ..... .

QUESTION 2

Remplir le tableau de variations de la fonction φ:

θ	
$\varphi'(\theta)$	
$\varphi(\theta)$	

L'aire du triangle est donc maximale quand $\theta =$ ..... ,

et cette aire vaut ..... .

Caractérisation d'une fonction classique I

On cherche déterminer toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant les trois conditions suivantes:

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = f(a)f(b)$;

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1$;

(3) $f(0) = 1$.

On se propose de démontrer que f est nécessairement dérivable en tout point, et de trouver une expression de $f(x)$ (on pourra utiliser les résultats sur les équations différentielles linéaires du premier ordre).

QUESTION 1

Soient x_0 et x deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. En posant $a = x_0$ et $b = x - x_0$ et en utilisant l'hypothèse (1), exprimer $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ en fonction de a, b et f:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \text{.....} .$$

Avec l'hypothèse (2), on en déduit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \text{.....}$.

f est donc solution de l'équation différentielle .....

dont la solution générale est ..... (avec C constante).

Compte tenu de l'hypothèse (3), $C =$ ..... et $f(x) =$ ..... .

Caractérisation d'une fonction classique II

On cherche déterminer toutes les applications f définies sur $]0;+\infty[$ et satisfaisant les trois conditions suivantes:

(1) $\forall a, b \in]0;+\infty[,\ f(ab) = f(a) + f(b)$;
(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x)}{x} = 1$;
(3) $f(1) = 0$.

On se propose de démontrer qu'alors f est nécessairement dérivable en tout point $x \in\ ]0;+\infty[$, et de trouver une expression de $f(x)$.

——————————— QUESTION 1 ———————————

Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]0;+\infty[$. En posant $a = x_0$ et $b = \dfrac{x - x_0}{x_0}$ et en utilisant l'hypothèse (1), exprimer $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ en fonction de a, b et f:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{.....} .$$

Avec l'hypothèse (2), on en déduit $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$ ..... ,

d'où l'existence de $f'(x_0) =$ ..... (en fonction de x_0).

On a donc $f(x) =$ ..... pour tout $x \in]0;+\infty[$, d'où on déduit

$f(x) =$ ..... $+C$ (avec C constante).

Compte tenu de l'hypothèse (3), $C =$ ..... et

$f(x) =$ ..... pour tout $x \in]0;+\infty[$.