

Calcul d'intégrales

QUESTION 1

$$\int_1^4 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \dots\dots\dots .$$

$$\int_{-1}^1 x(1 - x^2) \, dx = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x + 1)^2} = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}} = \dots\dots\dots .$$

QUESTION 2

$$\int_1^4 \frac{dx}{2x} = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x} = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \, dx}{1 + x^2} = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx = \dots\dots\dots .$$

QUESTION 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(2x) \, dx \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{3}\right) \, dx = \dots\dots\dots .$$

$$\int_0^{\ln 2} e^{-x} \, dx = \dots\dots\dots .$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} \, dx = \dots\dots\dots .$$

Calcul d'intégrales

On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad B = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{et} \quad C = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx .$$

Question 1 – Calculer $A + B$ en fonction de C , puis calculer $B + C$.

Question 2 – On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0; 1]$ par

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) .$$

Calculez la dérivée f' de f et en déduire, successivement, les valeurs de A , B et C .

QUESTION 1

On simplifie $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dots\dots\dots$, d'où $A + B = \dots\dots\dots$.

D'autre part $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}$ est la dérivée d'un produit uv , avec

$u = x$ et $v = \dots\dots\dots$,

donc $B + C = \int_0^1 (uv)' dx = \dots\dots\dots$.

QUESTION 2

On calcule $f'(x) = \dots\dots\dots$,

puis on simplifie le numérateur et le dénominateur de la fraction obtenue, par $x + \sqrt{1+x^2}$, ce qui donne

$f'(x) = \dots\dots\dots$.

Ceci permet de calculer $A = \dots\dots\dots$

et, en utilisant les résultats de la question précédente,

$B = \dots\dots\dots$ et $C = \dots\dots\dots$.

Pratique de l'intégration par parties

Étant donnés deux nombres réels a et b , on considère les intégrales

$$A = \int_a^b e^x \cos x \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_a^b e^x \sin x \, dx .$$

On se propose de calculer A et B l'aide d'intégrations par parties (**Question 1**). Des calculs d'application sont proposés la **Question 2**.

QUESTION 1

En intégrant par parties avec $u' = e^x$ et $v = \cos x$ on obtient

$$A = \left[\dots \right]_a^b - \int_a^b \dots . \quad (1)$$

En intégrant par parties avec $u' = \cos x$ et $v = e^x$ on obtient

$$A = \left[\dots \right]_a^b - \int_a^b \dots . \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire $A = \dots$, mais aussi $B = \dots$.

QUESTION 2

En utilisant les résultats de la question précédente,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x \, dx = \dots ,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 e^x \cos x \, dx = \dots ,$$

$$\int_0^x e^t \sin t \, dt = \dots .$$